Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

Fonctions hypergéométriques et hypersphériques : polynomes d'Hermite / par P. Appell, J. Kampé de Fériet

Appell, Paul, 1855-1930.
Paris : Gauthier-Villars, 1926.

https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g

Hathi Trust

Public Domain in the United States, Google-digitized
http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

We have determined this work to be in the public domain in the United States of America. It may not be in the public domain in other countries. Copies are provided as a preservation service. Particularly outside of the United States, persons receiving copies should make appropriate efforts to determine the copyright status of the work in their country and use the work accordingly. It is possible that current copyright holders, heirs or the estate of the authors of individual portions of the work, such as illustrations or photographs, assert copyrights over these portions. Depending on the nature of subsequent use that is made, additional rights may need to be obtained independently of anything we can address. The digital images and OCR of this work were produced by Google, Inc. (indicated by a watermark on each page in the PageTurner). Google requests that the images and OCR not be re-hosted, redistributed or used commercially. The images are provided for educational, scholarly, non-commercial purposes.

FONCTIONS

HYPERGÉOMÉTRIQUES

ET

HYPERSPHÉRIQUES

POLYNOMES D'HERMITE

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie
Quai des Grands-Augustins, 55.
67440-26

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

FONCTIONS
HYPERGÉOMÉTRIQUES
ET
HYPERSPHÉRIQUES

POLYNOMES D'HERMITE

PAR

P. APPELL
Membre de l'Institut,
Recteur honoraire de l'Académie de Paris,

J. KAMPÉ DE FÉRIET
Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

UNIVERSITY OF MINNESOTA LIBRARY

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1926

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

INTRODUCTION.

L'Ouvrage, déjà ancien, de H.-E. Heine (1878), intitulé *Handbuch der Kugelfunktionen*, expose les propriétés principales et les applications des polynomes de Legendre, des polynomes de Jacobi, des fonctions de Laplace, et de leurs dégénérescences, ainsi que les rapports de ces fonctions avec le potentiel et la fonction hypergéométrique de Gauss.

Il nous a semblé que le moment était venu de publier un Ouvrage analogue sur les fonctions sphériques de deux ou de plusieurs variables, sur les polynomes d'Hermite notamment, et sur les rapports de ces fonctions avec les potentiels dans l'espace à plus de trois dimensions et avec les fonctions hypergéométriques de plusieurs variables.

Tel est l'objet du présent Ouvrage

Cet Ouvrage est divisé en trois Parties :

Dans la première Partie, nous exposons l'ensemble des résultats relatifs aux fonctions hypergéométriques de plusieurs — et plus spécialement de deux — variables.

Le point de départ de cette théorie se trouve dans un Mémoire de P. Appell, publié en 1882, où il a montré qu'il était possible de définir quatre séries doubles qui généralisent la célèbre série hypergéométrique de Gauss. Ces fonctions de deux variables possèdent des propriétés remarquables; notamment elles vérifient chacune un système de deux équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre. Ces systèmes se signalent eux-mêmes à l'attention, car leur intégrale générale s'exprime linéairement au moyen d'un nombre fini d'intégrales particulières (quatre et parfois trois). Peu après la publication de ce Mémoire, ses résultats ont été complétés, sur certains points importants, par MM. E. Goursat et E. Picard; celui-ci a notamment montré comment l'extension aux fonctions de deux variables du problème classique de Riemann conduisait tout naturellement à l'une des fonctions définies *a priori* par P. Appell et désignée par $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$. Dans sa Thèse (1893), M. R. Le Vavasseur a étudié d'une manière approfondie le système d'équations aux dérivées partielles de cette fonction F_1; en suivant une méthode due à M. Goursat, il a formé le tableau complet des 60 intégrales de ce système, exprimables par des fonctions F_1, et donné les relations qui les unissent quatre à quatre.

Récemment (1921), M. Pierre Humbert a considéré des dégénérescences des

395401

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

quatre fonctions hypergéométriques de deux variables, qui ont avec elles le même lien que les fonctions de Kummer et de Bessel avec la série de Gauss. Enfin, J. Kampé de Fériet a montré (1921) que les fonctions de P. Appell et leurs dégénérescences rentrent, comme cas particuliers, dans une classe beaucoup plus étendue de fonctions de deux variables, dont il a esquissé une étude générale.

Les fonctions hypergéométriques les plus générales à deux variables paraissent avoir été considérées pour la première fois par J. Horn (1889); leur étude a pris un nouvel intérêt depuis les travaux récents de MM. Hj. Mellin, R. Birkeland, A. Capelli, G. Belardinelli, qui ont montré le rôle fondamental qu'elles jouent dans la résolution des équations algébriques.

L'extension des résultats de P. Appell aux fonctions de n variables a été faite par M. Lauricella (1893), sans que ce passage de deux à n mette en évidence aucune idée essentiellement nouvelle.

Dans l'étude du potentiel newtonien de l'espace à trois dimensions, on rencontre certains polynomes bien remarquables à une variable . les polynomes de Legendre; ce sont les valeurs prises sur une sphère de rayon *un* par des polynomes homogènes à trois variables vérifiant l'équation aux dérivées partielles de Laplace. Hermite a défini, dans des Notes parues aux *Comptes rendus* de 1865, deux familles de polynomes à deux variables, qu'il désigne par $U_{m,n}(x, y)$ et $V_{m,n}(x, y)$ et qui, du point de vue algébrique, généralisent ceux de Legendre. Il a mis en évidence un fait nouveau et intéressant : quand on passe au cas de deux variables, la propriété d'orthogonalité des polynomes de Legendre ne s'étend pas à chacune des deux familles de polynomes $U_{m,n}$ et $V_{m,n}$ considérées séparément mais bien à l'ensemble des deux, qui sont ainsi adjointes l'une à l'autre. Les résultats d'Hermite ont été complétés, de 1868 à 1870, par son élève F. Didon, qui en a notamment fait l'extension au cas de n variables; il a aussi découvert deux systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre vérifiés par les polynomes $U_{m,n}$ $V_{m,n}$. Mais ce n'est qu'en 1913 que P. Appell a remarqué que les polynomes à deux variables, auxquels une heureuse intuition avait conduit Hermite pour généraliser ceux de Legendre, jouaient, dans la théorie du potentiel de l'espace à quatre dimensions, exactement le même rôle que ceux-ci dans la théorie du potentiel newtonien; de même les polynomes à n variables de Didon découlent naturellement de l'étude du potentiel de l'espace à $n + 2$ dimensions. Tous ces polynomes sont simplement des fonctions hypersphériques, c'est-à-dire la valeur prise sur une hypersphère de rayon *un* par certains polynomes homogènes vérifiant l'équation de Laplace à un nombre quelconque de variables. *L'étude des fonctions hypersphériques* a été faite par J. Kampé de Fériet dans sa Thèse (1915), dont le développement systématique est l'objet de la *deuxième Partie* de cet Ouvrage; *le lien avec la première Partie apparaît du fait que les fonctions hypersphériques s'expriment très simplement par des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables et ont avec elles un rapport aussi étroit que les polynomes de Legendre avec la série de Gauss.*

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Enfin dans la *troisième Partie*, nous étudions des polynomes à une et à plusieurs variables, dont la définition est également due à Hermite (1864) et qui sont un cas limite des polynomes précédents; on pourrait dire brièvement qu'ils découlent du potentiel dans un espace à un nombre infini de dimensions. Ce point de vue n'est pas, bien entendu, celui d'Hermite qui les obtient d'une façon très élégante par le développement en série d'une exponentielle portant sur une forme quadratique de n variables; là encore, pour obtenir une propriété d'orthogonalité, Hermite considère deux familles adjointes de polynomes. L'étude approfondie des polynomes d'Hermite à une variable a été faite par M. Niels Nielsen (1918).

Pour terminer, nous donnons quelques Notes, qui complètent divers points de l'Ouvrage :

Une application de la fonction $F_1(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y)$ à certains développements de la Mécanique Céleste (Note II); un résumé des résultats de J. Horn sur le domaine de convergence des séries hypergéométriques les plus générales à deux variables (Note III); un aperçu des travaux récents sur la résolution des équations algébriques par des séries hypergéométriques générales (Note IV); une application des polynomes d'Hermite aux quadratures mécaniques des fonctions de plusieurs variables, question étudiée par M. Angelescu dans sa Thèse (1916) (Note V); une rapide revue des généralisations, dues à M. Pierre Humbert, des fonctions hypersphériques (Note VI).

Les résultats exposés dans cet Ouvrage étaient jusqu'à présent dispersés dans un grand nombre de Mémoires, insérés dans les périodiques les plus divers; nous nous sommes efforcés d'en faire une rédaction d'ensemble présentant un caractère didactique. Voulant être lus facilement par un lecteur possédant seulement une culture mathématique générale, nous n'avons pas hésité — au prix peut-être d'un peu de longueur, — à entrer, chaque fois que cela a paru nécessaire, dans des explications détaillées; nous espérons aussi avoir mis en évidence les points qui touchent à des théories plus délicates et qui appelleraient de nouvelles recherches.

Nous adressons tous nos remercîments à l'Imprimerie Gauthier-Villars dont l'éloge n'est plus à faire.

Nous pardonnera-t-on enfin de faire remarquer que, dans cet exposé succinct, à l'origine des théories qui constituent l'objet de cet Ouvrage, nous n'avons guère rencontré sous notre plume que des noms de mathématiciens français ?

P. Appell et J. Kampé de Fériet.

Paris et Lille, novembre 1925.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

Digitized by Google

Original from
UNIVERSITY OF MINNESOTA

PREMIÈRE PARTIE.

LES

FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES

DE PLUSIEURS VARIABLES

CHAPITRE I.

LES QUATRE FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES DE DEUX VARIABLES.

I. — La fonction hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ de Gauss.

Gauss [1] a donné le nom de *série hypergéométrique* à la série

$$(1) \qquad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} x^m.$$

Le symbole (λ, k), où λ désigne un nombre quelconque et k un entier positif ou zéro, a le sens suivant [2] :

$$(2) \qquad (\lambda, k) = \frac{\Gamma(\lambda + k)}{\Gamma(\lambda)} = \lambda(\lambda + 1)\ldots(\lambda + k - 1),$$

en particulier

$$(\lambda, 0) = 1, \qquad (1, k) = 1, 2, \ldots, k = k!.$$

Dans la série hypergéométrique, les *trois premiers éléments* α, β, γ sont considérés comme des *paramètres*, le *quatrième* x comme la *variable*, ces quatre quantités pouvant d'ailleurs prendre des valeurs complexes; on doit seulement exclure pour γ les valeurs entières et négatives; les

[1] C.-F. Gauss, *Disquisitiones generales circa seriem infinitam* $1 + \frac{\alpha.\beta}{\gamma.1} x + \ldots$, (*Werke*, t. III, p. 125-162). Avant le Mémoire de Gauss, publié en 1813 dans les *Commentationes societatis regiæ scientiarum Gottingensis recentiores*, divers auteurs avaient déjà rencontré la série (1), notamment Euler qui, dans les *Acta Academiæ Petropolisensis*, a donné les formules générales de transformation (6). Dans un deuxième Mémoire *Determinatio seriei nostræ per aequationem differentialem secundi ordinis* (*Werke*, t. III, p. 207-229), Gauss a complété ses résultats, qui ont reçu d'importants développements dans les Mémoires de Kummer et de Jacobi, cités plus loin.

[2] Ce symbole a été introduit par P. Appell (*Comptes rendus*, t. XC, 1880, p. 296).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

deux éléments α et β, jouant le même rôle, on peut les permuter

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = F(\beta, \alpha, \gamma, x).$$

Le rapport d'un terme au précédent étant égal à $\frac{(\alpha+m)(\beta+m)}{(\gamma+m)(1+m)}x$, *le rayon de convergence de la série hypergéométrique est égal à l'unité.*

Pour un choix convenable des éléments α, β, γ, la série hypergéométrique s'identifie avec un grand nombre de développements élémentaires bien connus; elle contient, notamment comme cas particulier, le développement du binome

$$F(\alpha, \beta, \alpha, x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\beta, m)}{(1, m)} x^m = (1-x)^{-\beta}.$$

Le prolongement analytique de la série (1) définit, en dehors du cercle de convergence $|x| = 1$, une fonction qui est uniforme dans tout le plan de la variable complexe x, une fois qu'on y a tracé comme coupure le segment de l'axe réel qui va du point 1 à $+\infty$; *cette fonction, définie à l'intérieur du cercle* $|x| = 1$ *par la série hypergéométrique, et au dehors par son prolongement analytique, est la fonction hypergéométrique de Gauss* $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

La fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ n'admet à distance finie comme point singulier que le point $x = 1$, qui est un point de ramification; son *étoile principale* (1) comprend donc tout le plan de la variable x, exclu le segment de l'axe réel $(1 \dots +\infty)$.

L'expression élégante de la fonction hypergéométrique sous forme d'une intégrale définie (2)

$$(3) \qquad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-ux)^{-\alpha}\,du$$

donne une représentation analytique de cette fonction valable dans toute son étoile principale, lorsque les parties réelles de β et $\gamma - \beta$ sont positives (3). Pour le démontrer il suffit de constater que l'intégrale définie conserve un sens tant que x ne vient pas sur le segment exclu $(1 \dots +\infty)$ de l'axe réel et qu'à l'intérieur du cercle $|x| = 1$, on peut la développer en la série uniformément convergente

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\alpha, m)}{(1, m)} \left[\int_0^1 u^{\beta+m-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}\,du \right] x^m$$

qui s'identifie avec la série hypergéométrique en remplaçant l'intégrale entre crochets par son expression, classique dans la théorie des intégrales eulériennes.

Les propriétés de la fonction hypergéométrique auxquelles nous aurons à faire appel sont les suivantes :

1° Une fonction hypergéométrique où l'un des éléments α ou β est égal à un entier négatif se réduit à un polynome en x de degré égal à cet entier.

---

(1) On appelle *étoile principale d'une fonction*, d'après M. Mittag-Leffler, le domaine obtenu en supprimant sur tout rayon vecteur issu de l'origine le segment allant depuis le point singulier — situé sur ce rayon et le plus rapproché de l'origine — jusqu'à l'infini.

(2) C.-G.-J. Jacobi, *Untersuchungen über die differential Gleichung der Hypergeometrischen Reihe* (*J. reine angew. Math.*, t. LVI, 1859, p. 149-175).

(3) Bien entendu, on peut en échangeant dans cette intégrale les rôles de α et β, en déduire une nouvelle expression de F

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

2° La dérivée d'ordre p d'une fonction hypergéométrique a pour expression

$$(4)\qquad \frac{d^p}{dx^p}F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{(\alpha, p)(\beta, p)}{(\gamma, p)}F(\alpha+p, \beta+p, \gamma+p, x).$$

3° Les deux fonctions $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ et $F(\alpha', \beta', \gamma', x)$ sont dites *contiguës* lorsqu'il y a une des trois différences $\alpha'-\alpha$, $\beta'-\beta$, $\gamma'-\gamma$ qui est égale à ± 1, les deux autres étant nulles.

Il y a six fonctions contiguës à une fonction hypergéométrique donnée $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$. *Trois fonctions hypergéométriques, contiguës deux à deux, sont liées par une équation linéaire.* Les relations entre $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ et deux des six fonctions qui lui sont contiguës sont au nombre de $\frac{6.5}{1.2} = 15$; voici l'une d'elles à titre d'exemple :

$$\alpha F(\alpha+1, \beta, \gamma, x) - \beta F(\alpha, \beta+1, \gamma, x) = (\alpha-\beta)F(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

Trois fonctions $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, $F(\alpha', \beta', \gamma', x)$, $F(\alpha'', \beta'', \gamma'', x)$ telles que les différences $\alpha'-\alpha$, $\beta'-\beta$, $\gamma'-\gamma$, $\alpha''-\alpha$, $\beta''-\beta$, $\gamma''-\gamma$, prennent l'une des trois valeurs -1, 0, $+1$ sont encore liées par une équation linéaire; ces relations sont au nombre de $\frac{26.25}{1.2} = 325$; en voici un exemple :

$$F(\alpha+1, \beta, \gamma, x) - F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\beta}{\gamma}x F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x).$$

4° De la formule (3) qui définit la fonction hypergéométrique dans tout son domaine d'existence, quand [1] $\mathcal{R}(\beta) > 0$ et $\mathcal{R}(\gamma-\beta) > 0$, on déduit

$$(5)\qquad F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} \qquad \mathcal{R}(\gamma-\alpha-\beta) > 0.$$

5° L'intégrale (3) ne changeant pas de forme quand on y effectue l'un des trois changements de variable

$$u = 1-v, \qquad u = \frac{v}{1-x+vx}, \qquad u = \frac{1-v}{1-vx},$$

on en déduit *les trois formules de transformation données par Euler*

$$(6)\qquad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\alpha}F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right)$$

$$(6')\qquad = (1-x)^{-\beta}F\left(\gamma-\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right)$$

$$(6'')\qquad = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x).$$

On prend dans ces formules comme détermination de $(1-x)^\lambda$ la détermination principale qui se réduit à $+1$ pour $x = 0$; les fonctions hypergéométriques qui figurent dans le second membre de (6) et (6') sont représentées par une série hypergéométrique procédant selon les puissances de $\frac{x}{x-1}$ convergente à l'intérieur du domaine

$$\left|\frac{x}{x-1}\right| < 1.$$

---

[1] Le symbole $\mathcal{R}(\xi)$ désigne la partie réelle ξ_1 de la quantité complexe $\xi = \xi_1 + i\xi_2$.

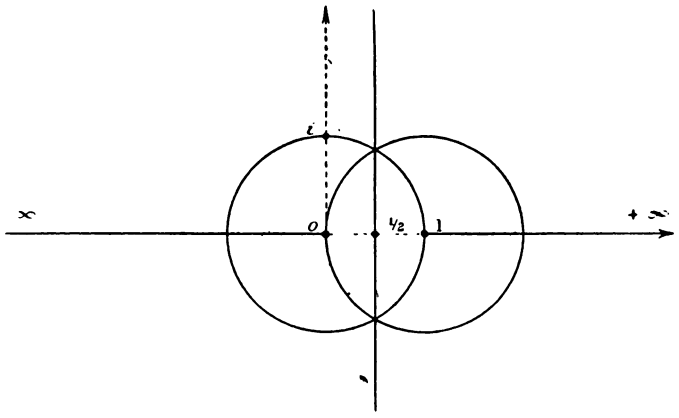
Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

c'est-à-dire dans tout le demi-plan situé à gauche de la droite (*fig.* 1)

$$\mathcal{R}(x) = \frac{1}{2}.$$

La formule (6″) permet de ramener toujours l'étude du cas où $\mathcal{R}(\gamma - \alpha - \beta) < 0$ au cas

Fig. 1.



où $\mathcal{R}(\gamma - \alpha - \beta) > 0$; on en déduit notamment

$$(5') \qquad \lim_{x=1} |(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma} F(\alpha, \beta, \gamma, x)| = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \qquad \mathcal{R}(\gamma - \alpha - \beta) < 0.$$

6° L'équation différentielle linéaire du second ordre

$$(7) \qquad x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0$$

possède comme points singuliers réguliers (au sens de Fuchs) les trois points

$$0, \quad 1, \quad \infty.$$

Les racines des équations déterminantes relatives à ces points sont :

pour $x = 0$,	$0, \quad 1-\gamma$;
pour $x = 1$,	$0, \quad \gamma - \alpha - \beta$;
pour $x = \infty$,	$\alpha, \quad \beta$.

Si l'on cherche à déterminer des séries vérifiant formellement l'équation (7), on obtient : deux séries hypergéométriques procédant selon les puissances de x convergentes à l'intérieur du cercle $|x| = 1$:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) \quad \text{et} \quad x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x);$$

deux séries hypergéométriques procédant selon les puissances de $1-x$ convergentes à l'intérieur du cercle $|x-1| = 1$:

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x) \quad \text{et} \quad (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, 1-x);$$

deux séries hypergéométriques procédant selon les puissances de $\frac{1}{x}$, convergentes à l'extérieur

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

du cercle $|x| = 1$:

$$x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad x^{-\beta} F\left(\beta+1-\gamma, \beta, \beta+1-\alpha, \frac{1}{x}\right).$$

Donc si, dans le plan de la variable complexe, on trace comme coupures les deux segments de l'axe réel allant de $-\infty$ à 0 et de $+1$ à $+\infty$, *on peut dans ce domaine représenter l'intégrale générale de l'équation différentielle* (7) *d'une manière uniforme par l'une des trois expressions suivantes :*

$$(8) \quad y = A F(\alpha, \beta, \gamma, x) + B x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x),$$

$$(8') \quad y = A' F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x) + B'(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, 1-x),$$

$$(8'') \quad y = A'' x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \frac{1}{x}\right) + B'' x^{-\beta} F\left(\beta+1-\gamma, \beta, \beta+1-\alpha, \frac{1}{x}\right),$$

les A et les B désignant des constantes arbitraires — ceci en supposant qu'aucun des nombres γ, $\gamma-\alpha-\beta$, $\alpha-\beta$ n'est égal à un entier; si cette condition n'est pas réalisée l'intégrale générale de l'équation (7) contient des termes logarithmiques —.

Pour représenter dans tout leur domaine d'existence les six fonctions hypergéométriques qui figurent dans les formules (8), (8'), (8''), on peut partir de leur expression (3) par une intégrale définie. On obtient alors le résultat général suivant :

L'intégrale définie

$$(9) \qquad z = \int_g^h u^{\alpha-\gamma}(u-1)^{\gamma-\beta-1}(u-x)^{-\alpha}\, du,$$

où g et h désignent l'une des quatre quantités $0, 1, x, \infty$, *est une intégrale particulière de l'équation différentielle* (7).

Pour démontrer cette propriété, il suffit de vérifier que les six intégrales que l'on obtient ainsi

$$z_1 = \int_1^{+\infty} V\, du, \qquad z_2 = \int_0^x V\, du, \qquad z_3 = \int_{-\infty}^0 V\, du,$$

$$z_4 = \int_1^x V\, du, \qquad z_5 = \int_0^1 V\, du, \qquad z_6 = \int_x^{+\infty} V\, du,$$

$$V = u^{\alpha-\gamma}(u-1)^{\gamma-\beta-1}(u-x)^{-\alpha}$$

se ramènent respectivement à l'intégrale (3) par les changements de variable

$$u = \frac{1}{v}, \qquad u = xv, \qquad u = 1 - \frac{1}{v},$$

$$u = 1 - v(1-x), \qquad u = v, \qquad u = \frac{x}{v}.$$

Ce changement une fois fait, les six intégrales z s'identifient immédiatement avec les six fonctions hypergéométriques qui figurent dans les expressions (8), (8'), (8''); ce sont donc bien des intégrales particulières de l'équation différentielle (7).

Si à chacune de ces six fonctions hypergéométriques, on applique les trois transformations d'Euler (6), on obtient finalement le *tableau complet des 24 intégrales de l'équation différentielle*

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

hypergéométrique dû à Kummer :

$$y_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

$$y_2 = x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x),$$

$$y_3 = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma, 1 - x),$$

$$y_4 = (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma + 1 - \alpha - \beta, 1 - x),$$

$$y_5 = x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha + 1 - \gamma, \alpha + 1 - \beta, \frac{1}{x}\right),$$

$$y_6 = x^{-\beta} F\left(\beta, \beta + 1 - \gamma, \beta + 1 - \alpha, \frac{1}{x}\right),$$

$$y_7 = (1 - x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma - \beta, \gamma, \frac{x}{x - 1}\right),$$

$$y_8 = x^{1-\gamma}(1 - x)^{\gamma - \alpha - 1} F\left(\alpha + 1 - \gamma, 1 - \beta, 2 - \gamma, \frac{x}{x - 1}\right),$$

$$y_9 = x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha + 1 - \gamma, \alpha + \beta + 1 - \gamma, \frac{x - 1}{x}\right),$$

$$y_{10} = x^{\alpha - \gamma}(1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F\left(1 - \alpha, \gamma - \alpha, \gamma + 1 - \alpha - \beta, \frac{x - 1}{x}\right),$$

$$y_{11} = x^{-\alpha}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma - \beta, \alpha + 1 - \beta, \frac{1}{1 - x}\right),$$

$$y_{12} = x^{-\beta}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-\beta} F\left(\gamma - \alpha, \beta, \beta + 1 - \alpha, \frac{1}{1 - x}\right),$$

$$y_{13} = (1 - x)^{-\beta} F\left(\gamma - \alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{x - 1}\right),$$

$$y_{14} = x^{1-\gamma}(1 - x)^{\gamma - \beta - 1} F\left(1 - \alpha, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, \frac{x}{x - 1}\right),$$

$$y_{15} = x^{-\beta} F\left(\beta + 1 - \gamma, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma, \frac{x - 1}{x}\right),$$

$$y_{16} = x^{\beta - \gamma}(1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F\left(\gamma - \beta, 1 - \beta, \gamma + 1 - \alpha - \beta, \frac{x - 1}{x}\right),$$

$$y_{17} = x^{-\alpha}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\gamma - \alpha - 1} F\left(\alpha + 1 - \gamma, 1 - \beta, \alpha + 1 - \beta, \frac{1}{1 - x}\right),$$

$$y_{18} = x^{-\beta}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\gamma - \beta - 1} F\left(1 - \alpha, \beta + 1 - \gamma, \beta + 1 - \alpha, \frac{1}{1 - x}\right),$$

$$y_{19} = (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma, x),$$

$$y_{20} = x^{1-\gamma}(1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(1 - \alpha, 1 - \beta, 2 - \gamma, x),$$

$$y_{21} = x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, \alpha + \beta + 1 - \gamma, 1 - x),$$

$$y_{22} = x^{1-\gamma}(1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(1 - \alpha, 1 - \beta, \gamma + 1 - \alpha - \beta, 1 - x),$$

$$y_{23} = x^{-\alpha}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\gamma - \alpha - \beta} F\left(1 - \beta, \gamma - \beta, \alpha + 1 - \beta, \frac{1}{x}\right),$$

$$y_{24} = x^{-\beta}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\gamma - \alpha - \beta} F\left(\gamma - \alpha, 1 - \alpha, \beta + 1 - \alpha, \frac{1}{x}\right).$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Au point de vue de la représentation de ces 24 intégrales par des séries hypergéométriques convergentes, on voit que :

y_1, y_2, y_{19}, y_{20}	sont représentées à l'intérieur du cercle	$\lvert x\rvert = 1$	par une série ordonnée selon les puissances de			x,
y_3, y_4, y_{21}, y_{22}	»	» $\lvert x-1\rvert = 1$	»	»	»	$1-x$,
y_5, y_6, y_{23}, y_{24}	»	à l'extérieur du cercle $\lvert x\rvert = 1$	»	»	»	$\frac{1}{x}$,
$y_{11}, y_{12}, y_{17}, y_{18}$	»	» $\lvert x-1\rvert = 1$	»	»	»	$\frac{1}{1-x}$,
y_7, y_8, y_{13}, y_{14}	»	à gauche de la droite $\mathcal{R}(x) = \frac{1}{2}$	»	»	»	$\frac{x}{x-1}$,
$y_9, y_{10}, y_{15}, y_{16}$	»	à droite de la droite $\mathcal{R}(x) = \frac{1}{2}$	»	»	»	$\frac{x-1}{x}$.

Une fois tracées (*fig.* 1) dans le plan les deux coupures $(-\infty, 0)$ et $(1 - +\infty)$ chacune de ces 24 intégrales est uniforme; pour achever de les préciser, on prend pour les quantités x^λ, $(1-x)^\mu$, $\left(1-\frac{1}{x}\right)^\nu$, qui y figurent, la détermination principale qui se réduit à $+1$ respectivement pour $x = 1$, $x = 0$, $x = \infty$.

Entre trois quelconques des 24 intégrales de l'équation différentielle hypergéométrique existe une relation linéaire à coefficients constants.

D'abord comme conséquence immédiate de la formule d'Euler (6), on a les relations évidentes

$$y_1 = y_7 = y_{13} = y_{19}, \qquad y_4 = y_{10} = y_{16} = y_{22},$$
$$y_2 = y_8 = y_{14} = y_{20}, \qquad y_5 = y_{11} = y_{17} = y_{23},$$
$$y_3 = y_9 = y_{15} = y_{21}, \qquad y_6 = y_{12} = y_{18} = y_{24}.$$

En outre, Gauss a démontré les équations

$$(10) \qquad y_1 = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} y_3 + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y_4,$$

$$(10') \qquad y_1 = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\beta)}(-1)^\alpha y_5 + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}(-1)^\beta y_6$$

[*Determinatio seriei nostræ*, ... équations (87) et (93), p. 213 et 220] dont on peut déduire de nouvelles relations en y remplaçant $y_1, y_3, \ldots$ par $y_7, y_9, \ldots$ en vertu des égalités précédentes.

Enfin Gauss a établi de nombreuses relations entre certaines fonctions hypergéométriques spéciales $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ et $F(\alpha', \beta', \gamma', y)$ où les $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ ont des valeurs particulières, y étant une fonction algébrique de x; par exemple [1]

$$F\left(\alpha, \alpha+\frac{1}{2}, \beta, \beta+\frac{1}{2}, x\right) = (1+\sqrt{x})^{-2\alpha} F\left(\alpha, \beta, 2\beta, \frac{4\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}\right).$$

---

[1] Gauss, *Werke*, t. III, p. 225, équation (101).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Les résultats de Gauss, considérablement augmentés par Kummer [1] dans un Mémoire fondamental, ont été systématiquement étendus par M. Goursat dans sa Thèse [2].

7° Gauss [3] a donné le développement en fraction continue du quotient de deux fonctions hypergéométriques

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{a_1 x}{1 - \cfrac{a_2 x}{1 - \ddots}}},$$

$$a_1 = \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}, \qquad a_2 = \frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)},$$

$$a_3 = \frac{(\alpha+1)(\gamma+1-\beta)}{(\gamma+2)(\gamma+3)}, \qquad a_4 = \frac{(\beta+2)(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+3)(\gamma+4)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Dans le cas particulier où $\beta = 0$, en remplaçant dans la formule précédente $\gamma + 1$ par γ, on obtient le développement en fraction continue

$$F(\alpha, 1, \gamma, x) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{b_1 x}{1 - \cfrac{b_2 x}{1 - \ddots}}},$$

$$b_1 = \frac{\alpha}{\gamma}, \qquad b_2 = \frac{\gamma-\alpha}{\gamma(\gamma+1)},$$

$$b_3 = \frac{(\alpha+1)\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+2)}, \qquad b_4 = \frac{2(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+2)(\gamma+3)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Jacobi [4] a résolu la question du développement en fraction continue de la fonction

$$F\left(\alpha, 1, \gamma, \frac{1}{x}\right)$$

à un point de vue différent et susceptible de s'appliquer à des fonctions beaucoup plus générales [5].

Proposons-nous de développer en fraction continue la fonction

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} \frac{1}{x} F\left(\alpha, 1, \gamma, \frac{1}{x}\right)$$

---

(1) Kummer, *Ueber die hypergeometriche Reihe* $1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma.1} x + \ldots$ (*J. reine angew. Math.*, t. XV, 1836, p. 39).

(2) E. Goursat, *Sur l'équation différentielle qui admet pour intégrale la série hypergéométrique.* Thèse (Paris).

(3) Gauss, *Werke*, t. III, p. 134-135, équations (25) et (30).

(4) Jacobi, *Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrichen Reihe* (*J. reine angew. Math.*, t. LVI, 1859, p. 149-175).

(5) La méthode exposée permet de trouver le développement en fraction continue de toute fonction $\varphi(x)$ de la forme

$$\varphi(x) = \int_a^b \frac{f(u)}{x-u} du.$$

$f(u)$ ne s'annulant pas dans l'intervalle (a, b). Le numérateur $P_n(x)$ et le dénominateur $Q_n(x)$ de la réduite

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

ou, en remplaçant F par son expression sous forme d'une intégrale définie,

$$\varphi(x) = \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}}{x-u}\,du.$$

Soit $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ la réduite de rang n. *Cherchons à déterminer les polynomes* $P_n(x)$ *et* $Q_n(x)$, *respectivement de degré* $n-1$ *et* n, *par la condition que le développement de*

$$Q_n(x)\varphi(x) - P_n(x)$$

selon les puissances de $\frac{1}{x}$ *commence par un terme en* $\frac{1}{x^{n+1}}$

$$\varphi(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \frac{1}{Q_n(x)}\left[\frac{C_{n+1}}{x^{n+1}} + \frac{C_{n+2}}{x^{n+2}} + \ldots\right].$$

Pour que cette condition soit réalisée, *il est évidemment nécessaire et suffisant que le produit* $Q_n(x)\,\varphi(x)$ *ne contienne pas de terme en* $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots, \frac{1}{x^n}$.

Or,

$$Q_n(x)\varphi(x) = \int_0^1 Q_n(x)\frac{u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}}{x-u}\,du,$$

ce que l'on peut écrire

$$Q_n(x)\varphi(x) = \int_0^1 \frac{Q_n(x)-Q_n(u)}{x-u}u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}\,du + \int_0^1 Q_n(u)\frac{u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}}{x-u}\,du.$$

Mais comme $Q_n(x) - Q_n(u)$ est divisible par $x-u$, la première intégrale est un polynome de degré $n-1$ en x; nous poserons

$$P_n(x) = \int_0^1 \frac{Q_n(x)-Q_n(u)}{x-u}u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}\,du.$$

Quant au développement de la deuxième intégrale, pour qu'il débute par un terme en $\frac{1}{x^{n+1}}$, il suffit d'imposer au polynome $Q_n(x)$ les n conditions

$$\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}u^k Q_n(u)\,du = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Le polynome $Q_n(x)$ est déterminé, à un facteur constant près, par ces n conditions; il est aisé

---

de rang n sont déterminés par les conditions suivantes :

$$\int_a^b f(u)\,u^k Q_n(u)\,du = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

$$P_n(x) = \int_a^b \frac{Q_n(x)-Q_n(u)}{x-u}f(u)\,du.$$

Voir STIELTJES, *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*, t. I, p. 107-114, ou encore HEINE, *Handbuch der Kugelfunktionen*, t. I, p. 286-297.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

de montrer que l'on a

$$Q_n(x) = C x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha+1-\gamma}\frac{d^n}{dx^n}[x^{\alpha+n-1}(1-x)^{\gamma+n-\alpha-1}].$$

D'abord cette expression est bien un polynome de degré n en x; ensuite considérons l'intégrale

$$\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}f(u)\,Q_n(u)\,du = C\int_0^1 f(u)\frac{d^n}{du^n}[u^{\alpha+n-1}(1-u)^{\gamma+n-\alpha-1}]\,du,$$

une suite d'intégrations par parties permet d'écrire

$$\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}f(u)\,Q_n(u)\,du = (-1)^n C\int_0^1 u^{\alpha+n-1}(1-u)^{\gamma+n-\alpha-1}\frac{d^n f}{du^n}\,du,$$

à condition que les termes tout intégrés s'annulent aux limites, ce qui aura lieu si

$$\left|u^{\alpha-1}\frac{d^k f}{du^k}\right|_{u=0} = 0 \qquad \text{et} \qquad \left|(1-u)^{\gamma-\alpha-1}\frac{d^k f}{du^k}\right|_{u=1} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1);$$

ceci est notamment réalisé si $f(u)$ est un polynome et si $\mathcal{R}(\alpha)$ et $\mathcal{R}(\gamma-\alpha)$ sont positives. *Donc si $f(u)$ est un polynome de degré inférieur à n,*

$$\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}f(u)\,Q_n(u)\,du = 0.$$

Le polynome $Q_n(x)$ est donc bien le polynome cherché; en particularisant le facteur constant C, nous prendrons finalement, pour le dénominateur de la réduite de rang n du développement de $\varphi(x)$ en fraction continue, le polynome

$$Q_n(x) = \frac{x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha+1-\gamma}}{(\alpha, n)}\frac{d^n}{dx^n}[x^{\alpha+n-1}(1-x)^{\gamma+n-\alpha-1}].$$

8° Les polynomes $Q_n(x)$ qui s'introduisent ainsi dans le développement en fraction continue de la fonction $\frac{1}{x}F\left(\alpha, 1, \gamma, \frac{1}{x}\right)$ se ramènent par ailleurs à certains polynomes hypergéométriques remarquables découverts par Jacobi.

Celui-ci a montré, en effet, dans le même Mémoire, que le polynome hypergéométrique de degré n

$$\mathcal{F}_n(\alpha, \gamma, x) = F(-n, \alpha+n, \gamma, x)$$

peut se mettre sous la forme élégante

$$\mathcal{F}_n(\alpha, \gamma, x) = \frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}}{(\gamma, n)}\frac{d^n}{dx^n}[x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}].$$

Pour le démontrer, il suffit de développer la dérivée $n^{\text{ième}}$ par la formule de Leibnitz

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_n &= \frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}}{(\gamma, n)}\sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p\frac{(-n, p)}{(1, p)}\frac{(\gamma, n)}{(\gamma, p)}x^{\gamma+p-1}(\gamma-\alpha-n, p)(1-x)^{\alpha+n-\gamma-p}\\ &= (1-x)^n\sum_{p=0}^{p=n}\frac{(-n, p)(\gamma-\alpha-n, p)}{(\gamma, p)(1, p)}\left(\frac{x}{x-1}\right)^p\\ &= (1-x)^n F\left(-n, \gamma-\alpha-n, \gamma, \frac{x}{x-1}\right),\end{aligned}$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

d'où, en appliquant la transformation d'Euler (6),

$$\mathcal{F}_n = F(-n, \alpha + n, \gamma, x).$$

Ceci étant, on voit aisément que le polynome $Q_n(x)$ du paragraphe précédent s'exprime de la manière suivante par un polynome hypergéométrique de Jacobi

$$Q_n(x) = F(-n, \gamma + n - 1, \alpha, x) = \mathcal{F}_n(\gamma - 1, \alpha, x).$$

Les polynomes hypergéométriques de Jacobi possèdent plusieurs propriétés intéressantes, *notamment ils forment une suite de fonctions orthogonales* par rapport à la fonction $x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}$; on a, en effet,

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\mathcal{F}_m\mathcal{F}_n\,dx = 0 \qquad (m \neq n),$$

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\mathcal{F}_n^2\,dx = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+1-\gamma)}{\Gamma(\alpha)}\,\frac{(\alpha+1-\gamma, n)}{(\alpha, n)(\gamma, n)}\,\frac{(1, n)}{\alpha+2n}.$$

Car une suite d'intégrations par parties donne

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}f(x)\mathcal{F}_n\,dx = \frac{1}{(\gamma, n)}\int_0^1 f(x)\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}\right]dx$$

$$= \frac{(-1)^n}{(\gamma, n)}\int_0^1 x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}\frac{d^n f}{dx^n}\,dx.$$

Donc en particulier si $f(x)$ est un polynome de degré inférieur à n,

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}f(x)\mathcal{F}_n\,dx = 0.$$

et si $f(x)$ est un polynome de degré n, dont le terme en x^n a comme coefficient $\frac{A}{(1, n)}$,

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}f(x)\mathcal{F}_n\,dx = (-1)^n\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+1-\gamma)}{\Gamma(\alpha)}\,\frac{(\alpha+1-\gamma, n)}{(\alpha, 2n+1)}A.$$

La propriété d'orthogonalité en résulte immédiatement.

9° Nous achèverons cette rapide revue des propriétés de la fonction hypergéométrique en reproduisant son expression par une intégrale prise le long d'un contour complexe, telle qu'elle a été donnée par MM. Pincherle (1), Mellin (2), Barnes (3). La formule de Barnes s'écrit

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{+\infty i}\frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)}{\Gamma(\gamma+s)}\Gamma(-s)(-x)^s\,ds.$$

La fonction qui figure sous le signe somme est une fonction uniforme de la variable com-

(1) S. Pincherle, *Rend. Acad. Lincei*, 4e série, t. IV, 1888, p. 694-700 et p. 792-799.
(2) Hj. Mellin, *Acta Soc. Scientiarum Fennicæ*, t. XX, 1895, n° 12.
(3) E.-W. Barnes, *Proc. London Math. Soc.*, 2e série, t. VI, 1908, p. 141-177.

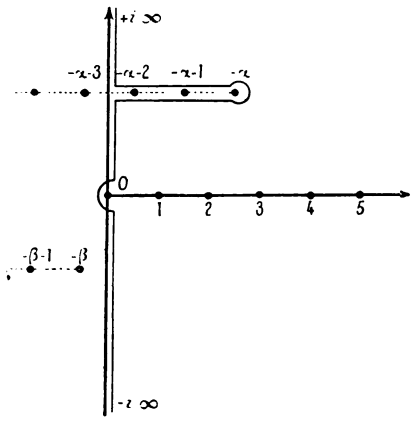
Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

plexe s qui possède comme pôles simples

$$\begin{aligned}
&\text{les pôles de } \Gamma(-s) &&: s = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots \\
&\text{les pôles de } \Gamma(\alpha + s) &&: s = -\alpha, -\alpha - 1, \ldots, -\alpha - n, \ldots \\
&\text{les pôles de } \Gamma(\beta + s) &&: s = -\beta, -\beta - 1, \ldots, -\beta - n, \ldots
\end{aligned}$$

Quant au chemin d'intégration [1], il se compose de l'axe des quantités purement imaginaires

Fig. 2.



depuis $-i\infty$ jusqu'à $+i\infty$ et de lacets combinés de manière à laisser à sa droite les pôles de $\Gamma(-s)$ et à sa gauche les pôles de $\Gamma(\alpha + s)$ et $\Gamma(\beta + s)$.

L'intégrale de Barnes représente une fonction uniforme de x dans tout le plan de la variable complexe x, une fois qu'on y a tracé comme coupure le segment $(0 - +\infty)$ de l'axe réel; en outre, à l'intérieur du cercle $|x| = 1$, l'intégrale est développable en une série procédant selon les puissances de x et coïncidant avec la série hypergéométrique. Pour le démontrer, il suffit d'appliquer le théorème de Cauchy à l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Gamma(\alpha + s)\,\Gamma(\beta + s)}{\Gamma(\gamma + s)}\,\Gamma(-s)(-x)^s\,ds,$$

le contour C étant composé :

1° Du segment $-i\left(n + \frac{1}{2}\right)$, $+i\left(n + \frac{1}{2}\right)$ (n entier positif) de l'axe imaginaire complété par des lacets de manière à laisser à sa droite les pôles de $\Gamma(s)$ et à sa gauche ceux de $\Gamma(\alpha + s)$ et $\Gamma(\beta + s)$;

2° De la demi-circonférence de centre O et de rayon $n + \frac{1}{2}$ située à droite de l'axe imaginaire.

A l'intérieur de ce contour C, la fonction possède les $(n + 1)$ pôles simples

$$0, 1, \ldots, n.$$

[1] La figure a été tracée en supposant

$$\mathcal{R}(-\beta) < 0, \qquad 2 < \mathcal{R}(-\alpha) < 3.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Le résidu relatif au pôle $s = k$, a pour valeur

$$\frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\gamma+k)\Gamma(1+k)}x^k,$$

car

$$\Gamma(-s) = \frac{\pi}{\Gamma(1+s)\sin s\pi} = \frac{(-1)^k}{\Gamma(1+s)}\frac{\pi(s-k)}{\sin\pi(s-k)}\frac{1}{s-k},$$

$$\lim_{s=k}[(s-k)\Gamma(-s)] = \frac{(-1)^k}{\Gamma(1+k)},$$

d'où

$$\lim_{s=k}\left[(s-k)\frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)}{\Gamma(\gamma+s)}\Gamma(-s)(-x)^s\right] = \frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\gamma+k)\Gamma(1+k)}x^k.$$

Ceci étant quand n augmente indéfiniment, l'intégrale prise le long de la demi-circonférence tend vers zéro, la somme des résidus tend vers la série hypergéométrique multipliée par $\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)}$ et, à la limite, on obtient la formule de Barnes.

Cette formule est valable tant que α ou β n'est pas un entier négatif, auquel cas F se réduit à un polynome. On peut en déduire simplement la plupart des propriétés de la fonction hypergéométrique, notamment ses formules de transformation [1].

II. — Définition des quatre séries hypergéométriques de deux variables.

Considérons les deux séries hypergéométriques

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) \quad \text{et} \quad F(\alpha', \beta', \gamma', y).$$

Si nous formons leur produit, nous obtiendrons une série double dépendant des deux variables x et y, dont le terme général aura pour expression

$$\frac{(\alpha, m)(\alpha', n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)}x^m y^n.$$

Pour obtenir une série double, généralisant la série de Gauss et ne se décomposant plus en un produit d'une fonction de x par une fonction de y, nous modifierons le terme général de la manière suivante :

Nous remplacerons un, deux, ou trois des produits

$$(\alpha, m)(\alpha', n), \quad (\beta, m)(\beta', n), \quad (\gamma, m)(\gamma', n)$$

par les expressions correspondantes

$$(\alpha, m+n), \quad (\beta, m+n), \quad (\gamma, m+n).$$

Sur les cinq combinaisons possibles, nous écarterons celle-ci

$$\frac{(\alpha, m+n)(\beta, m+n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)}x^m y^n$$

---

[1] *Voir*, notamment, E.-T. Whittaker and G.-N. Watson (*Modern Analysis*, 3e édition, p. 281-296) qui exposent la théorie de la fonction hypergéométrique en partant de la formule de Barnes.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

qui est tout simplement le développement de la fonction

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x+y),$$

comme on s'en assure en remarquant que, dans la série double, l'ensemble des termes pour lesquels $m+n$ a une valeur donnée k est égal à

$$\frac{(\alpha, k)(\beta, k)}{(\gamma, k)(1, k)}(x+y)^k.$$

Les quatre combinaisons qui restent donnent les séries doubles définies par P. Appell [1]

$$(11) \qquad F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

$$(12) \qquad F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y) = \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

$$(13) \qquad F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha, m)(\alpha', n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

$$(14) \qquad F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y) = \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

où la sommation doit s'étendre à toutes les valeurs entières de m et n depuis zéro jusqu'à l'infini.

Dans ces séries doubles, on considère les éléments α, α', β, β', γ, γ' comme des paramètres, x et y comme des variables; ces paramètres et ces variables peuvent prendre des valeurs complexes; on doit seulement exclure pour γ et γ' les valeurs entières et négatives.

Dans la série F_3, on peut permuter les éléments α et β, α' et β'; de même dans la série F_4, les éléments α et β; de sorte que l'on a

$$\begin{aligned} F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y) &= F_3(\beta, \alpha', \alpha, \beta', \gamma, x, y), \\ &= F_3(\alpha, \beta', \beta, \alpha', \gamma, x, y), \\ &= F_3(\beta, \beta', \alpha, \alpha', \gamma, x, y), \\ F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y) &= F_4(\beta, \alpha, \gamma, \gamma', x, y). \end{aligned}$$

Il est clair que les quatre séries F se réduisent à des polynomes dans les cas suivants (p, r, s désignant trois entiers positifs quelconques) :

F_1 et F_2	1°	$\alpha = -p$	polynome de degré	p,
	2°	$\beta = -r$ et $\beta' = -s$	»	$r+s$.
F_3	1°	$\alpha = -r$ et $\alpha' = -s$	»	$r+s$,
	2°	$\alpha = -r$ et $\beta' = -s$	»	$r+s$,
	3°	$\alpha' = -r$ et $\beta = -s$	»	$r+s$,
	4°	$\beta = -r$ et $\beta' = -s$	»	$r+s$.
F_4	1°	$\alpha = -p$	»	p,
	2°	$\beta = -p$	»	p.

[1] P. Appell, *Comptes rendus*, t. XC, 1880, p. 296 et 731, et *Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables* (*Journ. de Math.*, 3e série, t. VIII, 1882, p. 173-216). La matière des chapitres suivants est, en grande partie, le développement de ce mémoire.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

On aperçoit immédiatement que pour des valeurs particulières des éléments α, α', β, β', γ, γ' ces quatre séries s'identifient avec des développements connus

$$\begin{aligned}
(1-x)^{-\beta}(1-y)^{-\beta'} &= F_1(\alpha, \beta, \beta', \alpha, x, y),\\
(1-x-y)^{-\alpha} &= F_2(\alpha, \beta, \beta', \beta, \beta', x, y),\\
(1-y)^{\beta-\alpha}(1-x-y)^{-\beta} &= F_2(\alpha, \beta, \beta', \alpha, \beta', x, y),\\
(1-x)^{\beta'-\alpha}(1-x-y)^{-\beta'} &= F_2(\alpha, \beta, \beta', \beta, \alpha, x, y),\\
\operatorname{Log}\frac{1}{1-x-y} &= x\,F_2(1, 1, \beta', 2, \beta', x, y) + y\,F_2(1, \beta, 1, \beta, 2, x, y),
\end{aligned}$$

.....

En ordonnant les quatre séries doubles par rapport à x, elles prennent la forme de séries simples dont les éléments sont des fonctions hypergéométriques de y :

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} F(\alpha+m, \beta', \gamma+m, y)x^m, \tag{15}$$

$$F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} F(\alpha+m, \beta', \gamma', y)x^m, \tag{16}$$

$$F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} F(\alpha', \beta', \gamma+m, y)x^m, \tag{17}$$

$$F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} F(\alpha+m, \beta+m, \gamma', y)x^m. \tag{18}$$

On obtient des expressions analogues en ordonnant les quatre séries doubles par rapport à y.

Sur les formules (15) à (18), il est aisé de mettre en évidence quelques cas élémentaires où les séries doubles se réduisent à la série de Gauss :

$$\begin{aligned}
F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, 0) &= F_1(\alpha, \beta, 0, \gamma, x, y) = F(\alpha, \beta, \gamma, x),\\
F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, 0, y) &= F_1(\alpha, 0, \beta', \gamma, x, y) = F(\alpha, \beta', \gamma, y);\\
F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, 0) &= F_2(\alpha, \beta, 0, \gamma, \gamma', x, y) = F(\alpha, \beta, \gamma, x),\\
F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', 0, y) &= F_2(\alpha, 0, \beta', \gamma, \gamma', x, y) = F(\alpha, \beta', \gamma', y);\\
F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, 0) &= F_3(\alpha, 0, \beta, \beta', \gamma, x, y) = F_3(\alpha, \alpha', \beta, 0, \gamma, x, y) = F(\alpha, \beta, \gamma, x),\\
F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, 0, y) &= F_3(0, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y) = F_3(\alpha, \alpha', 0, \beta', \gamma, x, y) = F(\alpha', \beta', \gamma, y);\\
F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, 0) &= F(\alpha, \beta, \gamma, x),\\
F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', 0, y) &= F(\alpha, \beta, \gamma', y).
\end{aligned}$$

III. — Domaine de convergence des séries doubles.

F_1. — Le terme général de la série F_1 est

$$\begin{aligned}
A_{m,n}x^m y^n &= \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n\\
&= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')} \frac{\Gamma(\alpha+m+n)\Gamma(\beta+m)\Gamma(\beta'+n)}{\Gamma(\gamma+m+n)\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)} x^m y^n.
\end{aligned}$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

En s'appuyant sur la formule de Stirling

$$\lim_{k=\infty} \Gamma(\lambda + k) = \sqrt{2\pi}\, k^{k+\lambda-\frac{1}{2}} e^{-k},$$

on voit que

$$\lim (m+n)^{\gamma-\alpha} m^{1-\beta} n^{1-\beta'} A_{m,n} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')} \qquad (m = n = \infty).$$

Soient

$$\mathcal{R}(\alpha) = \alpha_1, \qquad \mathcal{R}(\beta) = \beta_1, \qquad \mathcal{R}(\beta') = \beta'_1, \qquad \mathcal{R}(\gamma) = \gamma_1;$$

et N un nombre plus grand que le module de $\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma)} \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}$. Désignons, en outre, par a et b les modules respectifs de x et y. On aura, pour toutes les valeurs de m et n plus grandes que certains nombres déterminés m_1 et n_1,

$$|A_{m,n} x^m y^n| < \frac{N}{(m+n)^{\gamma_1-\alpha_1} m^{1-\beta_1} n^{1-\beta'_1}} a^m b^n,$$

d'où l'on conclut immédiatement que la série F_1 est convergente tant que a et b sont moindres que l'unité :

$$|x| < 1, \qquad |y| < 1.$$

On montre de même que, si a ou b est plus grand que l'unité, la série F_1 est divergente.

F_2. — Le terme général de la série F_2 est

$$A_{m,n} x^m y^n = \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

et l'on a

$$\lim (m+n)^{1-\alpha} m^{\gamma-\beta} n^{\gamma'-\beta'} \frac{1.2\ldots m.1.2\ldots n}{1.2\ldots m+n} A_{m,n} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\alpha)}.$$

Soient, comme précédemment, α_1, β_1, β'_1, γ_1, γ'_1 les parties réelles de α, β, β', γ, γ', et N un nombre plus grand que le module de

$$\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\alpha)}.$$

On a, à partir de valeurs déterminées suffisamment grandes de m et n,

$$|A_{m,n} x^m y^n| < N \frac{1.2\ldots m+n}{1.2\ldots m.1.2\ldots n} (m+n)^{\alpha_1-1} m^{\beta_1-\gamma_1} n^{\beta'_1-\gamma'_1} a^m b^n.$$

Soit ε un nombre positif plus grand que $\beta_1 - \gamma_1$, $\beta'_1 - \gamma'_1$; on a

$$m^{\beta_1-\gamma_1} n^{\beta'_1-\gamma'_1} < m^{\varepsilon} n^{\varepsilon} < \frac{(m+n)^{2\varepsilon}}{4^{\varepsilon}};$$

la série des modules a donc ses termes respectivement moindres que ceux de la série

$$\frac{N}{4^{\varepsilon}} \sum_{0}^{\infty} \frac{1.2\ldots m+n}{1.2\ldots m.1.2\ldots n} (m+n)^{2\varepsilon+\alpha_1-1} a^m b^n;$$

or cette dernière série peut s'écrire

$$\frac{N}{4^{\varepsilon}} \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \mu^{2\varepsilon+\alpha_1-1} (a+b)^{\mu}.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

et elle est convergente tant que

$$a + b < 1.$$

Donc la série F_2 est convergente tant que

$$|x| + |y| < 1.$$

On démontre, par une méthode analogue à la précédente, qu'elle est divergente si

$$|x| + |y| > 1.$$

F_3. — Le terme général de la série F_3 est

$$A_{m,n} x^m y^n = \frac{(\alpha, m)(\alpha', n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n.$$

On a

$$\lim m^{2-\alpha-\beta} n^{2-\alpha'-\beta'} (m+n)^{\gamma-1} \frac{1.2\ldots m+n}{1.2\ldots m.1.2\ldots n} A_{m,n} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha')\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')};$$

d'où l'on conclut, comme ci-dessus,

$$|A_{m,n} x^m y^n| < N m^{\alpha_1+\beta_1-2} n^{\alpha'_1+\beta'_1-2} (m+n)^{1-\gamma_1} \frac{1.2\ldots m.1.2\ldots n}{1.2\ldots m+n} a^m b^n,$$

et, comme

$$\frac{1.2\ldots m.1.2\ldots n}{1.2\ldots m+n} < 1,$$

$$|A_{m,n} x^m y^n| < N.m^{\alpha_1+\beta_1-2} n^{\alpha'_1+\beta'_1-2} (m+n)^{1-\gamma_1} a^m b^n;$$

la série F_3 est donc convergente lorsque a et b sont moindres que l'unité :

$$|x| < 1, \qquad |y| < 1.$$

Elle est divergente si a ou b est plus grand que l'unité, ainsi que l'on s'en assure facilement.

F_4. — Prenons enfin la série F_4 dont le terme général est

$$A_{m,n} x^m y^n = \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} x^m y^n;$$

on a, dans ce cas,

$$\lim (m+n)^{2-\alpha-\beta} m^{\gamma-1} n^{\gamma'-1} \left(\frac{1.2\ldots m.1.2\ldots n}{1.2\ldots m+n}\right)^2 A_{m,n} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}.$$

Soit encore ici N un nombre plus grand que le module de cette limite; à partir de certaines valeurs déterminées de m et n, on aura

$$|A_{m,n} x^m y^n| < N.(m+n)^{\alpha_1+\beta_1-2} m^{1-\gamma_1} n^{1-\gamma'_1} \left(\frac{1.2\ldots m+n}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}\right)^2 a^m b^n.$$

Soit ε un nombre positif plus grand que $1 - \gamma_1$ et $1 - \gamma'_1$; alors

$$m^{1-\gamma_1} n^{1-\gamma'_1} < m^{\varepsilon} n^{\varepsilon} \frac{(m+n)^{2\varepsilon}}{4^{\varepsilon}},$$

d'où

$$|A_{m,n} x^m y^n| < N \frac{1}{4^{\varepsilon}} (m+n)^{\alpha_1+\beta_1+2\varepsilon-2} \left(\frac{1.2\ldots m+n}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}\right)^2 a^m b^n.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

La série des modules est donc convergente en même temps que la série

$$\sum_{m,n} (m+n)^{\alpha_1+\beta_1+2z-2} \left(\frac{1.2\ldots m+n}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}\right)^2 a^m b^n.$$

Dans cette dernière série, groupons les termes pour lesquels $m+n=\mu$; elle devient

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \mu^{\alpha_1+\beta_1+2z-2} \left\{ a^\mu + \left(\frac{\mu}{1}\right)^2 a^{\mu-1} b + \left[\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\right]^2 a^{\mu-2} b^2 + \ldots + b^\mu \right\},$$

on voit immédiatement que le polynome entre parenthèses est moindre que

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{2\mu} = [(\sqrt{a}+\sqrt{b})^\mu]^2.$$

La série des modules est donc convergente en même temps que la série

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \mu^{\alpha_1+\beta_1+2z-2} (\sqrt{a}+\sqrt{b})^{2\mu},$$

laquelle est convergente tant que $\sqrt{a}+\sqrt{b}<1$. Donc la série F_4 est convergente si

$$|\sqrt{x}|+|\sqrt{y}|<1.$$

Cercles de convergence associés et domaine d'existence des quatre fonctions. — Dans les deux plans des variables complexes x et y traçons de l'origine comme centre deux cercles C et C′ de rayons respectifs R et R′; pour chacune des quatre séries hypergéométriques, choisissons de la manière suivante les deux nombres R et R′ :

pour F_1 : $R=1, \quad R'=1$;

pour F_2 : $R+R'=1$;

pour F_3 : $R=1, \quad R'=1$;

pour F_4 : $\sqrt{R}+\sqrt{R'}=1$.

Il est clair que les deux cercles C *et* C′ *ne sont entièrement déterminés que pour les séries* F_1 *et* F_3; *au contraire pour les deux séries* F_2 *et* F_4, *il existe une infinité de couples de cercles* C *et* C′ *acceptables*, puisque si l'on choisit arbitrairement un cercle C de rayon R plus petit que un, il existe toujours un cercle C′ de rayon R′ (également plus petit que un), tel que

(pour F_2) : $R'=1-R$;

(pour F_4) : $R'=(1-\sqrt{R})^2$.

Les deux cercles C et C′ ayant été tracés, on peut résumer les résultats acquis dans ce paragraphe, en disant que la série hypergéométrique correspondante converge lorsque les points représentatifs des variables x et y sont intérieurs respectivement à C et C′; elle diverge au contraire si un seul des deux points représentatifs est extérieur au cercle correspondant.

Les cercles C *et* C′ *forment un couple de cercles de convergence associés pour la série hypergéométrique correspondante.* — Pour les séries F_1 et F_3, il existe un seul couple de cercles de conver-

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

gence associés; mais le fait qu'il en existe une infinité pour F_2 et F_4 n'a rien de surprenant; on peut même dire que c'est la règle générale dans l'étude des séries doubles: ce fait se présente déjà pour le développement de $(1 - x - y)^{-1}$ qui admet une infinité de couples de cercles de convergence associés caractérisés par la condition

$$R + R' = 1.$$

La fonction hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, définie par la série de Gauss seulement à l'intérieur du cercle $|x| = 1$, peut être calculée en dehors de ce cercle par prolongement analytique et constitue une fonction uniforme de x dans tout le plan, une fois tracée la coupure $(1 - +\infty)$. De même, on peut prolonger analytiquement les quatre séries doubles hypergéométriques en dehors des cercles de convergence associés C et C' et parvenir, par cheminement à des valeurs quelconques de x et y. *Nous appellerons alors fonctions hypergéométriques de deux variables, les quatre fonctions définies à l'intérieur de* C *et* C' *par les quatre séries convergentes* (11), (12), (13), (14) *et à l'extérieur de* C *et* C' *par le prolongement analytique de ces séries.*

Pour rendre ces fonctions uniformes, il suffit de tracer certains systèmes de coupures; pour F_1 et F_3, par exemple, il faut prendre comme coupures les deux segments $(1 - +\infty)$ des axes réels des variables x et y.

Nous donnerons plus loin des expressions analytiques des quatre fonctions uniformes F_1, F_2, F_3, F_4 valables dans tout leur domaine d'existence.

IV. — Dérivées partielles des fonctions hypergéométriques. Fonctions contiguës.

En dérivant terme à terme les séries (11) à (14), on s'assure aisément que la dérivée partielle d'ordre p par rapport à x et q par rapport à y d'une des quatre fonctions F s'exprime par une fonction du même type de la manière suivante :

$$(19) \qquad \frac{\partial^{p+q} F_1}{\partial x^p \partial y^q} = \frac{(\alpha, p+q)(\beta, p)(\beta', q)}{(\gamma, p+q)} F_1(\alpha+p+q, \beta+p, \beta'+q, \gamma+p+q, x, y),$$

$$(20) \qquad \frac{\partial^{p+q} F_2}{\partial x^p \partial y^q} = \frac{(\alpha, p+q)(\beta, p)(\beta', q)}{(\gamma, p)(\gamma', q)} F_2(\alpha+p+q, \beta+p, \beta'+q, \gamma+p, \gamma'+q, x, y),$$

$$(21) \qquad \frac{\partial^{p+q} F_3}{\partial x^p \partial y^q} = \frac{(\alpha, p)(\alpha', q)(\beta, p)(\beta', q)}{(\gamma, p+q)} F_3(\alpha+p, \alpha'+q, \beta+p, \beta'+q, \gamma+p+q, x, y),$$

$$(22) \qquad \frac{\partial^{p+q} F_4}{\partial x^p \partial y^q} = \frac{(\alpha, p+q)(\beta, p+q)}{(\gamma, p)(\gamma', q)} F_4(\alpha+p+q, \beta+p+q, \gamma+p, \gamma'+q, x, y).$$

Deux fonctions hypergéométriques du même type caractérisées respectivement par les éléments α, α', β, β', γ, γ' et α_1, α'_1, β_1, β'_1, γ_1, γ'_1 sont dites *contiguës* lorsqu'une des différences $\alpha_1 - \alpha$, $\alpha'_1 - \alpha'$, $\beta_1 - \beta$, $\beta'_1 - \beta'$, $\gamma_1 - \gamma$, $\gamma'_1 - \gamma'$ est égale à ± 1, les autres étant nulles. Les fonctions F_1, F_2, F_3, F_4 admettent respectivement 8, 10, 10, 8 fonctions contiguës.

Quatre fonctions F_1 ou F_2 contiguës sont liées par une relation linéaire; de même trois fonctions F_3 ou F_4 contiguës.

Entre trois des huit fonctions :

$$F_1(\alpha+1, \beta, \beta', \gamma, x, y); \quad F_1(\alpha, \beta+1, \beta', \gamma, x, y); \quad F_1(\alpha, \beta, \beta'+1, \gamma, x, y); \quad F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma+1, x, y);$$
$$F_1(\alpha-1, \beta, \beta', \gamma, x, y); \quad F_1(\alpha, \beta-1, \beta', \gamma, x, y); \quad F_1(\alpha, \beta, \beta'-1, \gamma, x, y); \quad F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma-1, x, y).$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

contiguës à $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$ et cette fonction elle-même, il y a ainsi $\frac{8.7.6}{1.2.3} = 56$ relations linéaires les coefficients étant rationnels en x et y.

De même entre trois des dix fonctions contiguës à $F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y)$ et cette fonction elle-même, il y a $\frac{10.9.8}{1.2.3} = 120$ relations linéaires. Entre deux des dix fonctions contiguës à $F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y)$ et cette fonction elle-même, il y a $\frac{10.9}{1.2} = 45$ relations linéaires. Entre deux des huit fonctions contiguës à $F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y)$ et cette fonction elle-même, il y a $\frac{8.7}{1.2} = 28$ relations linéaires.

Voici, par exemple, les équations entre fonctions contiguës que l'on peut faire correspondre à la relation

$$\alpha F(\alpha+1, \beta, \gamma, x) - \beta F(\alpha, \beta+1, \gamma, x) = (\alpha - \beta) F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

donnée par Gauss [1] :

$$\alpha F_1(\alpha+1, \beta, \beta', \gamma, x, y) - \beta F_1(\alpha, \beta+1, \beta', \gamma, x, y) - \beta' F_1(\alpha, \beta, \beta'+1, \gamma, x, y)$$
$$= (\alpha - \beta - \beta') F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) \quad [2];$$

$$\alpha F_2(\alpha+1, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y) - \beta F_2(\alpha, \beta+1, \beta', \gamma, \gamma', x, y) - \beta' F_2(\alpha, \beta, \beta'+1, \gamma, \gamma', x, y)$$
$$= (\alpha - \beta - \beta') F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y);$$

$$\alpha F_3(\alpha+1, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y) - \beta F_3(\alpha, \alpha', \beta+1, \beta', \gamma, x, y) = (\alpha - \beta) F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y),$$

$$\alpha' F_3(\alpha, \alpha'+1, \beta, \beta', \gamma, x, y) - \beta' F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta'+1, \gamma, x, y) = (\alpha' - \beta') F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y);$$

$$\alpha F_4(\alpha+1, \beta, \gamma, \gamma', x, y) - \beta F_4(\alpha, \beta+1, \gamma, \gamma', x, y) = (\alpha - \beta) F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y).$$

De même entre quatre fonctions F_1 ou F_2 et trois fonctions F_3 ou F_4 dont les éléments sont de la forme $\alpha + \lambda$, $\alpha' + \lambda'$, $\beta + \mu$, $\beta' + \mu'$, $\gamma + \nu$, $\gamma' + \nu'$: λ, λ', μ, μ', ν, ν' pouvant prendre une des valeurs -1, 0, 1 existe une relation linéaire.

Par exemple, à la relation [3]

$$\frac{\beta}{\gamma} x F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x) = F(\alpha+1, \beta, \gamma, x) - F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

---

[1] Gauss, *Werke*, t. III, p. 130, formule (2).

[2] Il est intéressant de remarquer que dans les relations entre fonctions F_1 contiguës le nombre des fonctions qui y figurent, qui est en général de quatre, s'abaisse dans certains cas exceptionnels à trois. Ainsi on a, par exemple :

$$\alpha F_1(\alpha+1, \beta, \beta', \gamma, x, y) = (\gamma - 1) F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma - 1, x, y) + (\alpha + 1 - \gamma) F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y),$$
$$(\gamma - \alpha) x F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma+1, x, y) = \gamma F_1(\alpha, \beta - 1, \beta', \gamma, x, y) + \gamma(x - 1) F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y),$$
$$(\gamma - \alpha) y F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma+1, x, y) = \gamma F_1(\alpha, \beta, \beta' - 1, \gamma, x, y) + \gamma(y - 1) F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y),$$

. . . . . .

[3] Gauss, *Werke*, t. III, p. 133, formule (18).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

correspondent, pour les fonctions de deux variables, les équations

$$\frac{\beta}{\gamma} x F_1(\alpha+1, \beta+1, \beta', \gamma+1, x, y) + \frac{\beta'}{\gamma} y F_1(\alpha+1, \beta, \beta'+1, \gamma+1, x, y)$$
$$= F_1(\alpha+1, \beta, \beta', \gamma, x, y) - F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y);$$

$$\frac{\beta}{\gamma} x F_2(\alpha+1, \beta+1, \beta', \gamma+1, \gamma', x, y) + \frac{\beta'}{\gamma'} y F_2(\alpha+1, \beta, \beta'+1, \gamma, \gamma'+1, x, y)$$
$$= F_2(\alpha+1, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y) - F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y);$$

$$\frac{\beta}{\gamma} x F_3(\alpha+1, \alpha', \beta+1, \beta', \gamma+1, x, y) = F_3(\alpha+1, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y) - F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y),$$

$$\frac{\beta'}{\gamma} y F_3(\alpha, \alpha'+1, \beta, \beta'+1, \gamma+1, x, y) = F_3(\alpha, \alpha'+1, \beta, \beta', \gamma, x, y) - F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y);$$

$$\frac{\beta}{\gamma} x F_4(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, \gamma', x, y) + \frac{\beta}{\gamma'} y F_4(\alpha+1, \beta+1, \gamma, \gamma'+1, x, y)$$
$$= F_4(\alpha+1, \beta, \gamma, \gamma', x, y) - F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y).$$

Les fonctions contiguës à une fonction F donnée s'expriment linéairement au moyen de cette fonction F et de ses dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$.

Par exemple les huit fonctions contiguës à la fonction F_1 s'expriment de la manière suivante [1] :

$$\alpha F_1(\alpha+1, \beta, \beta', \gamma, x, y) = \alpha F_1 + x\frac{\partial F_1}{\partial x} + y\frac{\partial F_1}{\partial y},$$
$$\beta F_1(\alpha, \beta+1, \beta', \gamma, x, y) = \beta F_1 + x\frac{\partial F_1}{\partial x},$$
$$\beta' F_1(\alpha, \beta, \beta'+1, \gamma, x, y) = \beta' F_1 + y\frac{\partial F_1}{\partial y};$$

$$(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta-\beta') F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma+1, x, y) = (\gamma-\alpha-\beta-\beta')\gamma F_1 + \gamma(1-x)\frac{\partial F_1}{\partial x} + \gamma(1-y)\frac{\partial F_1}{\partial y},$$
$$(\gamma-\alpha) F_1(\alpha-1, \beta, \beta', \gamma, x, y) = (\gamma-\alpha-\beta x-\beta' y) F_1 + x(1-x)\frac{\partial F_1}{\partial x} + y(1-y)\frac{\partial F_1}{\partial y},$$
$$(\gamma-\beta-\beta') F_1(\alpha, \beta-1, \beta', \gamma, x, y) = (\gamma-\beta-\beta'-\alpha x) F_1 + x(1-x)\frac{\partial F_1}{\partial x} + x(1-y)\frac{\partial F_1}{\partial y},$$
$$(\gamma-\beta-\beta') F_1(\alpha, \beta, \beta'-1, \gamma, x, y) = (\gamma-\beta-\beta'-\alpha y) F_1 + y(1-x)\frac{\partial F_1}{\partial x} + y(1-y)\frac{\partial F_1}{\partial y},$$
$$(\gamma-1) F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma-1, x, y) = (\gamma-1) F_1 + x\frac{\partial F_1}{\partial x} + y\frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

Cette propriété s'étend aux fonctions de la forme

$$F_1(\alpha+\lambda, \beta+\mu, \beta'+\mu', \gamma+\nu, x, y),$$

---

[1] Ces formules ont été données par M. R. Le Vavasseur : *Sur le système d'équations aux dérivées partielles simultanées auxquelles satisfait la série hypergéométrique de deux variables* $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$. Thèse (Paris, 1893), p. 8 et p. 11 et 12.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

λ, μ, μ', ν désignant quatre entiers quelconques positifs ou négatifs, par exemple

$$\alpha(\gamma-\beta-\beta')F_1(\alpha+1,\beta,\beta',\gamma+1,x,y)=\alpha\gamma F_1-\gamma(1-x)\frac{\partial F_1}{\partial x}-\gamma(1-y)\frac{\partial F_1}{\partial y},$$

$$\beta\beta'(x-y)F_1(\alpha,\beta+1,\beta'+1,\gamma,x,y)=\beta\beta'(x-y)F_1+\beta' x^2\frac{\partial F_1}{\partial x}-\beta y^2\frac{\partial F_1}{\partial y},$$

$$\beta' F_1(\alpha,\beta-1,\beta'+1,\gamma,x,y)=\beta' F_1+(y-x)\frac{\partial F_1}{\partial y},$$

$$\beta F_1(\alpha,\beta+1,\beta'-1,\gamma,x,y)=\beta F_1+(x-y)\frac{\partial F_1}{\partial x},$$

$$\alpha\beta(1-x)F_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\gamma,x,y)=\alpha\beta F_1+(\alpha+\beta-\gamma+1)x\frac{\partial F_1}{\partial x}+\beta y\frac{\partial F_1}{\partial y};$$

$$\alpha\beta'(1-y)F_1(\alpha+1,\beta,\beta'+1,\gamma,x,y)=\alpha\beta' F_1+\beta' x\frac{\partial F_1}{\partial x}+(\alpha+\beta'-\gamma+1)y\frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

Pour vérifier toutes ces formules, ainsi que les relations entre fonctions contiguës, il suffit d'y remplacer les fonctions hypergéométriques par leur développement en série double et de constater que, dans les deux membres, les coefficients de $x^m y^n$ sont égaux, quels que soient m et n.

V. — Formules de réduction et de transformation des quatre fonctions hypergéométriques.

En dehors des cas signalés à la fin du paragraphe II, où les séries hypergéométriques F_1, F_2, F_3, F_4 se réduisent à la série de Gauss, il existe encore d'autres cas de réduction moins évidents.

Prenons, par exemple, la fonction F_1 sous la forme (15) et faisons $y=1$; on a, d'après (5), en supposant $\mathcal{R}(\gamma-\alpha-\beta')>0$,

$$F(\alpha+m,\beta',\gamma+m,1)=\frac{\Gamma(\gamma+m)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta')}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta'+m)}=\frac{(\gamma,m)}{(\gamma-\beta',m)}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta')}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta')},$$

d'où l'on conclut

$$F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma,x,1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta')}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta')}F(\alpha,\beta,\gamma-\beta',x). \tag{23}$$

En particulier, si dans cette formule on fait encore $x=1$, on obtient (en supposant que $\mathcal{R}(\gamma-\alpha-\beta-\beta')>0$)

$$F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma,1,1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta-\beta')}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta-\beta')}. \tag{24}$$

La série F_1 *se réduit encore à la série* F *quand* $y=x$; pour le montrer, faisons $y=tx$; on a, en ordonnant la série double (11) par rapport aux puissances de x,

$$F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma,x,tx)=\sum_{n=0}^{n=+\infty}\frac{(\alpha,n)(\beta,n)}{(\gamma,n)(1,n)}F(-n,\beta',-\beta-n+1,t)x^n.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

La fonction F qui figure dans le coefficient de x^n est un polynome. Si l'on fait $t = 1$, on a

$$F(-n, \beta', -\beta - n + 1, 1) = \frac{(\beta + \beta', n)}{(\beta, n)},$$

Donc

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, x) = F(\alpha, \beta + \beta', \gamma, x). \tag{25}$$

Voici un exemple relatif à la fonction F_2; faisons dans la formule (16) $\beta' = \gamma'$, nous pouvons écrire

$$F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \beta', x, y) = \sum \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)}(1-y)^{-\alpha-m}x^m = (1-y)^{-\alpha} F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{1-y}\right).$$

De même, en échangeant le rôle de x et y,

$$F_2(\alpha, \beta, \beta', \beta, \gamma', x, y) = (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \beta', \gamma', \frac{y}{1-x}\right).$$

La fonction F_2 *se ramène donc à la fonction de Gauss chaque fois que* $\beta = \gamma$ *ou* $\beta' = \gamma'$.

Pour donner un exemple élémentaire relatif à la fonction F_4, partons de la formule établie par Gauss [1] :

$$(1+x)^n + (1-x)^n = 2F\left(-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right).$$

On en tire

$$F\left(\alpha + m, \alpha + m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, y\right) = \frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{y})^{-2\alpha-2m} + (1-\sqrt{y})^{-2\alpha-2m}\right].$$

Transportons cette valeur dans l'expression (18) de F_4 :

$$F_4\left(\alpha, \alpha + \frac{1}{2}, \gamma, \frac{1}{2}, x, y\right) = \frac{1}{2}\sum \frac{(\alpha, m)\left(\alpha + \frac{1}{2}, m\right)}{(\gamma, m)(1, m)}\left[(1+\sqrt{y})^{-2\alpha-2m} + (1-\sqrt{y})^{-2\alpha-2m}\right]x^m.$$

D'où une formule de réduction de la fonction F_4 à une somme de deux fonctions de Gauss :

$$\begin{aligned} F_4\left(\alpha, \alpha + \frac{1}{2}, \gamma, \frac{1}{2}, x, y\right) = {} & \frac{1}{2}(1+\sqrt{y})^{-2\alpha} F\left[\alpha, \alpha + \frac{1}{2}, \gamma, \frac{x}{(1+\sqrt{y})^2}\right] \\ & + \frac{1}{2}(1-\sqrt{y})^{-2\alpha} F\left[\alpha, \alpha + \frac{1}{2}, \gamma, \frac{x}{(1-\sqrt{y})^2}\right]. \end{aligned}$$

Pour obtenir d'autres formules de transformation et de réduction des quatre fonctions hypergéométriques, nous partirons des formules (15), (16), (17), (18), donnant leur expression sous forme de séries simples, auxquelles nous joindrons la suivante :

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x + y) = \sum_{m=0}^{m=+\infty} \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} F(\alpha + m, \beta + m, \gamma + m, y)x^m. \tag{26}$$

Aux fonctions F qui figurent dans ces cinq séries, appliquons successivement les trois formules de transformation d Euler (6).

---

[1] Gauss, *Werke*, t. III, équation (2), p. 127.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Nous déduisons ainsi de la série (15)

$$(27)\quad F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} (1-y)^{-\alpha-m} F\left(\alpha+m, \gamma-\beta'+m, \gamma+m, \frac{y}{y-1}\right) x^m,$$

$$(27')\quad = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} (1-y)^{-\beta'} F\left(\gamma-\alpha, \beta', \gamma+m, \frac{y}{y-1}\right) x^m,$$

$$(27'')\quad = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta'+m, \gamma+m, y) x^m.$$

En rapprochant la série (27) de la série (26), on voit de suite qu'elle peut s'identifier avec elle si l'on a

$$\gamma - \beta' = \beta.$$

D'où la formule de réduction

$$(28)\quad F_1(\alpha, \beta, \beta', \beta+\beta', x, y) = (1-y)^{-\alpha} F\left(\alpha, \beta, \beta+\beta', \frac{y-x}{y-1}\right)$$

qui ramène la fonction F_1 *à la fonction de Gauss, toutes les fois que*

$$\gamma = \beta + \beta'.$$

De même, la série (27′) s'identifie avec le série (17) en posant

$$\gamma - \alpha = \alpha',$$

d'où

$$(29)\quad F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = (1-y)^{-\beta'} F_3\left(\alpha, \gamma-\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, \frac{y}{y-1}\right).$$

Cette relation montre que la fonction F_1 *se ramène toujours à la fonction* F_3.

En échangeant le rôle de x et de y, on obtient la formule symétrique

$$(29')\quad F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = (1-x)^{-\beta} F_3\left(\alpha, \gamma-\alpha, \beta, \beta', \gamma, \frac{x}{x-1}, y\right).$$

L'application des formules de transformation d'Euler à la série (16) nous donne de même

$$(30)\quad F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} (1-y)^{-\alpha-m} F\left(\alpha+m, \gamma'-\beta', \gamma', \frac{y}{y-1}\right) x^m,$$

$$(30')\quad = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} (1-y)^{-\beta'} F\left(\gamma'-\alpha-m, \beta', \gamma', \frac{y}{y-1}\right) x^m,$$

$$(30'')\quad = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} (1-y)^{\gamma'-\alpha-\beta'-m} F(\gamma'-\alpha-m, \gamma'-\beta', \gamma', y) x^m.$$

Les deux séries (30′) et (30″) contenant des fonctions F où le premier élément dépend négativement de l'entier m ne sont pas du même type que les séries (15) à (18) et ne nous donnent

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

aucune formule de réduction; quant à la série (30), elle ne se distingue de (16) que par l'échange de β' en $\gamma' - \beta'$ et nous fournit la relation

$$(31)\qquad F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y) = (1-y)^{-\alpha} F_2\left(\alpha, \beta, \gamma'-\beta', \gamma, \gamma', \frac{x}{1-y}, \frac{y}{y-1}\right).$$

On en déduit par symétrie

$$(31')\qquad F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y) = (1-x)^{-\alpha} F_2\left(\alpha, \gamma-\beta, \beta', \gamma, \gamma', \frac{x}{x-1}, \frac{y}{1-x}\right),$$

et, en combinant ces deux formules,

$$(32)\qquad \begin{aligned} &F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y) \\ &\quad = (1-x-y)^{-\alpha} F_2\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma'-\beta', \gamma, \gamma', \frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1}\right). \end{aligned}$$

Les relations (31), (31') et (32) constituent, en quelque sorte, l'extension de la formule d'Euler à la fonction F_2.

•

En appliquant encore la transformation d'Euler à la série (17), nous obtenons

$$(33)\qquad F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} (1-y)^{-\alpha'} F\left(\alpha', \gamma-\beta'+m, \gamma+m, \frac{y}{y-1}\right) x^m,$$

$$(33')\qquad = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} (1-y)^{-\beta'} F\left(\gamma-\alpha'+m, \beta', \gamma+m, \frac{y}{y-1}\right) x^m,$$

$$(33'')\qquad = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} (1-y)^{\gamma+m-\alpha'-\beta'} F(\gamma-\alpha'+m, \gamma-\beta'+m, \gamma+m, y) x^m$$

La série (33') s'identifie avec la série (15) si l'on suppose que $\gamma - \alpha' = \alpha$, ce qui donne

$$(34)\qquad F_3(\alpha, \gamma-\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = (1-y)^{-\beta'} F_1\left(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, \frac{y}{y-1}\right).$$

Cette formule constitue simplement la réciproque de la formule (29) qui ramène F_1 à F_3; on tire de même de (33)

$$(34')\qquad F_3(\alpha, \alpha', \beta, \gamma-\beta, \gamma, x, y) = (1-y)^{-\alpha'} F_1\left(\beta, \alpha, \alpha', \gamma, x, \frac{y}{y-1}\right).$$

Enfin la série (33'') s'identifie avec la série (26) si l'on a $\gamma - \alpha' = \alpha$ et $\gamma - \beta' = \beta$; donc, *quand*

$$\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma,$$

la fonction F_3 *se ramène à la fonction de Gauss*, et l'on a

$$(35)\qquad F_3(\alpha, \gamma-\alpha, \beta, \gamma-\beta, \gamma, x, y) = (1-y)^{\alpha+\beta-\gamma} F[\alpha, \beta, \gamma, 1-(1-x)(1-y)].$$

L'application de la transformation d'Euler à la série (18) conduit à des fonctions F dont les éléments dépendent négativement de l'entier m; ces séries ne se ramènent donc à aucune des séries (15) à (18).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Au lieu d'employer la formule d'Euler, on peut aussi partir d'une des nombreuses relations qui unissent trois à trois les vingt-quatre intégrales de l'équation de Gauss (I, 6°); en suivant une marche identique à la précédente, on obtient ainsi de nouvelles formules de transformation pour les fonctions hypergéométriques de deux variables.

Considérons, par exemple, la relation (10′) qui s'écrit [1]

$$(36)\qquad \begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, x) = {} & \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\beta)}(-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \frac{1}{x}\right) \\ & + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}(-x)^{-\beta} F\left(\beta+1-\gamma, \beta, \beta+1-\alpha, \frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Appliquons cette transformation au développement de F_4 sous la forme (18) :

$$\begin{aligned} F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y) = {} & \sum \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} \frac{\Gamma(\gamma')\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma'-\alpha-m)\Gamma(\beta+m)}(-y)^{-\alpha-m} \\ & \times F\left(\alpha+m, \alpha+m+1-\gamma', \alpha+1-\beta, \frac{1}{y}\right) x^m \\ & + \sum \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} \frac{\Gamma(\gamma')\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha+m)\Gamma(\gamma'-\beta-m)}(-y)^{-\beta-m} \\ & \times F\left(\beta+m+1-\gamma', \beta+m, \beta+1-\alpha, \frac{1}{y}\right) x^m \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y) = {} & \frac{\Gamma(\gamma')\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma'-\alpha)\Gamma(\beta)}(-y)^{-\alpha} \sum \frac{(\alpha, m)(\alpha+1-\gamma', m)}{(\gamma, m)(1, m)} \\ & \times F\left(\alpha+m, \alpha+1-\gamma'+m, \alpha+1-\beta, \frac{1}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)^m \\ & + \frac{\Gamma(\gamma')\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma'-\beta)}(-y)^{-\beta} \sum \frac{(\beta+1-\gamma', m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} \\ & \times F\left(\beta+1-\gamma'+m, \beta+m, \beta+1-\alpha, \frac{1}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)^m, \end{aligned}$$

d'où finalement, en rapprochant ces développements de (18),

$$(37)\qquad \begin{aligned} F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y) = {} & \frac{\Gamma(\gamma')\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma'-\alpha)\Gamma(\beta)}(-y)^{-\alpha} F_4\left(\alpha, \alpha+1-\gamma', \gamma, \alpha+1-\beta, \frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right) \\ & + \frac{\Gamma(\gamma')\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma'-\beta)}(-y)^{-\beta} F_4\left(\beta+1-\gamma', \beta, \gamma, \beta+1-\alpha, \frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right). \end{aligned}$$

On obtient une formule symétrique de celle-là en y échangeant le rôle de x et y et de γ et γ'.

En s'appuyant enfin sur certaines des relations, données en grand nombre par Gauss et Kummer, entre fonctions hypergéométriques dont les éléments α, β, γ ont des valeurs spéciales, on obtient, toujours par la même méthode, des relations entre fonctions F_1, F_2, F_3, F_4 correspondant à des valeurs spéciales de α, α', β, β', γ, γ'.

Considérons, pour donner un exemple, une des formules de Gauss [2] :

$$(38)\qquad F\left(\alpha, \alpha+\frac{1}{2}-\beta, \beta+\frac{1}{2}, x\right) = (1+\sqrt{x})^{-2\alpha} F\left(\alpha, \beta, 2\beta, \frac{4\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}\right).$$

---

[1] Gauss, *Werke*, t. III, équation (93), p. 220.

[2] Gauss, *Werke*, t. III, équation (101), p. 225.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

On a, d'après la formule (18),

$$F_4\left(\alpha, \alpha+\frac{1}{2}-\beta, \gamma, \beta+\frac{1}{2}, x, y\right) = \sum \frac{(\alpha, m)\left(\alpha+\frac{1}{2}-\beta, m\right)}{(\gamma, m)(1, m)} F\left(\alpha+m, \alpha+\frac{1}{2}-\beta+m, \beta+\frac{1}{2}, y\right) x^m;$$

d'où, en appliquant la relation (38),

$$F\left(\alpha, \alpha+\frac{1}{2}-\beta, \gamma, \beta+\frac{1}{2}, x, y\right)$$
$$= \sum \frac{(\alpha, m)\left(\alpha+\frac{1}{2}-\beta, m\right)}{(\gamma, m)(1, m)} F\left(\alpha+m, \beta, 2\beta, \frac{4\sqrt{y}}{(1+\sqrt{y})^2}\right) \frac{x^m}{(1+\sqrt{y})^{2\alpha+2m}}.$$

En rapprochant ce développement de (16), on en tire

$$F_4\left(\alpha, \alpha+\frac{1}{2}-\beta, \gamma, \beta+\frac{1}{2}, x, y\right) = (1+\sqrt{y})^{-2\alpha} F_2\left(\alpha, \alpha+\frac{1}{2}-\beta, \beta, \gamma, 2\beta, \frac{x}{(1+\sqrt{y})^2}, \frac{4\sqrt{y}}{(1+\sqrt{y})^2}\right).$$

On pourrait multiplier de tels exemples; beaucoup des formules que l'on obtient ainsi conduisent à de nouveaux cas de réduction des fonctions hypergéométriques de deux variables à $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$; tel est le cas de la formule précédente quand on y fait $\beta = 0$.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

CHAPITRE II.

REPRESENTATION DES FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES PAR DES INTÉGRALES DÉFINIES.

VI. — Expression des fonctions F_1, F_2, F_3 par des intégrales définies.

Les quatre séries doubles (11, 12, 13, 14, — II) [1] ne définissent les fonctions hypergéométriques qu'à l'intérieur des cercles de convergence associés; on peut donc se proposer de rechercher des expressions analytiques représentant ces fonctions dans tout leur domaine d'existence. On obtient ce résultat pour F_1, F_2, F_3 en les exprimant par des intégrales doubles qui généralisent l'expression (3, — I) de $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

On a en effet

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma-\beta-\beta')}{\Gamma(\gamma)} F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) \\ &= \iint u^{\beta-1} v^{\beta'-1} (1-u-v)^{\gamma-\beta-\beta'-1} (1-ux-vy)^{-\alpha}\, du\, dv \\ &\qquad (u \geqq 0,\ v \geqq 0,\ 1-u-v \geqq 0). \end{aligned}\right.$$

l'intégrale double ayant un sens tant que $\mathcal{R}(\beta) > 0$, $\mathcal{R}(\beta') > 0$, $\mathcal{R}(\gamma-\beta-\beta') > 0$;

$$(2)\quad \begin{aligned} &\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\gamma'-\beta')}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')} F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 u^{\beta-1} v^{\beta'-1} (1-u)^{\gamma-\beta-1} (1-v)^{\gamma'-\beta'-1} (1-ux-vy)^{-\alpha}\, du\, dv, \end{aligned}$$

l'intégrale double ayant un sens tant que $\mathcal{R}(\beta) > 0$, $\mathcal{R}(\beta') > 0$, $\mathcal{R}(\gamma-\beta) > 0$, $\mathcal{R}(\gamma'-\beta') > 0$;

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma-\beta-\beta')}{\Gamma(\gamma)} F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y) \\ &= \iint u^{\beta-1} v^{\beta'-1} (1-u-v)^{\gamma-\beta-\beta'-1} (1-ux)^{-\alpha} (1-vy)^{-\alpha'}\, du\, dv \\ &\qquad (u \geqq 0,\ v \geqq 0,\ 1-u-v > 0). \end{aligned}\right.$$

l'intégrale double ayant un sens tant que $\mathcal{R}(\beta) > 0$, $\mathcal{R}(\beta') > 0$, $\mathcal{R}(\gamma-\beta-\beta') > 0$.

---

[1] Dans le cours d'un chapitre les formules sont numérotées (1), (2), ...; quand nous renvoyons à une formule contenue dans un chapitre précédent, nous faisons suivre son numéro de celui du paragraphe où elle se trouve; quant aux paragraphes, ils sont numérotés d'une façon continue dans tout le cours de l'ouvrage.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

La fonction F_1 peut aussi, comme l'a montré M. E. Picard [1], s'exprimer par une intégrale simple :

$$(4)\qquad \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'}\,du,$$

$$\mathcal{R}(\alpha) > 0, \qquad \mathcal{R}(\gamma-\alpha) > 0.$$

Pour démontrer ces résultats, il suffit de constater qu'à l'intérieur des cercles de convergence associés, les intégrales (1) et (4), — (2), — (3) sont développables en des séries procédant selon les puissances de x et y et coïncidant respectivement avec les séries hypergéométriques (11), (12) et (13). Cette vérification s'effectue aisément en s'appuyant sur les formules élémentaires de la théorie des intégrales eulériennes :

$$\int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}\,du = B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)};$$

$$\iint u^{p-1}v^{q-1}(1-u-v)^{r-1}\,du\,dv = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)}$$

$$(u \geqq 0,\ v \geqq 0,\ 1-u-v \geqq 0).$$

Prenons, d'abord, l'intégrale (4); on constate qu'elle définit une fonction uniforme de x et y dans les deux plans de x et y tout entiers, lorsqu'on y a tracé comme coupures les segments $(1 \text{ — } +\infty)$ des axes réels de ces deux plans. Lorsque $|x| < 1$ et $|y| < 1$ (c'est-à-dire précisément à l'intérieur des cercles de convergence associés de la série F_1), on a

$$(1-ux)^{-\beta}(1-vy)^{-\beta'} = \sum \frac{(\beta, m)(\beta', n)}{(1, m)(1, n)} x^m y^n u^{m+n}.$$

Cette série étant uniformément convergente, on peut intervertir les deux signes somme et sigma; l'intégrale définie (4) se trouve donc remplacée par

$$\sum \frac{(\beta, m)(\beta', n)}{(1, m)(1, n)} x^m y^n \int_0^1 u^{\alpha+m+n-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}\,du,$$

ou

$$\sum \frac{(\beta, m)(\beta', n)}{(1, m)(1, n)} x^m y^n \frac{\Gamma(\alpha+m+n)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma+m+n)},$$

ou encore

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n.$$

Donc, à l'intérieur des cercles $|x| = 1$ et $|y| = 1$, le développement de l'intégrale (4) coïncide bien avec celui de la fonction

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y).$$

Considérons ensuite l'intégrale (2); lorsque $|x| + |y| < 1$ (c'est-à-dire à l'intérieur de deux cercles de convergence associés de la série F_2), on peut développer $(1 - ux - vy)^{-\alpha}$ en une

---

[1] E. Picard, *Comptes rendus*, t. XC, 1880, p. 1267.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

série uniformément convergente; ceci permet de remplacer l'intégrale (2) par

$$\sum \frac{(\alpha, m+n)}{(1, m)(1, n)} x^m y^n \int_0^1 \int_0^1 u^{\beta+m-1} v^{\beta'+n-1} (1-u)^{\gamma-\beta-1} (1-v)^{\gamma'-\beta'-1} du\, dv$$

ou encore

$$\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\gamma'-\beta') \sum \frac{(\alpha, m+n)\Gamma(\beta+m)\Gamma(\beta'+n)}{\Gamma(\gamma+m)\Gamma(\gamma'+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n.$$

Donc, lorsque $|x| + |y| < 1$, le développement de l'intégrale (2) coïncide bien avec celui de la fonction

$$\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\gamma'-\beta')}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')} F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y).$$

Une démonstration calquée sur les précédentes convient encore pour l'intégrale (3) qui définit une fonction uniforme de x et y lorsqu'on a tracé comme coupures les segments $1 - +\infty$ des axes réels des deux plans x et y.

VII. — Formules de transformation des fonctions hypergéométriques.

La méthode suivie au paragraphe I pour établir les trois formules de transformation d'Euler s'étend à la fonction F_1. Considérons en effet l'intégrale

$$\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'} du$$

qui représente cette fonction. Il existe cinq changements de variable qui n'altèrent pas la forme de cette intégrale :

$$u = 1 - v, \qquad u = \frac{v}{(1-x)+vx}, \qquad u = \frac{v}{(1-y)+vy},$$
$$u = \frac{1-v}{1-vx}, \qquad u = \frac{1-v}{1-vy}.$$

En effectuant ces changements de variable, on obtient immédiatement *les cinq formules de transformation de la fonction* F_1 :

$$(5_1) \qquad F_1 = F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y),$$

$$(5_2) \qquad = (1-x)^{-\beta}(1-y)^{-\beta'} F_1\left(\gamma-\alpha, \beta, \beta', \gamma, \frac{x}{x-1}, \frac{y}{y-1}\right),$$

$$(5_3) \qquad = (1-x)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \gamma-\beta-\beta', \beta', \gamma, \frac{x}{x-1}, \frac{x-y}{x-1}\right),$$

$$(5_4) \qquad = (1-y)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \beta, \gamma-\beta-\beta', \gamma, \frac{y-x}{y-1}, \frac{y}{y-1}\right),$$

$$(5_5) \qquad = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(1-y)^{-\beta'} F_1\left(\gamma-\alpha, \gamma-\beta-\beta', \beta', \gamma, x, \frac{y-x}{y-1}\right),$$

$$(5_6) \qquad = (1-x)^{-\beta}(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} F_1\left(\gamma-\alpha, \beta, \gamma-\beta-\beta', \gamma, \frac{x-y}{x-1}, y\right).$$

La fonction F_1 est développable selon les puissances de x et de y, tant que

$$|x| < 1, \qquad |y| < 1.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

La fonction qui figure dans (5_2) est donc développable selon les puissances de $\frac{x}{x-1}$ et $\frac{y}{y-1}$ tant que

$$|x| < |x-1|, \qquad |y| < |y-1|,$$

c'est-à-dire lorsque x et y sont respectivement à gauche des droites

$$\Re(x) = \frac{1}{2}, \qquad \Re(y) = \frac{1}{2}.$$

La fonction qui figure dans (5_3) est développable selon les puissances de $\frac{x}{x-1}$ et $\frac{x-y}{x-1}$ tant que

$$|x| < |x-1|, \qquad |x-y| < |x-1|.$$

Soit donc x un point quelconque situé à gauche de la droite

$$\Re(x) = \frac{1}{2};$$

dans le plan de la variable y traçons le cercle ayant pour centre le point $y = x$ et passant par le point $y = 1$; tant que y est intérieur à ce cercle la série converge.

Le même résultat s'applique à la fonction qui figure dans (5_4) en y échangeant le rôle de x et y.

La fonction qui figure dans (5_5) est développable selon les puissances de x et de $\frac{y-x}{y-1}$ tant que

$$|x| < 1, \qquad |y-x| < |y-1|.$$

Soit donc x un point quelconque intérieur au cercle

$$|x| = 1;$$

dans le plan de la variable y traçons la droite joignant les deux points $y = x$ et $y = 1$; élevons la perpendiculaire D au milieu de cette droite; la série converge tant que y est du même côté de D que le point $y = x$.

Enfin le même résultat s'applique à la fonction qui figure dans (5_6) en y échangeant le rôle de x et de y.

Pour déterminer les formules de transformation de la fonction F_2 en considérant l'intégrale

$$\int_0^1 \int_0^1 u^{\beta-1} v^{\beta'-1} (1-u)^{\gamma-\beta-1} (1-v)^{\gamma'-\beta'-1} (1-ux-vy)^{\alpha} \, du \, dv,$$

il faut obtenir les transformations homographiques qui transforment en lui-même le carré

$$(u=0,\ v=0) \qquad (u=1,\ v=0) \qquad (u=1,\ v=1) \qquad (u=0,\ v=1)$$

et conservent la forme de la fonction sous le signe somme; il y a six changements de variables jouissant de cette propriété :

$u = 1 - u'$,	$v = v'$,	$u = 1 - v'$,	$v = u'$,
$u = u'$,	$v = 1 - v'$	$u = v'$,	$v = 1 - u'$,
$u = 1 - u'$,	$v = 1 - v'$	$u = 1 - v'$.	$v = 1 - u'$.

Les trois dernières transformations se déduisent des trois premières en y échangeant le rôle

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

de u' et v', ce qui revient simplement à échanger le rôle de x et y dans F_2; en partant des trois premières, on obtient immédiatement les *formules de transformation de la fonction* F_2 :

$$(6_1)\qquad F_2 = F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y),$$

$$(6_2)\qquad = (1-x)^{-\alpha} F_2\left(\alpha, \gamma-\beta, \beta', \gamma, \gamma', \frac{x}{x-1}, \frac{y}{1-x}\right),$$

$$(6_3)\qquad = (1-y)^{-\alpha} F_2\left(\alpha, \beta, \gamma'-\beta', \gamma, \gamma', \frac{x}{1-y}, \frac{y}{y-1}\right),$$

$$(6_4)\qquad = (1-x-y)^{-\alpha} F_2\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma'-\beta', \gamma, \gamma', \frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1}\right).$$

Nous retrouvons ainsi les formules (31), (31′) et (32) du paragraphe V.

Désignons par R et R′ deux nombres positifs liés par la relation

$$R + R' = 1.$$

La fonction F_2 est développable selon les puissances de x et y en une série convergente tant que x et y sont à l'intérieur des deux cercles associés

$$|x| = R, \qquad |y| = R'.$$

La fonction qui figure dans (6_2) est donc développable selon les puissances de $\frac{x}{x-1}$ et $\frac{y}{1-x}$ tant que

$$|x| < R|x-1|, \qquad |y| < R'|1-x|.$$

Soit donc x un point situé à l'intérieur du cercle admettant comme diamètre le segment de l'axe réel limité par les points

$$x = -\frac{R}{1-R}, \qquad x = \frac{R}{1+R},$$

la série convergera tant que y sera à l'intérieur du cercle

$$|y| = R'|1-x|.$$

Le même résultat s'applique à la fonction qui figure dans (6_3) en y échangeant le rôle de x et de y.

Enfin la fonction qui figure dans (6_4) est développable selon les puissances de $\frac{x}{x+y-1}$ et $\frac{y}{x+y-1}$ tant que

$$|x| < R|x+y-1| \qquad \text{et} \qquad |y| < R'|x+y-1|.$$

La même méthode appliquée à l'intégrale

$$\iint u^{\beta-1} v^{\beta'-1} (1-u-v)^{\gamma-\beta-\beta'-1} (1-ux)^{-\alpha} (1-vy)^{-\alpha'}\, du\, dv$$
$$(u \geqq 0,\ v \geqq 0,\ 1-u-v \geqq 0)$$

ne permet pas d'obtenir de formules de transformation pour la fonction F_3. En effet, les transformations homographiques qui transforment en lui-même le triangle

$$(u=0,\ v=0), \qquad (u=1,\ v=0), \qquad (u=0,\ v=1)$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

appartiennent aux deux types

$$u' = \frac{A(1-u-v)}{A+Bu+Cv}, \qquad v' = \frac{(A+B)u}{A+Bu+Cv}$$

et

$$u' = \frac{(A'+B')v}{A'+B'v+C'u}, \qquad v' = \frac{A'(1-u-v)}{A'+B'v+C'u}.$$

Or il ne paraît pas possible de déterminer les coefficients A, B, ... de manière à conserver la forme de la fonction sous le signe somme.

VIII. — Propriétés des fonctions hypergéométriques déduites de leurs expressions par des intégrales définies.

Les expressions des fonctions F_1, F_2, F_3 par des intégrales définies permettent d'établir simplement certaines de leurs propriétés; *il est notamment aisé d'en déduire les équations récurrentes qui lient les fonctions contiguës.*

Montrons-le, sur quelques exemples, pour la fonction F_1, en partant de

$$(1) \qquad \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = \int_0^1 U(u)\,du,$$

$$U(u) = u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'}.$$

On a évidemment

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\gamma-\alpha-1)}{\Gamma(\gamma)} F_1(\alpha+1, \beta, \beta', \gamma, x, y) = \int_0^1 \frac{u}{1-u} U\,du = -\int_0^1 U\,du + \int_0^1 \frac{1}{1-u} U\,du,$$

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha-1)}{\Gamma(\gamma-1)} F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma-1, x, y) = \int_0^1 \frac{1}{1-u} U\,du.$$

En combinant ces deux formules on en tire

$$\alpha F_1(\alpha+1, \beta, \beta', \gamma, x, y) + (\gamma-\alpha-1) F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = (\gamma-1) F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma-1, x, y).$$

De même partons de la relation

$$\frac{dU}{du} = U\left(\frac{\alpha-1}{u} + \frac{\alpha+1-\gamma}{1-u} + \frac{\beta x}{1-ux} + \frac{\beta' y}{1-uy}\right)$$

et intégrons-la entre 0 et 1; si $\mathcal{R}(\alpha) > 1$ et $\mathcal{R}(\gamma-\alpha) > 1$, on a

$$U(0) = U(1) = 0;$$

d'où

$$(\alpha-1)\int_0^1 \frac{1}{u} U\,du + (\alpha+1-\gamma)\int_0^1 \frac{1}{1-u} U\,du + \beta x \int_0^1 \frac{1}{1-ux} U\,du + \beta' y \int_0^1 \frac{1}{1-uy} U\,du = 0.$$

On en tire immédiatement [1]

$$(\gamma-\alpha) F_1(\alpha-1, \beta, \beta', \gamma, x, y) + (\alpha-1) F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$$
$$- (\gamma-1) F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma-1, x, y) + \beta x F_1(\alpha, \beta+1, \beta', \gamma, x, y) + \beta' y F_1(\alpha, \beta, \beta'+1, \gamma, x, y) = 0.$$

---

[1] Le Vavasseur, *Sur le système d'équations, etc.* Thèse, p. 5 et 6.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

De tels artifices de calcul se multiplient indéfiniment et conduisent aux relations qui lient les fonctions de la forme

$$F_1(\alpha+\lambda,\ \beta+\mu,\ \beta'+\mu',\ \gamma+\nu,\ x,\ y) \qquad (\lambda,\ \mu,\ \mu',\ \nu \text{ entiers}).$$

Si dans les intégrales définies (1), (2) et (3), au lieu de développer les expressions $(1-ux-vy)^{-\alpha}$ et $(1-ux)^{-\alpha}(1-vy)^{-\alpha'}$ selon les puissances de x et y, on les représente par d'autres développements, — uniformément convergents tant que u et v varient dans le domaine d'intégration et que les variables x et y sont dans certains domaines D et D′, — on obtient évidemment de nouveaux développements des fonctions F_1, F_2, F_3 valables dans les domaines D et D′.

Donnons quelques exemples de développements formés par cette méthode.

Dans l'intégrale (1) faisons le changement de variable

$$u = s(1-t), \qquad v = st,$$

elle devient

$$\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma-\beta-\beta')}{\Gamma(\gamma)}F_1 = \int_0^1\int_0^1 s^{\beta+\beta'-1}t^{\beta'-1}(1-s)^{\gamma-\beta-\beta'-1}(1-t)^{\beta-1}[1-s(x+ty-tx)]^{-\alpha}\,ds\,dt.$$

Or

$$[1-s(x+ty-tx)]^{-\alpha} = (1-sx)^{-\alpha}\left[1-(y-x)\frac{st}{1-sx}\right]^{-\alpha}$$
$$= \sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{(\alpha,\ m)}{(1,\ m)}(y-x)^m s^m t^m (1-sx)^{-(m+\alpha)},$$

la série étant convergente pour $0 \leqq s \leqq 1$ et $0 \leqq t \leqq 1$ tant que l'on a

$$\left|\frac{y-x}{1-x}\right| < 1.$$

Si l'on transporte cette série dans l'intégrale, on obtient immédiatement

$$(7) \qquad F_1(\alpha,\ \beta,\ \beta',\ \gamma,\ x,\ y) = \sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{(\alpha,\ m)(\beta',\ m)}{(\gamma,\ m)(1,\ m)}F(\alpha+m,\ \beta+\beta'+m,\ \gamma+m,\ x)(y-x)^m.$$

Ce développement procédant selon les puissances de $(y-x)$, les coefficients étant des fonctions de Gauss, est à rapprocher de l'expression (15-II) de F_1 par une série simple; en y faisant $y = x$, on retrouve la relation (25-V)

$$F_1(\alpha,\ \beta,\ \beta',\ \gamma,\ x,\ x) = F(\alpha,\ \beta+\beta',\ \gamma,\ x).$$

D'autre part, on peut écrire aussi

$$[1-s(x+ty-tx)]^{-\alpha} = \sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{(\alpha,\ m)}{(1,\ m)}s^m x^m\left[1-t\left(1-\frac{y}{x}\right)\right]^m,$$

d'où, en transportant cette expression dans l'intégrale, ce nouveau développement

$$(8) \qquad F_1(\alpha,\ \beta,\ \beta',\ \gamma,\ x,\ y) = \sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{(\alpha,\ m)(\beta+\beta',\ m)}{(\gamma,\ m)(1,\ m)}F\left(-m,\ \beta',\ \beta+\beta',\ 1-\frac{y}{x}\right)x^m.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

qui présente ceci de remarquable que *les fonctions hypergéométriques qui y figurent sont des polynomes de degré m en* $\left(1-\frac{y}{x}\right)$.

L'expression (8) *de la fonction* F_1 *permet de montrer qu'elle se ramène toujours à la fonction* F_2.

En effet, appliquons la transformation d'Euler (6'-I) aux fonctions F qui figurent dans (8)

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = x^{\beta'} y^{-\beta'} \sum \frac{(\alpha, m)(\beta+\beta', m)}{(\gamma, m)(1, m)} F\left(\beta+\beta'+m, \beta', \beta+\beta', 1-\frac{x}{y}\right) x^m.$$

En rapprochant ce développement de l'expression (16-II) de F_2 on voit de suite que

$$(9) \qquad F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = x^{\beta'} y^{-\beta'} F_2\left(\beta+\beta', \alpha, \beta', \gamma, \beta+\beta', x, 1-\frac{x}{y}\right).$$

Cette formule qui exprime F_1 au moyen de F_2 est à rapprocher de la relation (29-V) qui ramène F_1 à F_3.

Réciproquement, toute fonction F_2 *telle que* $\gamma = \alpha$ *ou* $\gamma' = \alpha$ *se ramène à* F_1 :

$$(10) \qquad F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \alpha, x, y) = (1-y)^{-\beta'} F_1\left(\beta, \alpha-\beta', \beta', \gamma, x, \frac{x}{1-y}\right),$$

$$(10') \qquad F_2(\alpha, \beta, \beta', \alpha, \gamma', x, y) = (1-x)^{-\beta} F_1\left(\beta', \beta, \alpha-\beta, \gamma, \frac{y}{1-x}, y\right).$$

Pour donner un autre exemple, partons de l'intégrale (3) qui représente la fonction F_3; si l'on y fait le changement de variables

$$u = 1-s, \qquad v = st,$$

elle devient

$$\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma-\beta-\beta')}{\Gamma(\gamma)} F_3 = \int_0^1 \int_0^1 s^{\gamma-\beta-1} t^{\beta'-1} (1-s)^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-\beta'-1} [1-x+sx]^{-\alpha} [1-sty]^{-\alpha'} \, ds\, dt,$$

ou en effectuant l'intégration par rapport à t

$$(11) \quad \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)} F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y) = \int_0^1 s^{\gamma-\beta-1} (1-s)^{\beta-1} [1-x+sx]^{-\alpha} F(\alpha', \beta', \gamma-\beta, sy)\, ds.$$

Dans cette intégrale développons la fonction hypergéométrique

$$F(\alpha', \beta', \gamma-\beta, sy) = (1-sy)^{-\alpha'} F\left(\alpha', \gamma-\beta-\beta', \gamma-\beta, \frac{sy}{sy-1}\right)$$
$$= \sum_{m=0}^{m=+\infty} \frac{(\alpha', m)(\gamma-\beta-\beta', m)}{(\gamma-\beta, m)(1, m)} (-1)^m s^m y^m (1-sy)^{-\alpha'+m};$$

d'où, en se reportant à l'expression (4) de F_1 par une intégrale simple,

$$(12) \quad F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y)$$
$$= (1-x)^{-\alpha} \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\gamma-\beta-\beta', m)(\alpha', m)}{(\gamma, m)(1, m)} F_1\left(\gamma-\beta+m, \alpha, \alpha'+m, \gamma+m, \frac{x}{x-1}, y\right)(-y)^m.$$

Dans ce développement de la fonction F_3, les coefficients sont des fonctions F_1; il permet de

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

mettre en évidence la propriété déjà démontrée (V) : *chaque fois que* $\gamma = \beta + \beta'$, F_3 *se ramène à* F_1. Si l'on applique aux fonctions F_1 la transformation (5_2), on tire de (12)

$$(13)\quad F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y)$$
$$= (1-y)^{-\alpha'} \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\gamma-\beta-\beta', m)(\alpha', m)}{(\gamma, m)(1, m)} F_1\left(\beta, \alpha, \alpha'+m, \gamma+m, x, \frac{y}{y-1}\right)\left(\frac{y}{y-1}\right)^m;$$

en y faisant $\gamma - \beta - \beta' = 0$, on retrouve la formule (34'-V)

$$F_3(\alpha, \alpha', \beta, \gamma-\beta, \gamma, x, y) = (1-y)^{-\alpha'} F_1\left(\beta, \alpha, \alpha', \gamma, x, \frac{y}{y-1}\right).$$

On pourrait multiplier de tels exemples; donnons encore des développements [1] des fonctions F_1 et F_2, valables dans le cas où l'élément α étant égal à un entier négatif $-p$, elles se réduisent à un polynome de degré p. Remarquons que :

$$(1-ux-vy)^p = (-1)^p[1-(1-ux)-(1-vy)]^p$$
$$= (-1)^p \sum_{m+n=0}^{m+n=p} \frac{(-p, m+n)}{(1, m)(1, n)} (1-ux)^m (1-vy)^n.$$

Si l'on transporte ce développement (limité) dans les intégrales (1) et (2), on a immédiatement

$$(14)\quad F_1(-p, \beta, \beta', \gamma, x, y) = (-1)^p \sum_{m+n=0}^{m+n=p} \frac{(-p, m+n)}{(1, m)(1, n)} F_3(-m, -n, \beta, \beta', \gamma, x, y),$$

$$(15)\quad F_2(-p, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y) = (-1)^p \sum_{m+n=0}^{m+n=p} \frac{(-p, m+n)}{(1, m)(1, n)} F(-m, \beta, \gamma, x) F(-n, \beta', \gamma', y).$$

Les fonctions F_3 et F qui figurent dans ces développements (limités) sont elles-mêmes des polynomes.

IX. — Développement de la fonction $F_3\left(\alpha, \alpha', 1, 1, \gamma, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$.

L'expression (3) de F_3 par une intégrale définie permet encore de démontrer pour cette fonction une proposition intéressante par son analogie avec le résultat obtenu par Jacobi dans le développement en fraction continue de

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} \frac{1}{x} F\left(\alpha, 1, \gamma, \frac{1}{x}\right).$$

Jacobi détermine (comme nous l'avons vu au paragraphe I, 7°) le dénominateur $Q_n(x)$ de la réduite de rang n par la condition que le développement de $Q_n(x)\,\varphi(x)$, selon les puis-

[1] *Cf.* P. Humbert, *The confluent hypergeometric functions of two variables* (*Proc. of the royal Soc. of Edinburgh*, vol. XLI, Part. I, n° 9).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

sances de $\frac{1}{x}$ commence par un terme en $\frac{1}{x^{n+1}}$, et obtient pour son expression

$$(16)\qquad Q_n(x) = \frac{x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha+1-\gamma}}{(\alpha, n)} \frac{d^n}{dx^n}[x^{\alpha+n-1}(1-x)^{\gamma+n-\alpha-1}].$$

Considérons la fonction

$$(17)\qquad \varphi(x, y) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha')\Gamma(\gamma-\alpha-\alpha')}{\Gamma(\gamma)} \frac{1}{x}\frac{1}{y} F_3\left(\alpha, \alpha', 1, 1, \gamma, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right).$$

En vertu de la formule (3)

$$(18)\qquad \varphi(x, y) = \int\int \frac{f(u, v)}{(x-u)(y-v)} du\, dv$$

$$[u \geqq 0,\ v \geqq 0,\ 1-u-v \geqq 0,\ f(u, v) = u^{\alpha-1} v^{\alpha'-1}(1-u-v)^{\gamma-\alpha-\alpha'-1}].$$

Proposons-nous, par analogie avec la question traitée par Jacobi, de déterminer un polynome $Q_{m,n}(x, y)$ *de degré* $m+n$ *tel que le produit*

$$Q_{m,n}(x, y)\, \varphi(x, y)$$

développé selon les puissances de $\frac{1}{x}$ *et* $\frac{1}{y}$ *ne contienne aucun terme en* $\frac{1}{x^{j+1} y^{k+1}}$, j *et* k *étant des entiers positifs ou nuls tels que*

$$(19)\qquad j+k < m+n \quad \text{ou} \quad j+k = m+n \quad (j \neq m;\ k \neq n).$$

Or

$$Q_{m,n}(x, y)\varphi(x, y) = \int\int Q_{m,n}(x, y) \frac{f(u, v)}{(x-u)(y-v)} du\, dv.$$

ce que l'on peut aussi écrire

$$\begin{aligned} Q_{m,n}(x, y)\varphi(x, y) = & \int\int \frac{Q(x, v) - Q(u, v)}{(x-u)(y-v)} f(u, v)\, du\, dv + \int\int \frac{Q(u, y) - Q(u, v)}{(x-u)(y-v)} f(u, v)\, du\, dv \\ & + \int\int \frac{Q(u, v) - Q(x, v) - Q(u, y) + Q(x, y)}{(x-u)(y-v)} f(u, v)\, du\, dv \\ & + \int\int Q(u, v) \frac{f(u, v)}{(x-u)(y-v)} du\, dv. \end{aligned}$$

Mais les polynomes

$$\begin{aligned} & Q(x, v) - Q(u, v), \\ & Q(u, y) - Q(u, v), \\ & Q(u, v) - Q(x, v) - Q(u, y) + Q(x, y) \end{aligned}$$

sont respectivement divisibles par

$$(x-u),\quad (y-v),\quad (x-u)(y-v).$$

Donc les trois premières intégrales sont des polynomes, la première par rapport à x, la deuxième par rapport à y, la troisième par rapport à x et y.

Donc, dans le développement de $Q_{m,n}(x, y)\, \varphi(x, y)$ selon les puissances de $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$, les termes en $\frac{1}{x^{j+1} y^{k+1}}$, j et k vérifiant les conditions (19), ne peuvent provenir que de la quatrième intégrale

$$\int\int Q_{m,n}(u, v) \frac{f(u, v)}{(x-u)(y-v)} du\, dv.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Or le coefficient de $\frac{1}{x^{j+1}y^{k+1}}$ dans le développement de cette intégrale ayant pour valeur

$$\int\int f(u, v)u^j v^k Q_{m,n}(u, v)\,du\,dv,$$

nous obtenons *les conditions nécessaires et suffisantes que doit vérifier le polynome* $Q_{m,n}$

$$(20)\qquad \begin{cases} \int\int f(u, v)u^j v^k Q_{m,n}(u, v)\,du\,dv = 0 \\ \text{pour } j+k < m+n \quad \text{ou} \quad j+k = m+n,\ j \neq m,\ k \neq n. \end{cases}$$

Il est aisé de montrer qu'elles déterminent ce polynome à un facteur constant près et qu'il a pour expression

$$Q_{m,n}(x, y) = Cx^{1-\alpha}y^{1-\alpha'}(1-x-y)^{\alpha+\alpha'+1-\gamma}\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n}[x^{\alpha+m-1}y^{\alpha'+n-1}(1-x-y)^{\gamma+m+n-\alpha-\alpha'-1}].$$

En effet une suite d'intégrations par parties permet de démontrer, comme pour le cas d'une variable, que

$$\int\int f(u, v)u^j v^k Q_{m,n}\,du\,dv = (-1)^{m+n}C\int\int u^{\alpha+m-1}v^{\alpha'+n-1}(1-u-v)^{\gamma+m+n-\alpha-\alpha'-1}\frac{\partial^{m+n}}{\partial u^m\,\partial v^n}[u^j v^k]\,du\,dv$$

$$[\text{si } \mathcal{R}(\alpha),\ \mathcal{R}(\alpha'),\ \mathcal{R}(\gamma-\alpha-\alpha') \text{ sont positifs}],$$

et il est clair que l'intégrale du second membre est nulle tant que

$$j+k < m+n \qquad \text{ou} \qquad j+k = m+n,\quad j \neq m,\quad k \neq n.$$

En particularisant la constante nous prendrons pour le polynome cherché

$$(21)\qquad Q_{m,n}(x, y) = \frac{x^{1-\alpha}y^{1-\alpha'}(1-x-y)^{\alpha+\alpha'+1-\gamma}}{(\alpha, m)(\alpha', n)}\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n}[x^{\alpha+m-1}y^{\alpha'+n-1}(1-x-y)^{\gamma+m+n-\alpha-\alpha'-1}].$$

Comme on le voit l'analogie est complète avec la formule de Jacobi (16); mais elle se poursuit plus loin; en effet, nous avons vu au paragraphe I, 8°, que $Q_n(x)$ s'exprimait par un *polynome hypergéométrique*

$$Q_n(x) = F(-n, \gamma+n-1, \alpha, x)$$

ou

$$(22)\qquad Q_n(x) = (1-x)^n F\left(\alpha+1-\gamma-n, -n, \alpha, \frac{x}{x-1}\right).$$

Or on peut donner du polynome $Q_{m,n}(x, y)$ au moyen de la fonction hypergéométrique F_2, une expression qui généralise simplement la formule (22).

En effet, en développant dans (21) la dérivée

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n}[x^{\alpha+m-1}y^{\alpha'+n-1}(1-x-y)^{\gamma+m+n-\alpha-\alpha'-1}]$$

par la formule de Leibnitz, elle prend la forme

$$\sum_{p=0,\,q=0}^{p=m,\,q=n}(-1)^{p+q}\frac{(-m, p)(-n, q)}{(1, p)(1, q)}\frac{\partial^{m-p}}{\partial x^{m-p}}(x^{\alpha+m-1})\frac{\partial^{n-q}}{\partial y^{n-q}}(y^{\alpha'+n-1})\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p\,\partial y^q}[(1-x-y)^{\gamma+m+n-\alpha-\alpha'-1}]$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

ou en effectuant les dérivations

$$x^{\alpha-1}y^{\alpha'-1}(1-x-y)^{\gamma+m+n-\alpha-\alpha'-1}$$
$$\times\sum_{p=0,\,q=0}^{p=m,\,q=n}\frac{(-m,p)(-n,q)}{(1,p)(1,q)}\frac{(\alpha,m)}{(\alpha,p)}\frac{(\alpha',n)}{(\alpha',q)}(\alpha+\alpha'+1-\gamma-m-n,p+q)\frac{x^p y^q}{(x+y-1)^{p+q}}.$$

Ce qui donne immédiatement

$$(23)\quad Q_{m,n}(x,y)=(1-x-y)^{m+n}F_2\left(\alpha+\alpha'+1-\gamma-m-n,-m,-n,\alpha,\alpha',\frac{x}{x+y-1},\frac{y}{x+y-1}\right).$$

La méthode suivie dans l'étude du développement de l'intégrale (18) est, avec quelques modifications faciles à apercevoir, un cas particulier d'une méthode générale indiquée par Didon [1].

X. — Représentation des quatre fonctions hypergéométriques par des intégrales prises le long de contours complexes.

Au paragraphe VI, nous n'avons pas donné de représentation pour la fonction F_4; en outre, les formules relatives aux fonctions F_1, F_2, F_3 ne sont valables que si les éléments β, β', γ, γ' vérifient des conditions assez restrictives; il y a donc intérêt à rechercher un mode de représentation valable pour ces quatre fonctions hypergéométriques et dans des conditions plus larges.

Nous l'obtiendrons en partant de la représentation de $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ par l'intégrale de Barnes (§ I, 9°)

$$(24)\qquad \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)}{\Gamma(\gamma+s)}\Gamma(-s)(-x)^s\,ds.$$

Prenons la fonction F_1 sous la forme d'une série simple (15-II)

$$F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma,x,y)=\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{(\alpha,m)(\beta,m)}{(\gamma,m)(1,m)}F(\alpha+m,\beta',\gamma+m,y)x^m$$
$$|x|<1,\qquad |y|<1$$

ou

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta')}{\Gamma(\gamma)}F_1=\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{(\beta,m)}{(1,m)}\frac{\Gamma(\alpha+m)\Gamma(\beta')}{\Gamma(\gamma+m)}F(\alpha+m,\beta',\gamma+m,y)x^m;$$

d'où, en appliquant la formule de Barnes aux fonctions F qui figurent dans la série,

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta')}{\Gamma(\gamma)}F_1=\frac{1}{2\pi i}\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{(\beta,m)}{(1,m)}x^m\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\Gamma(\alpha+m+t)\Gamma(\beta'+t)}{\Gamma(\gamma+m+t)}\Gamma(-t)(-y)^t\,dt$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{m=0}^{m=\infty}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\left[\frac{(\alpha+t,m)(\beta,m)}{(\gamma+t,m)(1,m)}x^m\right]\frac{\Gamma(\alpha+t)\Gamma(\beta'+t)}{\Gamma(\gamma+t)}\Gamma(-t)(-y)^t\,dt.$$

Le facteur entre crochets étant le terme général d'une série hypergéométrique, uniformément

[1] F. Didon, *Ann. Éc. Norm.*, 1re série, t. VII, 1870, p. 265.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

convergente tant que $|x| < 1$, on peut intervertir les deux signes somme et sigma. D'où l'expression de F_1 par une intégrale de contour

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta')}{\Gamma(\gamma)} F_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} F(\alpha+t, \beta, \gamma+t, x)\frac{\Gamma(\alpha+t)\Gamma(\beta'+t)}{\Gamma(\gamma+t)}\Gamma(-t)(-y)^t\,dt.$$

On peut encore faire disparaître la fonction F qui figure sous le signe somme, en remarquant que, d'après la formule (24),

$$\frac{\Gamma(\alpha+t)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma+t)} F(\alpha+t, \beta, \gamma+t, x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\Gamma(\alpha+s+t)\Gamma(\beta+s)}{\Gamma(\gamma+s+t)}\Gamma(-s)(-x)^s\,ds.$$

Ce qui conduit à l'expression finale de F_1

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}{\Gamma(\gamma)} F_1 = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\Gamma(\alpha+s+t)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\beta'+t)}{\Gamma(\gamma+s+t)}\Gamma(-s)\Gamma(-t)(-x)^s(-y)^t\,ds\,dt.$$

Des calculs identiques fournissent les expressions des autres fonctions hypergéométriques. On obtient ainsi

$$(25)\qquad \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta')}{\Gamma(\gamma)} F_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} F(\alpha+t, \beta, \gamma+t, x)\frac{\Gamma(\alpha+t)\Gamma(\beta'+t)}{\Gamma(\gamma+t)}\Gamma(-t)(-y)^t\,dt,$$

$$(26)\qquad \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta')}{\Gamma(\gamma')} F_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} F(\alpha+t, \beta, \gamma, x)\frac{\Gamma(\alpha+t)\Gamma(\beta'+t)}{\Gamma(\gamma'+t)}\Gamma(-t)(-y)^t\,dt,$$

$$(27)\qquad \frac{\Gamma(\alpha')\Gamma(\beta')}{\Gamma(\gamma)} F_3 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} F(\alpha, \beta, \gamma+t, x)\frac{\Gamma(\alpha'+t)\Gamma(\beta'+t)}{\Gamma(\gamma+t)}\Gamma(-t)(-y)^t\,dt,$$

$$(28)\qquad \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma')} F_4 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} F(\alpha+t, \beta+t, \gamma, x)\frac{\Gamma(\alpha+t)\Gamma(\beta+t)}{\Gamma(\gamma'+t)}\Gamma(-t)(-y)^t\,dt,$$

ou sous forme d'intégrales doubles

$$(29)\qquad \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}{\Gamma(\gamma)} F_1 = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\Gamma(\alpha+s+t)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\beta'+t)}{\Gamma(\gamma+s+t)}\Gamma(-s)\Gamma(-t)(-x)^s(-y)^t\,ds\,dt,$$

$$(30)\qquad \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')} F_2 = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\Gamma(\alpha+s+t)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\beta'+t)}{\Gamma(\gamma+s)\Gamma(\gamma'+t)}\Gamma(-s)\Gamma(-t)(-x)^s(-y)^t\,ds\,dt,$$

$$(31)\qquad \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha')\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}{\Gamma(\gamma)} F_3 = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\alpha'+t)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\beta'+t)}{\Gamma(\gamma+s+t)}\Gamma(-s)\Gamma(-t)(-x)^s(-y)^t\,ds\,dt,$$

$$(32)\qquad \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')} F_4 = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\Gamma(\alpha+s+t)\Gamma(\beta+s+t)}{\Gamma(\gamma+s)\Gamma(\gamma'+t)}\Gamma(-s)\Gamma(-t)(-x)^s(-y)^t\,ds\,dt.$$

Ces expressions sont valables tant qu'aucun des éléments α, α', β, β' n'est un entier négatif.

On peut condenser les expressions précédentes en une expression unique qui fait ressortir le lien existant entre les quatre fonctions hypergéométriques de deux variables.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Soit

$$(33)\qquad \frac{\Gamma(\alpha')\Gamma(\beta')}{\Gamma(\gamma')}\Phi(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\Psi(s, t)\Gamma(-s)\Gamma(-t)(-x)^s(-y)^t\,ds\,dt,$$

$$\Psi(s, t) = \frac{\Gamma(\alpha + s + \varepsilon_{\alpha,\alpha'}t)\Gamma(\alpha' + \varepsilon_{\alpha,\alpha'}s + t)\Gamma(\beta + s + \varepsilon_{\beta,\beta'}t)\Gamma(\beta' + \varepsilon_{\beta,\beta'}s + t)\Gamma[\gamma + \varepsilon_{\gamma,\gamma'}(s + t)]}{\Gamma[\alpha + \varepsilon_{\alpha,\alpha'}(s + t)]\Gamma[\beta + \varepsilon_{\beta,\beta'}(s + t)]\Gamma(\gamma + s + \varepsilon_{\gamma,\gamma'}t)\Gamma(\gamma' + \varepsilon_{\gamma,\gamma'}s + t)},$$

le symbole $\varepsilon_{\lambda,\lambda'}$ ayant la signification suivante :

$$\varepsilon_{\lambda,\lambda'} = 0 \quad \text{pour } \lambda \neq \lambda', \qquad \varepsilon_{\lambda,\lambda} = 1.$$

En annulant 0, 1, 2 ou 3 des différences $\alpha' - \alpha$, $\beta' - \beta$, $\gamma' - \gamma$, on obtient comme cas particuliers de la fonction Φ

$$\begin{array}{llll}
\alpha' = \alpha, & \beta' \neq \beta, & \gamma' = \gamma, & \Phi = F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y), \\
\alpha' = \alpha, & \beta' \neq \beta, & \gamma' \neq \gamma, & \Phi = F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y), \\
\alpha' \neq \alpha, & \beta' \neq \beta, & \gamma' = \gamma, & \Phi = F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y), \\
\alpha' = \alpha, & \beta' = \beta, & \gamma' \neq \gamma, & \Phi = F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y), \\
\alpha' \neq \alpha, & \beta' \neq \beta, & \gamma' \neq \gamma, & \Phi = F(\alpha, \beta, \gamma, x)F(\alpha', \beta', \gamma', y), \\
\alpha' = \alpha, & \beta' = \beta, & \gamma' = \gamma, & \Phi = F(\alpha, \beta, \gamma, x + y).
\end{array}$$

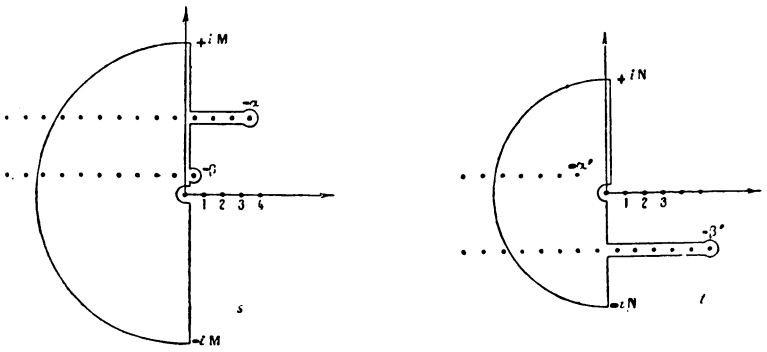
Les expressions (29) à (32) des quatre fonctions hypergéométriques permettent de retrouver, par l'application des méthodes du calcul des résidus des intégrales doubles de nombreuses formules de transformation de ces fonctions, en voici un exemple. Considérons l'intégrale

$$J = -\frac{1}{4\pi^2}\int_C\int_{C'}\frac{\Gamma(\alpha + s)\Gamma(\alpha' + t)\Gamma(\beta + s)\Gamma(\beta' + t)}{\Gamma(\gamma + s + t)}\Gamma(-s)\Gamma(-t)(-x)^s(-y)^t\,ds\,dt,$$

les contours C et C′ étant tracés respectivement dans les plans des variables s et t de la manière suivante :

C se compose : 1° du segment $-iM$, $+iM$ de l'axe imaginaire complété par des lacets de

Fig. 3.



manière à laisser à sa droite les pôles de $\Gamma(-s)$ et à sa gauche ceux de $\Gamma(\alpha + s)$, $\Gamma(\beta + s)$; 2° de la demi-circonférence de centre O et de rayon M située à gauche de l'axe imaginaire, M étant choisi de telle manière que cette circonférence ne passe par aucun des pôles de $\Gamma(\alpha + s)$ et $\Gamma(\beta + s)$.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

C′ se déduit de C par simple analogie.

Dans le domaine intérieur à C et C′ la fonction à intégrer possède un nombre fini de pôles rentrant dans l'un des quatre types :

$$\begin{array}{llll} s=-\alpha-m, & s=-\alpha-m, & s=-\beta-m, & s=-\beta-m, \\ t=-\alpha'-n, & t=-\beta'-n, & t=-\alpha'-n, & t=-\beta'-n \end{array}$$

(m et n entiers positifs).

Calculons le résidu relatif à un pôle du premier type. En s'appuyant sur la formule

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x},$$

on peut écrire

$$\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\alpha'+t)=\frac{(-1)^{m+n}}{\Gamma(1-\alpha-s)\Gamma(1-\alpha'-t)}\,\frac{\pi(s+\alpha+m)}{\sin\pi(s+\alpha+m)}\,\frac{\pi(t+\alpha'+n)}{\sin\pi(t+\alpha'+n)}\,\frac{1}{s+\alpha+m}\,\frac{1}{t+\alpha'+n}.$$

Le résidu de la fonction relatif à $s=-\alpha-m$ et $t=-\alpha'-n$ a donc pour valeur

$$\frac{(-1)^{m+n}}{\Gamma(1+m)\Gamma(1+n)}\,\frac{\Gamma(\beta-\alpha-m)\Gamma(\beta'-\alpha'-n)}{\Gamma(\gamma-\alpha-\alpha'-m-n)}\Gamma(\alpha+m)\Gamma(\alpha'+n)(-x)^{-\alpha-m}(-y)^{-\alpha'-n}.$$

En employant la relation évidente

$$\Gamma(\lambda-k)=(-1)^k\frac{\Gamma(\lambda)}{(1-\lambda,k)}$$

on obtient finalement pour ce résidu

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha')\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\beta'-\alpha')}{\Gamma(\gamma-\alpha-\alpha')}(-x)^{-\alpha}(-y)^{-\alpha'}\left[\frac{(\alpha+\alpha'+1-\gamma,m+n)(\alpha,m)(\alpha',n)}{(\alpha+1-\beta,m)(\alpha'+1-\beta',n)(1,m)(1,n)}\left(\frac{1}{x}\right)^m\left(\frac{1}{y}\right)^n\right].$$

On reconnaît dans le facteur entre crochets le terme général de la série

$$F_2\left(\alpha+\alpha'+1-\gamma,\alpha,\alpha',\alpha+1-\beta,\alpha'+1-\beta',\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right).$$

Les résidus relatifs aux pôles des autres types se déduisent de celui-là : pour le second type, en y permutant α' et β'; pour le troisième type, en y permutant α et β; pour le quatrième type, en y permutant α et β, α' et β'.

Ceci posé, faisons tendre M et N vers l'infini; la somme des résidus relatifs aux pôles du premier type tendra vers

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha')\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\beta'-\alpha')}{\Gamma(\gamma-\alpha-\alpha')}(-x)^{-\alpha}(-y)^{-\alpha'}F_2\left(\alpha+\alpha'+1-\gamma,\alpha,\alpha',\alpha+1-\beta,\alpha'+1-\beta',\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)$$

et la somme des résidus relatifs aux pôles des trois autres types tendra vers des expressions qui se déduisent immédiatement de celle-là.

D'autre part, si $|x|>1$ et $|y|>1$, les intégrales prises le long des demi-circonférences tendent vers zéro; donc l'intégrale J tend vers

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\alpha'+t)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\beta'+t)}{\Gamma(\gamma+s+t)}\Gamma(-s)\Gamma(-t)(-x)^s(-y)^t\,ds\,dt,$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

c'est-à-dire, d'après (31), vers

$$\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha')\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\beta')}{\Gamma(\gamma)}F_3.$$

En égalant cette limite à la limite de la somme des résidus, on obtient finalement en posant

$$f(\lambda, \mu, \rho, \sigma) = (-1)^{-\lambda}(-1)^{-\mu}\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\rho-\lambda)\,\Gamma(\sigma-\mu)}{\Gamma(\rho)\,\Gamma(\sigma)\,\Gamma(\gamma-\lambda-\mu)}$$

la relation

$$\begin{aligned}(34)\quad F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y) = {} & f(\alpha, \alpha', \beta, \beta')x^{-\alpha}y^{-\alpha'}F_2\left(\alpha+\alpha'+1-\gamma, \alpha, \alpha', \alpha+1-\beta, \alpha'+1-\beta', \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)\\ & + f(\alpha, \beta', \beta, \alpha')x^{-\alpha}y^{-\beta'}F_2\left(\alpha+\beta'+1-\gamma, \alpha, \beta', \alpha+1-\beta, \beta'+1-\alpha', \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)\\ & + f(\beta, \alpha', \alpha, \beta')x^{-\beta}y^{-\alpha'}F_2\left(\beta+\alpha'+1-\gamma, \beta, \alpha', \beta+1-\alpha, \alpha'+1-\beta', \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)\\ & + f(\beta, \beta', \alpha, \alpha')x^{-\beta}y^{-\beta'}F_2\left(\beta+\beta'+1-\gamma, \beta, \beta', \beta+1-\alpha, \beta'+1-\alpha', \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right).\end{aligned}$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

Digitized by Google

Original from
UNIVERSITY OF MINNESOTA

CHAPITRE III.

LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DES QUATRE FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES.

XI. — Les quatre systèmes d'équations aux dérivées partielles.

De même que la fonction hypergéométrique de Gauss vérifie l'équation différentielle linéaire (7-I) qui permet de définir cette fonction pour toutes les valeurs de la variable indépendante, — les quatre fonctions F_1, F_2, F_3, F_4 satisfont à des équations différentielles simultanées permettant de les définir pour tous les groupes de valeurs des variables indépendantes x et y.

Ces équations sont les suivantes :

$$F_1 \begin{cases} x(1-x)r + y(1-x)s + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]p - \beta y q - \alpha\beta z = 0, \\ y(1-y)t + x(1-y)s + [\gamma - (\alpha+\beta'+1)y]q - \beta' x p - \alpha\beta' z = 0; \end{cases}$$

$$F_2 \begin{cases} x(1-x)r - xys + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]p - \beta y q - \alpha\beta z = 0, \\ y(1-y)t - xys + [\gamma' - (\alpha+\beta'+1)y]q - \beta' x p - \alpha\beta' z = 0; \end{cases}$$

$$F_3 \begin{cases} x(1-x)r + ys + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]p - \alpha\beta z = 0, \\ y(1-y)t + xs + [\gamma - (\alpha'+\beta'+1)y]q - \alpha'\beta' z = 0; \end{cases}$$

$$F_4 \begin{cases} x(1-x)r - y^2 t - 2xys + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]p - (\alpha+\beta+1)yq - \alpha\beta z = 0, \\ y(1-y)t - x^2 r - 2xys + [\gamma' - (\alpha+\beta+1)y]q - (\alpha+\beta+1)xp - \alpha\beta z = 0. \end{cases}$$

Dans ces équations les lettres p, q, r, s, t désignent, comme il est d'usage, les dérivées partielles

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Pour vérifier ces équations, il suffit d'y remplacer les fonctions hypergéométriques et leurs dérivées partielles par leur développement en série double et de constater que le coefficient de $x^m y^n$ est identiquement nul, quels que soient les entiers positifs m et n.

XII. — Théorèmes généraux sur les systèmes de deux équations aux dérivées partielles simultanées du second ordre.

Les quatre systèmes d'équations aux dérivées partielles vérifiés par les fonctions F_1, F_2, F_3 F_4 se ramènent à la forme suivante :

$$(1) \qquad \begin{cases} r = a_1(x, y)s + a_2(x, y)p + a_3(x, y)q + a_4(x, y)z, \\ t = b_1(x, y)s + b_2(x, y)p + b_3(x, y)q + b_4(x, y)z. \end{cases}$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Nous allons démontrer quelques théorèmes généraux concernant ces systèmes. Rappelons d'abord un théorème, démontré par Bouquet [1], sur les systèmes de p équations aux différentielles totales entre n variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$ et p fonctions de ces variables $z_1, \ldots, z_p$.

On dit que le système de p équations

$$dz_j = \sum_{k=1}^{k=n} f_{j,k}(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_p)\, dx_k \qquad (j = 1, 2, \ldots, p)$$

est *complètement intégrable* lorsque les np coefficients $f_{j,k}$ vérifient identiquement (c'est-à-dire quels que soient $x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_p$) les $\frac{n(n-1)}{1.2}\, p$ conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial^2 z_j}{\partial x_r\, \partial x_s} = \frac{\partial^2 z_j}{\partial x_s\, \partial x_r}$$

ou

$$\frac{\partial f_{j,r}}{\partial x_s} + \frac{\partial f_{j,r}}{\partial z_1} f_{1,s} + \ldots + \frac{\partial f_{j,r}}{\partial z_p} f_{p,s} = \frac{\partial f_{j,s}}{\partial x_r} + \frac{\partial f_{j,s}}{\partial z_1} f_{1,r} + \ldots + \frac{\partial f_{j,s}}{\partial z_p} f_{p,r}.$$

Ceci rappelé, voici le théorème démontré par Bouquet :

Tout système complètement intégrable — où les coefficients $f_{j,k}$ sont des fonctions holomorphes de $x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_p$ dans le voisinage du système de valeurs

$$x_1 = \xi_1, \quad \ldots, \quad x_n = \xi_n, \quad z_1 = \zeta_1, \quad \ldots, \quad z_p = \zeta_p,$$

— admet un système d'intégrales $z_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, z_p(x_1, \ldots, x_n)$ holomorphes dans le domaine de $\xi_1, \ldots, \xi_n$ et prenant respectivement les valeurs $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$ pour $x_1 = \xi_1, \ldots, x_n = \xi_n$.

Ceci étant, revenons au système d'équations aux dérivées partielles (1); nous allons d'abord supposer que la quantité $1 - a_1 b_1$ n'est pas nulle identiquement (ce qui exclut provisoirement de nos considérations un de nos quatre systèmes, celui qui est vérifié par F_1). Lorsque les coefficients a et b vérifient, en outre, la condition d'intégrabilité, que nous indiquerons plus loin, on déduit facilement du théorème précédent la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Soit x_0, y_0 un système de valeurs des variables x et y tel que, pour des valeurs de ces variables voisines de x_0 et y_0, les coefficients des équations (1) soient holomorphes, et que la quantité $1 - a_1 b_1$ ne soit pas nulle pour $x = x_0$, $y = y_0$; on pourra satisfaire aux équations (1) par une fonction de x et y holomorphe dans le voisinage des valeurs x_0, y_0, les valeurs de cette fonction et des trois dérivées p, q, s étant arbitraires pour $x = x_0$, $y = y_0$.*

En effet, différentions la première des équations (1) par rapport à y, la deuxième par rapport à x, et remplaçons $\frac{\partial r}{\partial y}$ par $\frac{\partial s}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial x}$ par $\frac{\partial s}{\partial y}$. Nous obtenons ainsi deux équations du premier degré par rapport à $\frac{\partial s}{\partial x}$, $\frac{\partial s}{\partial y}$, d'où l'on pourra tirer ces deux quantités, car le déterminant des inconnues est précisément $1 - a_1 b_1$, que l'on suppose différent de zéro. On a, de cette façon, pour $\frac{\partial s}{\partial x}$, $\frac{\partial s}{\partial y}$,

---

[1] BOUQUET, *Sur l'intégration d'un système d'équations différentielles totales simultanées du premier ordre* (*Bull. Sciences math.*, t. III, 1872, p. 265-274). Ce théorème a été presque simultanément démontré par MÉRAY, *Nouveau précis d'Analyse infinitésimale*, 1872, p. 143, et MAYER, *Math. Annalen*, t. V, 1872, p. 448.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

des expressions linéaires en r, s, t, p, q, z que l'on peut ramener à ne contenir que s, p, q, z à l'aide des équations (1)

$$(2)\qquad \frac{\partial s}{\partial x} = \alpha_1 s + \alpha_2 p + \alpha_3 q + \alpha_4 z, \qquad \frac{\partial s}{\partial y} = \beta_1 s + \beta_2 p + \beta_3 q + \beta_4 z.$$

Cela posé, considérons le système des quatre équations aux différentielles totales, définissant les quatre fonctions z, p, q, s de x et y :

$$(3)\qquad \begin{cases} dz = p\,dx + q\,dy, \\ dp = (a_1 s + a_2 p + a_3 q + a_4 z)\,dx + s\,dy, \\ dq = s\,dx + (b_1 s + b_2 p + b_3 q + b_4 z)\,dy, \\ ds = (\alpha_1 s + \alpha_2 p + \alpha_3 q + \alpha_4 z)\,dx + (\beta_1 s + \beta_2 p + \beta_3 q + \beta_4 z)\,dy. \end{cases}$$

Les quatre conditions d'intégrabilité de ce système se réduisent à une seule (les autres se ramenant à de pures identités) qui est

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 s}{\partial y\,\partial x}$$

ou

$$\frac{\partial(\alpha_1 s + \alpha_2 p + \alpha_3 q + \alpha_4 z)}{\partial y} = \frac{\partial(\beta_1 s + \beta_2 p + \beta_3 q + \beta_4 z)}{\partial x},$$

que nous supposons remplie identiquement, ce qui veut dire que dans la dérivation on remplace

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial p}{\partial x},\ \frac{\partial p}{\partial y},\ \frac{\partial q}{\partial x},\ \frac{\partial q}{\partial y},\ \frac{\partial s}{\partial x},\ \frac{\partial s}{\partial y}$$

par leurs valeurs tirées des équations (3) et que la relation obtenue est vérifiée identiquement en z, p, q, s, x et y.

Si cette condition d'intégrabilité est remplie, le système de quatre équations aux différentielles totales (3) entre les deux variables indépendantes x et y et les quatre fonctions z, p, q, s est complètement intégrable; d'autre part, les coefficients de dx et dy sont, d'après les hypothèses faites, holomorphes dans le voisinage des valeurs $x = x_0$, $y = y_0$, quelles que soient les valeurs de z, p, q, s; on peut donc appliquer le théorème de Bouquet, et l'on a le théorème I qu'il fallait démontrer.

Dans ce qui suit, nous appelons *couple de valeurs singulières* un couple de valeurs $x = \xi$, $y = \eta$ tel que pour ces valeurs $1 - a_1 b_1$ s'annule, ou que les coefficients a et b ne soient pas, dans le voisinage de ces valeurs, des fonctions holomorphes de x et y, c'est-à-dire développables en séries de la forme

$$\sum_0^\infty A_{m,n}(x-\xi)^m(y-\eta)^n.$$

Il est, d'après ce qui précède, aisé de définir ce qu'il faut entendre par une fonction satisfaisant aux équations (1). Donnons à y une valeur constante y_0, qui ne soit pas une valeur singulière pour les coefficients a et b et qui n'annule pas la quantité $1 - a_1 b_1$. Soit T une portion du plan des x limitée par un contour simple, dans laquelle les coefficients a et b soient des fonctions holomorphes de x et la quantité $1 - a_1 b_1$ soit différente de zéro, à l'exception de points singuliers isolés les uns des autres. Soient x_0 et x deux points non singuliers du domaine T; joignons-les par une courbe quelconque $x_0 x$ située entièrement dans le domaine T et

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

ne passant par aucun des points singuliers; choisissons arbitrairement les valeurs de z et des dérivées p, q, s au point x_0. Au moyen de la continuité, l'on pourra en déduire les valeurs de la fonction z tout le long de la courbe $x_0\, x$.

Inversement, on pourra laisser x constant et faire varier y. De sorte que l'on pourra toujours passer de la valeur de la fonction pour $x = x_0$, $y = y_0$ à la valeur de la fonction pour $x = x_1$, $y = y_1$, pourvu que les couples de valeurs (x_0, y_0), (x_1, y_1) ne soient pas des couples de valeurs singulières.

Théorème II. — *Si l'on a cinq fonctions z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 satisfaisant aux équations* (1), *il y a entre ces fonctions une relation linéaire à coefficients constants, telle que*

$$C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 + C_4 z_4 + C_5 z_5 = 0.$$

Pour le démontrer, appelons p_i, q_i, s_i les dérivées de z_i, et faisons

$$\begin{aligned} Z &= C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots + C_5 z_5, \\ P &= C_1 p_1 + C_2 p_2 + \ldots + C_5 p_5, \\ Q &= C_1 q_1 + C_2 q_2 + \ldots + C_5 q_5, \\ S &= C_1 s_1 + C_2 s_2 + \ldots + C_5 s_5; \end{aligned}$$

les multiplicateurs C étant, pour le moment, des fonctions quelconques de x et y. Puisque les cinq fonctions satisfont aux équations (3), on a, comme on le vérifie facilement,

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} dZ &= P\,dx + Q\,dy + z_1\,dC_1 + z_2\,dC_2 + \ldots + z_5\,dC_5, \\ dP &= (a_1 S + a_2 P + a_3 Q + a_4 Z)\,dx + S\,dy + p_1\,dC_1 + p_2\,dC_2 + \ldots + p_5\,dC_5, \\ dQ &= S\,dx + (b_1 S + b_2 P + b_3 Q + b_4 Z)\,dy + q_1\,dC_1 + q_2\,dC_2 + \ldots + q_5\,dC_5, \\ dS &= (\alpha_1 S + \alpha_2 P + \alpha_3 Q + \alpha_4 Z)\,dx + (\beta_1 S + \beta_2 P + \beta_3 Q + \beta_4 Z)\,dy + s_1\,dC_1 + s_2\,dC_2 + \ldots + s_5\,dC_5. \end{aligned} \right.$$

Or, on peut toujours déterminer les fonctions C de façon que les quatre fonctions Z, P, Q, S soient nulles identiquement; et alors les équations (4) donnent

$$\begin{aligned} z_1\,dC_1 + z_2\,dC_2 + \ldots + z_5\,dC_5 &= 0, \\ p_1\,dC_1 + p_2\,dC_2 + \ldots + p_5\,dC_5 &= 0, \\ q_1\,dC_1 + q_2\,dC_2 + \ldots + q_5\,dC_5 &= 0, \\ s_1\,dC_1 + s_2\,dC_2 + \ldots + s_5\,dC_5 &= 0, \end{aligned}$$

qui, comparées aux équations $Z = 0$, $P = 0$, $Q = 0$, $S = 0$, montrent que

$$\frac{dC_1}{C_1} = \frac{dC_2}{C_2} = \ldots = \frac{dC_5}{C_5};$$

d'où l'on conclut que les rapports des multiplicateurs C à l'un d'entre eux sont constants, ce qui démontre le théorème.

Corollaire. — Si l'on a quatre fonctions z_1, z_2, z_3, z_4 satisfaisant aux équations (1), et telles que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

soit nul identiquement, il existe entre ces quatre fonctions une relation linéaire à coefficients constants, telle que

$$C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 + C_4 z_4 = 0.$$

On voit en effet que l'on peut, parce que D est nul, supposer dans le raisonnement précédent $C_3 = 0$.

Théorème III. — *Soient z_1, z_2, z_3, z_4 quatre fonctions satisfaisant aux équations* (1), *le déterminant* D *vérifie la relation*

$$d \log D = (a_2 + \alpha_1)\, dx + (b_3 + \beta_1)\, dy, \tag{5}$$

$$D = A\, e^{\int_{x_0}^{x} (a_2+\alpha_1)\, dx + \int_{y_0}^{y} (b_3+\beta_1)_{x_0}\, dy}. \tag{6}$$

En effet, on a

$$dD = \begin{vmatrix} dz_1 & dz_2 & dz_3 & dz_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_i \\ dp_i \\ q_i \\ s_i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_i \\ p_i \\ dq_i \\ s_i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_i \\ p_i \\ q_i \\ ds_i \end{vmatrix}, \tag{7}$$

où l'on n'a écrit qu'une colonne dans chacun des trois derniers déterminants; or, d'après les équations (3), le premier déterminant est nul, le deuxième est égal à $a_2 D\, dx$, le troisième à $b_3 D\, dy$, le dernier à $\alpha_1 D\, dx + \beta_1 D\, dy$; donc

$$dD = D[(a_2 + \alpha_1)\, dx + (b_3 + \beta_1)\, dy];$$

d'où résulte immédiatement l'équation (5).

Soient z_1, z_2, z_3, z_4 quatre fonctions satisfaisant aux équations (1), et telles que, pour $x = x_0$, $y = y_0$, le déterminant D ne soit pas nul; d'après le théorème III, ce déterminant ne sera nul que pour les couples de valeurs singulières. Nous donnerons à l'ensemble de ces quatre fonctions le nom de *système fondamental d'intégrales*. On voit immédiatement, d'après le théorème II, que *toute solution des équations différentielles peut s'exprimer linéairement au moyen des éléments d'un système fondamental quelconque.*

On peut encore démontrer cette proposition en remarquant que, si l'on pose

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 + C_4 z_4,$$

on pourra déterminer les coefficients constants C_i de façon que, pour $x = x_0$, $y = y_0$, z, p, q, s prennent des valeurs données d'avance. On aura, pour cela, à résoudre quatre équations du premier degré dont le déterminant D est différent de zéro, puisque z_1, z_2, z_3, z_4 forment un système fondamental d'intégrales.

Supposons, dans les équations (1), que, lorsqu'on laisse une des variables constantes, $y = \eta$ par exemple, les coefficients soient des fonctions uniformes de x dans une région T du plan des x et n'y présentent qu'un nombre fini de points dont les affixes forment avec η des couples de valeurs singulières. D'après le théorème I, une intégrale quelconque z des équations différentielles sera une fonction de x holomorphe en tous les points situés dans la région T, excepté aux points singuliers en question.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Soit ξ un de ces points singuliers, et soient z_1, z_2, z_3, z_4 les éléments d'un système fondamental d'intégrales. Supposons que, y restant égal à η, la variable x fasse le tour du point ξ en restant dans le domaine T, et appelons (z_1), (z_2), (z_3), (z_4) les nouvelles valeurs que prennent les intégrales quand le tour est accompli. Ces nouvelles fonctions sont encore des solutions des équations, et, d'après ce qui précède, elles forment encore un système fondamental. On a donc

$$(8) \qquad (z_i) = \lambda_{i1} z_1 + \lambda_{i2} z_2 + \lambda_{i3} z_3 + \lambda_{i4} z_4 \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

le déterminant des constantes λ_{ik} étant différent de zéro. Les conséquences de ces relations sont analogues à celles qui se présentent, dans la théorie des équations différentielles linéaires à une variable indépendante (*voir*, par exemple, les *Annales de l'École Normale*, t. IV, Mémoire de Tannery, p. 134 et suiv.).

XIII. — Intégrale générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions F_2, F_3, F_4.

Voici comment on peut déterminer les intégrales générales des équations F_2, F_3, F_4, qui rentrent dans la catégorie des équations que nous venons d'étudier.

1° *Équations de* F_2. — Dans les équations de F_2

$$F_2 \begin{cases} x(1-x)r - xys + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]p - \beta' yq - \alpha\beta z = 0, \\ y(1-y)t - xys + [\gamma' - (\alpha + \beta' + 1)y]q - \beta' xp - \alpha\beta' z = 0, \end{cases}$$

posons

$$(9) \qquad z = x^{\lambda} y^{\mu} z',$$

λ et μ désignant deux indéterminées.

Nous obtenons (après suppression du facteur $x^{\lambda} y^{\mu}$) pour les équations vérifiées par la fonction z'

$$(10) \quad \begin{cases} x(1-x)r' - xys' + [2\lambda + \gamma - (\alpha + \beta + 1)x]p' \\ \qquad - (\lambda + \beta)yq' - \left[(\lambda + \mu + \alpha)(\lambda + \beta) - \dfrac{\lambda(\lambda + \gamma - 1)}{x}\right] z' = 0, \\ y(1-y)t' - xys' + [2\mu + \gamma' - (\mu + \lambda + \alpha + \beta' + 1)y]q' \\ \qquad - (\mu + \beta)xp' - \left[(\lambda + \mu + \alpha)(\mu + \beta') - \dfrac{\mu(\mu + \gamma' - 1)}{y}\right] z' = 0. \end{cases}$$

On aperçoit immédiatement que ces équations prennent la même forme que les équations de F_2, si l'on annule simultanément les deux expressions

$$\lambda(\lambda + \gamma - 1), \qquad \mu(\mu + \gamma' - 1).$$

ce qui nous donne quatre combinaisons pour les indéterminées λ et μ

$$\begin{array}{l} \lambda = 0, \quad 1 - \gamma, \quad 0, \quad 1 - \gamma, \\ \mu = 0, \quad 0, \quad 1 - \gamma', \quad 1 - \gamma'. \end{array}$$

La combinaison $\lambda = 0$, $\mu = 0$ redonne identiquement les équations de F_2; la seconde combi-

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

naison $\lambda = 1 - \gamma$, $\mu = 0$ conduit aux équations

$$x(1-x)r' - xys' + [2-\gamma - (\alpha+1-\gamma+\beta+1-\gamma+1)x]p' \\ - (\beta+1-\gamma)yq' - (\alpha+1-\gamma)(\beta+1-\gamma)z' = 0,$$

$$y(1-y)t' - xys' + [\gamma' - (\alpha+1-\gamma+\beta'+1)y]q' - \beta' x p' - (\alpha+1-\gamma)\beta' z' = 0.$$

Ces équations se déduisent simplement de celles de F_2 en y remplaçant α, β, β', γ, γ' respectivement par $\alpha + 1 - \gamma$, $\beta + 1 - \gamma$, β', $2 - \gamma$, γ'; nous en connaissons donc une intégrale : la fonction

$$z' = F_2(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, \beta', 2-\gamma, \gamma', x, y).$$

Par la formule (9), nous en déduisons une intégrale des équations de F_2, distincte de F_2

$$z = x^{1-\gamma} F_2(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, \beta', 2-\gamma, \gamma', x, y).$$

En partant des combinaisons $\lambda = 0$, $\mu = 1 - \gamma'$ et $\lambda = 1 - \gamma$, $\mu = 1 - \gamma'$, nous obtenons par la même méthode deux nouvelles intégrales. Finalement nous obtenons pour l'intégrale générale des équations de F_2

$$(11) \qquad \begin{aligned} z = {} & A F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y) \\ & + B x^{1-\gamma} F_2(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, \beta', 2-\gamma, \gamma', x, y) \\ & + C y^{1-\gamma'} F_2(\alpha+1-\gamma', \beta, \beta'+1-\gamma', \gamma, 2-\gamma', x, y) \\ & + D x^{1-\gamma} y^{1-\gamma'} F_2(\alpha+2-\gamma-\gamma', \beta+1-\gamma, \beta'+1-\gamma', 2-\gamma, 2-\gamma', x, y). \end{aligned}$$

A, B, C, D étant des constantes arbitraires. Cette intégrale, dans laquelle on considère y comme une constante, est, dans le voisinage du point singulier $x = 0$, de la forme trouvée pour le cas général.

2° *Équations de* F_3. — Les équations F_3

$$F_3 \begin{cases} x(1-x)r + ys + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]p - \alpha\beta z = 0, \\ y(1-y)t + xs + [\gamma - (\alpha'+\beta'+1)y]q - \alpha'\beta' z = 0 \end{cases}$$

peuvent, par un changement de variables, se ramener à la forme F_2. Pour le montrer faisons, dans les équations F_3,

$$x = \frac{1}{\xi}, \qquad y = \frac{1}{\eta};$$

ces équations deviennent

$$\xi^2(\xi-1)\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \xi^2\eta\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta} + \xi[(2-\gamma)\xi + \alpha + \beta - 1]\frac{\partial z}{\partial\xi} - \alpha\beta z = 0,$$

$$\eta^2(\eta-1)\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + \eta^2\xi\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta} + \eta[(2-\gamma)\eta + \alpha' + \beta' - 1]\frac{\partial z}{\partial\eta} - \alpha'\beta' z = 0.$$

Dans ces équations, posons $z = \xi^\lambda \eta^\mu z'$; on peut déterminer λ et μ de façon qu'après la substitution le premier membre de la première équation soit divisible par $\xi^{\lambda+1}\eta^\mu$, le premier membre de la deuxième par $\xi^\lambda\eta^{\mu+1}$; il suffit, pour cela, de prendre $\lambda = \alpha$, $\mu = \alpha'$; alors les

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

équations en z' sont

$$(\xi - \xi^2)\frac{\partial^2 z'}{\partial \xi^2} - \xi\eta\frac{\partial^2 z'}{\partial \xi\,\partial \eta} + [\alpha - \beta + 1 - \xi(2\alpha + \alpha' + 2 - \gamma)]\frac{\partial z'}{\partial \xi} - \alpha\eta\frac{\partial z'}{\partial \eta} - \alpha(\alpha + \alpha' - \gamma + 1)z' = 0,$$

$$(\eta - \eta^2)\frac{\partial^2 z'}{\partial \eta^2} - \xi\eta\frac{\partial^2 z'}{\partial \xi\,\partial \eta} + [\alpha' - \beta' + 1 - \eta(2\alpha' + \alpha + 2 - \gamma)]\frac{\partial z'}{\partial \eta} - \alpha'\xi\frac{\partial z'}{\partial \xi} - \alpha'(\alpha + \alpha' - \gamma + 1)z' = 0.$$

Ces équations sont de la forme de celles de F_2; on passe des équations de F_2 à celles-là en remplaçant $\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ par $\alpha + \alpha' - \gamma + 1, \alpha, \alpha', \alpha - \beta + 1, \alpha' - \beta' + 1$. Comme on connaît l'intégrale générale des équations de F_2, il en résulte l'intégrale générale des équations de F_3

$$\begin{aligned} z = {} & A x^{-\alpha} y^{-\alpha'} F_2\left(\alpha + \alpha' - \gamma + 1, \alpha, \alpha', \alpha - \beta + 1, \alpha' - \beta' + 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) \\ & + B x^{-\beta} y^{-\alpha'} F_2\left(\beta + \alpha' - \gamma + 1, \beta, \alpha', \beta - \alpha + 1, \alpha' - \beta' + 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) \\ & + C x^{-\alpha} y^{-\beta'} F_2\left(\alpha + \beta' - \gamma + 1, \alpha, \beta', \alpha - \beta + 1, \beta' - \alpha' + 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) \\ & + D x^{-\beta} y^{-\beta'} F_2\left(\beta + \beta' - \gamma + 1, \beta, \beta', \beta - \alpha + 1, \beta' - \alpha' + 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right). \end{aligned}$$

Notamment la fonction $F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y)$ qui est une intégrale particulière des équations doit pouvoir s'exprimer sous la forme précédente; effectivement, en posant

$$f(\lambda, \mu, \rho, \sigma) = (-1)^{\lambda(\rho-1)-\mu}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\rho - \lambda)\Gamma(\sigma - \mu)}{\Gamma(\rho)\Gamma(\sigma)\Gamma(\gamma - \lambda - \mu)},$$

on a d'après la formule (34 — X)

$$\begin{aligned} F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y) = {} & f(\alpha, \alpha', \beta, \beta')\, x^{-\alpha} y^{-\alpha'} F_2\left(\alpha + \alpha' - \gamma + 1, \alpha, \alpha', \alpha - \beta + 1, \alpha' - \beta' + 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) \\ & + f(\beta, \alpha', \alpha, \beta')\, x^{-\beta} y^{-\alpha'} F_2\left(\beta + \alpha' - \gamma + 1, \beta, \alpha', \beta - \alpha + 1, \alpha' - \beta' + 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) \\ & + f(\alpha, \beta', \beta, \alpha')\, x^{-\alpha} y^{-\beta'} F_2\left(\alpha + \beta' - \gamma + 1, \alpha, \beta', \alpha - \beta + 1, \beta' - \alpha' + 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) \\ & + f(\beta, \beta', \alpha, \alpha')\, x^{-\beta} y^{-\beta'} F_2\left(\beta + \beta' - \gamma + 1, \beta, \beta', \beta - \alpha + 1, \beta' - \alpha' + 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right). \end{aligned}$$

3° *Équations de* F_4. — En faisant dans les équations de F_4

$$F_4 \begin{cases} x(1-x)r - y^2 t - 2xys + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]p - (\alpha + \beta + 1)yq - \alpha\beta z = 0, \\ y(1-y)t - x^2 r - 2xys + [\gamma' - (\alpha + \beta + 1)y]q - (\alpha + \beta + 1)xp - \alpha\beta z = 0 \end{cases}$$

la substitution $z = x^\lambda y^\mu z'$, on obtient pour z' les équations

$$\begin{aligned} & x(1-x)r' - y^2 t' - 2xys' + [2\lambda + \gamma - (2\lambda + 2\mu + \alpha + \beta + 1)x]p' - (2\lambda + 2\mu + \alpha + \beta + 1)yq' \\ & \qquad - \left[(\lambda + \mu + \alpha)(\lambda + \mu + \beta) - \frac{\lambda(\lambda + \gamma - 1)}{x}\right]z' = 0, \\ & y(1-y)t' - x^2 r' - 2xys' + [2\mu + \gamma' - (2\lambda + 2\mu + \alpha + \beta + 1)y]q' - (2\lambda + 2\mu + \alpha + \beta + 1)xp' \\ & \qquad - \left[(\lambda + \mu + \alpha)(\lambda + \mu + \beta) - \frac{\mu(\mu + \gamma' - 1)}{y}\right]z' = 0, \end{aligned}$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

qui se ramènent aux équations de F_4 pour les valeurs suivantes de λ et μ

$$\lambda : \quad 0, \quad 1-\gamma, \quad 0, \quad 1-\gamma,$$
$$\mu : \quad 0, \quad 0, \quad 1-\gamma', \quad 1-\gamma'.$$

On obtient ainsi quatre intégrales particulières des équations de F_4; d'où l'intégrale générale

$$\begin{aligned} z = {} & A F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y) \\ & + B x^{1-\gamma} F_4(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, \gamma', x, y) \\ & + C y^{1-\gamma'} F_4(\alpha+1-\gamma', \beta+1-\gamma', \gamma, 2-\gamma', x, y) \\ & + D x^{1-\gamma} y^{1-\gamma'} F_4(\alpha+2-\gamma-\gamma', \beta+2-\gamma-\gamma', 2-\gamma, 2-\gamma', x, y). \end{aligned}$$

Remarque. — La méthode employée pour obtenir l'intégrale générale des équations F_2, F_3, F_4 tombe en défaut lorsque les éléments α, α', β, β', γ, γ' prennent certaines valeurs spéciales; pour F_2 et F_4 il faut supposer que ni γ, ni γ' ne sont entiers; pour F_3 qu'aucune des deux différences $\alpha-\beta$, $\alpha'-\beta'$ n'est un entier; dans le cas contraire il se passe un fait analogue à ce qui se produit pour l'équation de Gauss (I, 6°) dont l'intégrale générale contient un *terme logarithmique* lorsque γ est entier.

Imaginons, par exemple, que dans les équations de F_4, γ et γ' soient voisins de 1 :

$$\gamma = 1-h, \qquad \gamma' = 1-k.$$

Nous connaissons quatre intégrales indépendantes :

$$\begin{aligned} z_1 &= F_4(\alpha, \beta, 1-h, 1-k, x, y), \\ z_2 &= x^h F_4(\alpha+h, \beta+h, 1+h, 1-k, x, y), \\ z_3 &= y^k F_4(\alpha+k, \beta+k, 1-h, 1+k, x, y), \\ z_4 &= x^h y^k F_4(\alpha+k+h, \beta+k+h, 1+h, 1+k, x, y). \end{aligned}$$

Pour $\gamma = \gamma' = 1$ ces quatre intégrales se confondent en une seule et la formule générale tombe en défaut. Mais nous pouvons leur substituer quatre autres intégrales indépendantes :

$$Z_1 = z_1, \qquad Z_2 = \frac{z_2 - z_1}{h}, \qquad Z_3 = \frac{z_3 - z_1}{k}, \qquad Z_4 = \frac{z_4 - z_3 - z_2 + z_1}{hk}.$$

Quand h et k tendent vers zéro, elles tendent respectivement vers

$$\begin{aligned} Z_1 &= F_4(\alpha, \beta, 1, 1, x, y) = \varphi(x, y), \\ Z_2 &= \varphi(x, y) \operatorname{Log} x + \frac{\partial F_4}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_4}{\partial \beta} + 2\frac{\partial F_4}{\partial \gamma'}, \\ Z_3 &= \varphi(x, y) \operatorname{Log} y + \frac{\partial F_4}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_4}{\partial \beta} + 2\frac{\partial F_4}{\partial \gamma'}, \\ Z_4 &= \varphi(x, y) \operatorname{Log} x \operatorname{Log} y + \left(\frac{\partial F_4}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_4}{\partial \beta} + 2\frac{\partial F_4}{\partial \gamma'}\right) \operatorname{Log} x + \left(\frac{\partial F_4}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_4}{\partial \beta} + 2\frac{\partial F_4}{\partial \gamma'}\right) \operatorname{Log} y \\ & + \left(\frac{\partial^2 F_4}{\partial \alpha^2} + 2\frac{\partial^2 F_4}{\partial \alpha\, \partial \beta} + \frac{\partial^2 F_4}{\partial \beta^2} + 2\frac{\partial^2 F_4}{\partial \alpha\, \partial \gamma'} + 2\frac{\partial^2 F_4}{\partial \alpha\, \partial \gamma'} + 2\frac{\partial^2 F_4}{\partial \beta\, \partial \gamma'} + 2\frac{\partial^2 F_4}{\partial \beta\, \partial \gamma'} + 4\frac{\partial^2 F_4}{\partial \gamma'\, \partial \gamma'}\right) \end{aligned}$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

(dans les dérivées partielles $\frac{\partial F_1}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha^2}$, ..., il faut faire $\gamma = \gamma' = 1$ après la dérivation). On obtient ainsi un système de quatre intégrales indépendantes des équations F_1 lorsque $\gamma = \gamma' = 1$.

XIV. — Intégration du système de la fonction F_1.

Comme on l'a déjà remarqué, les théorèmes généraux du paragraphe XII ne s'appliquent plus aux équations de la fonction F_1

$$F_1 \begin{cases} x(1-x)r + y(1-x)s + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]p - \beta y q - \alpha\beta z = 0, \\ y(1-y)t + x(1-y)s + [\gamma - (\alpha+\beta'+1)y]q - \beta' x p - \alpha\beta' z = 0, \end{cases}$$

car pour ces équations $1 - a_1 b_1 = 1 - \left(-\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{x}{y}\right)$ est identiquement nul.

Différentions la première équation par rapport à y, la deuxième par rapport à x et remplaçons $\frac{\partial r}{\partial y}$ et $\frac{\partial t}{\partial x}$ respectivement par $\frac{\partial s}{\partial x}$ et $\frac{\partial s}{\partial y}$:

$$x(1-x)\frac{\partial s}{\partial x} + y(1-x)\frac{\partial s}{\partial y} + [\gamma + 1 - (\alpha+\beta+2)x]s - \beta y t - \beta(\alpha+1)q = 0,$$

$$y(1-y)\frac{\partial s}{\partial y} + x(1-y)\frac{\partial s}{\partial x} + [\gamma + 1 - (\alpha+\beta'+2)y]s - \beta' x r - \beta'(\alpha+1)p = 0.$$

Entre ces deux équations du premier degré en $\frac{\partial s}{\partial x}$ et $\frac{\partial s}{\partial y}$, nous pouvons éliminer ces deux quantités puisque leur déterminant est nul; on obtient ainsi l'équation

$$\beta' x(1-x)r - \beta y(1-y)t + [(\gamma - \alpha - \beta - 1)x - (\gamma - \alpha - \beta' - 1)y + (\beta - \beta')xy]s$$
$$+ \beta'(\alpha+1)(1-x)p - \beta(\alpha+1)(1-y)q = 0$$

qui, simplifiée à l'aide des équations de F_1, se réduit à

$$(x - y)s - \beta' p + \beta q = 0. \tag{12}$$

La fonction F_1 vérifie donc aussi cette équation, qui est une conséquence des deux autres [1];

---

[1] L'équation aux dérivées partielles

$$(x - y)s - \beta' p + \beta q = 0,$$

rencontrée déjà par Euler et Poisson, a fait l'objet d'importants travaux, notamment de Riemann (*Œuvres*, trad. Laugel, p. 177); elle intervient en particulier dans la recherche des surfaces minima. Pour tout ce qui la concerne, *voir* Darboux, *Théorie des Surfaces*, t. II, p. 81. *Voir* aussi un article de P. Appell, *Sur une équation linéaire aux dérivées partielles* (*Bull. Sc. math.*, t. VI, 1882, p. 314-318) où il détermine la fonction la plus générale

$$f(x, y) = \Sigma a_{m,n} x^m y^n$$

vérifiant cette équation; on doit avoir

$$a_{m,n} = \frac{(\beta, m)(\beta', n)}{(1, m)(1, n)}\psi(m - n),$$

la fonction $\psi(m + n)$ étant arbitraire. Si l'on prend

$$\psi(m + n) = \frac{(\alpha, m + n)}{(\gamma, m + n)},$$

on retrouve précisément la fonction F_1.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

et, par suite, elle vérifie les trois équations

$$(13)\quad \begin{cases} x(1-x)(x-y)r + [\gamma(x-y) - (\alpha+\beta+1)x^2 + (\alpha+\beta-\beta'+1)xy + \beta' y]p \\ \qquad - \beta y(1-y)q - \alpha\beta(x-y)z = 0, \\ y(1-y)(y-x)t + [\gamma(y-x) - (\alpha+\beta'+1)y^2 + (\alpha-\beta+\beta'+1)xy + \beta x]q \\ \qquad - \beta' x(1-x)p - \alpha\beta'(y-x)z = 0, \\ (x-y)s - \beta' p + \beta q = 0. \end{cases}$$

On voit aisément que, si l'on calcule à l'aide de ces équations $\frac{\partial r}{\partial y}$ et $\frac{\partial s}{\partial x}$, les deux expressions trouvées sont identiques en x, y, z, p, q; de même pour $\frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial y}$. On a donc un système de trois équations linéaires simultanées de la forme

$$(14)\quad \begin{cases} r = a_1 p + a_2 q + a_3 z, \\ t = b_1 p + b_2 q + b_3 z, \\ s = c_1 p + c_2 q + c_3 z, \end{cases}$$

les a, b, c étant des fonctions de x et y, et les conditions d'intégrabilité $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial y}$ étant remplies identiquement, c'est-à-dire quels que soient z, p, q, x et y. En considérant le système des équations aux différentielles totales, complètement intégrable, définissant z, p, q en fonction de x et y

$$(15)\quad \begin{cases} dz = p\,dx + q\,dy, \\ dp = (a_1 p + a_2 q + a_3 z)\,dx + (c_1 p + c_2 q + c_3 z)\,dy, \\ dq = (c_1 p + c_2 q + c_3 z)\,dx + (b_1 p + b_2 q + b_3 z)\,dy, \end{cases}$$

on pourra appliquer à ce système le théorème de Bouquet déjà cité, et l'on verra que :

Théorème *a*. — *Si pour $x = x_0$, $y = y_0$ les coefficients a, b, c sont holomorphes, on pourra satisfaire aux équations* (14) *par une fonction z de x et y holomorphe pour $x = x_0$, $y = y_0$; les valeurs de cette fonction et des dérivées p et q étant arbitraires pour $x = x_0$, $y = y_0$.*

On démontre, comme nous l'avons fait précédemment, que :

Théorème *b*. — *Si l'on a quatre fonctions z_1, z_2, z_3, z_4 vérifiant les équations* (14), *il existe entre ces fonctions une relation linéaire à coefficients constants*

$$C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 + C_4 z_4 = 0.$$

Corollaire. — Si l'on a trois fonctions z_1, z_2, z_3 vérifiant les équations (14) et telles que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}$$

soit nul identiquement, il existe entre ces fonctions une relation linéaire à coefficients constants.

Théorème *c*. — *Si l'on a trois fonctions z_1, z_2, z_3 vérifiant les équations* (14), *le déterminant Δ satisfait à la relation*

$$(16)\quad d\log\Delta = (a_1 + c_2)\,dx + (c_1 + b_2)\,dy.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Les conclusions qu'on tire de ces théorèmes relativement à l'intégrale générale des équations (14) sont analogues à celles du paragraphe précédent [1].

Dans le cas particulier des équations (13), on a

$$a_1 + c_2 = -\frac{\gamma(x-y) - (\alpha+\beta+1)x^2 + (\alpha+\beta-\beta'+1)xy + \beta' y}{(x-y)x(1-x)} - \frac{\beta}{x-y}$$
$$= \frac{\beta'-\gamma}{x} + \frac{\alpha+\beta+1-\gamma}{1-x} - \frac{\beta+\beta'}{x-y},$$

et

$$c_1 + b_2 = \frac{\beta-\gamma}{y} + \frac{\alpha+\beta'+1-\gamma}{1-y} + \frac{\beta+\beta'}{x-y},$$

d'où, d'après (16),

$$\Delta = Ax^{\beta'-\gamma}y^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'-1}(x-y)^{-(\beta+\beta')}.$$

XV. — Tableau des soixante intégrales des équations de la fonction F_1.

De même que l'équation différentielle de la fonction hypergéométique de Gauss admet 24 intégrales de la forme

$$x^l(1-x)^m F(\lambda, \mu, \nu, t),$$

t étant rationnel et du premier degré en x, il est possible de trouver 60 fonctions du type suivant :

$$x^l(1-x)^m y^{l'}(1-y)^{m'}(x-y)^n F_1(\lambda, \mu, \mu', \nu, t, t'),$$

t et t' étant rationnels en x et y, vérifiant le système d'équations aux dérivées partielles de F_1.

Pour obtenir le tableau de ces 60 intégrales, nous développerons une méthode indiquée par M. Goursat [2], qui est l'extension au cas de deux variables de la méthode suivie au paragraphe I-6° pour former le tableau des 24 intégrales de Kummer.

La méthode de M. Goursat repose sur la proposition suivante : *La fonction*

$$z(x, y) = \int_g^h u^{\beta+\beta'-\gamma}(u-1)^{\gamma-\alpha-1}(u-x)^{-\beta}(u-y)^{-\beta'}\,du,$$

où g et h désignent deux des cinq quantités $0, 1, \infty, x, y$, est une intégrale du système d'équations aux dérivées partielles de F_1 [3].

Pour démontrer cette proposition, due à M. E. Picard [4], il suffit de calculer les dérivées partielles p, q, r, s, t de la fonction z et de substituer leurs valeurs ainsi trouvées dans les équations de F_1. Mais pour simplifier les calculs en leur donnant plus de symétrie, il est préférable [5]

---

(1) Un autre exemple des trois équations du type (14) a été donné par M. P. Appell (*Annaes scientificos da Academia Polytechnica do Porto*, t. XII, 1917, p. 12), et (*Rendi Conti di Palermo*, t. XLVI, 1923, p. 1).

(2) E. Goursat, *Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables* (*Comptes rendus*, t. 95, p. 717).

(3) Bien entendu les exposants doivent être tels que l'intégrale ait un sens avec les limites g et h.

(4) E. Picard, *Ann. Ec. Norm.*, 2e série, t. X, 1881, p. 305.

(5) *Cf.* E. Picard, *Cours d'analyse*, t. III, p. 319.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

de former les équations vérifiées par la fonction

$$(17)\qquad z(x, y) = \int_g^h (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}(u-y)^{\mu-1}\,du,$$

g et h étant deux des quantités a_1, a_2, ∞, et b_1, b_2 λ, μ étant tels que l'intégrale ait un sens.

En posant

$$U(u) = (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1},$$

on obtient immédiatement le tableau des dérivées partielles de z

$$p = -(\lambda-1)\int_g^h U(u-x)^{\lambda-2}(u-y)^{\mu-1}\,du; \qquad q = -(\mu-1)\int_g^h U(u-x)^{\lambda-1}(u-y)^{\mu-2}\,du,$$

$$r = (\lambda-1)(\lambda-2)\int_g^h U(u-x)^{\lambda-3}(u-y)^{\mu-1}\,du; \qquad t = (\mu-1)(\mu-2)\int_g^h U(u-x)^{\lambda-1}(u-y)^{\mu-3}\,du,$$

$$s = (\lambda-1)(\mu-1)\int_g^h U(u-x)^{\lambda-2}(u-y)^{\mu-2}\,du.$$

Cela étant, considérons la fonction

$$G(u) = (u-a_1)^{b_1}(u-a_2)^{b_2}(u-x)^{\lambda-2}(u-y)^{\mu-1},$$

elle s'annule pour les limites g et h du moment que l'intégrale a un sens.

Calculons sa dérivée logarithmique

$$\frac{1}{G}\frac{dG}{du} = \frac{b_1}{u-a_1} + \frac{b_2}{u-a_2} + \frac{\lambda-2}{u-x} + \frac{\mu-1}{u-y}.$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{dG}{du} = {} & U[b_1(u-a_2)+b_2(u-a_1)](u-x)^{\lambda-2}(u-y)^{\mu-1}\\ & +(\lambda-2)U[(u-a_1)(u-a_2)](u-x)^{\lambda-3}(u-y)^{\mu-1}\\ & +(\mu-1)U[(u-a_1)(u-a_2)](u-x)^{\lambda-2}(u-y)^{\mu-2}.\end{aligned}$$

Dans le crochet de la première ligne nous écrirons

$$b_1(u-a_2)+b_2(u-a_1) = (b_1+b_2)(u-x)+b_1(x-a_2)+b_2(x-a_1),$$

dans celui de la deuxième ligne

$$(u-a_1)(u-a_2) = (u-x)^2+(u-x)[x-a_1+x-a_2]+(x-a_1)(x-a_2),$$

dans celui de la troisième ligne

$$(u-a_1)(u-a_2) = (u-x)(u-y)+(u-x)(y-a_1)+(u-y)(x-a_2)+(y-a_1)(x-a_2).$$

Ceci fait il vient

$$\begin{aligned}\frac{dG}{du} = {} & (\lambda-2)(x-a_1)(x-a_2)U(u-x)^{\lambda-3}(u-y)^{\mu-1}\\ & +(\mu-1)(y-a_1)(y-a_2)U(u-x)^{\lambda-2}(u-y)^{\mu-2}\\ & +[b_1(x-a_2)+b_2(x-a_1)+(\lambda-2)(x-a_1)(x-a_2)+(\mu-1)(x-a_1)(x-a_2)]U(u-x)^{\lambda-2}(u-y)^{\mu-1}\\ & +(\mu-1)(y-a_1)(y-a_2)U(u-x)^{\lambda-1}(u-y)^{\mu-2}\\ & +[b_1+b_2+\lambda-2+\mu-1]U(u-x)^{\lambda-1}(u-y)^{\mu-1}.\end{aligned}$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Multiplions les deux membres de cette égalité par $(\lambda - 1)\,du$ et intégrons-la entre les limites g et h; le premier membre devient

$$(\lambda - 1)\int_g^h dG = (\lambda - 1)[G(h) - G(g)] = 0,$$

puisque d'après la remarque faite plus haut G s'annule aux limites; d'autre part les diverses intégrales qui figurent au second membre s'identifient immédiatement avec les dérivées partielles de z; on a donc

$$(18)\quad (x - a_1)(x - a_2)r + (y - a_1)(x - a_2)s - [(b_2 + \lambda - 2)(x - a_1) + (b_1 + \lambda + \mu - 3)(x - a_2)]p$$
$$- (\lambda - 1)(y - a_1)q + (\lambda - 1)(b_1 + b_2 + \lambda + \mu - 3)z = 0.$$

Par symétrie en échangeant les rôles de x et y, λ et μ, on en déduit la seconde équation aux dérivées partielles vérifiée par z

$$(19)\quad (y - a_1)(y - a_2)t + (x - a_1)(y - a_2)s - [(b_2 + \mu - 2)(y - a_1) + (b_1 + \lambda + \mu - 3)(y - a_2)]q$$
$$- (\mu - 1)(x - a_1)p + (\mu - 1)(b_1 + b_2 + \lambda + \mu - 3)z = 0.$$

En faisant dans les équations (18) et (19)

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = 1,$$
$$b_1 = \beta + \beta' + 1 - \gamma, \qquad b_2 = \gamma - \alpha, \qquad \lambda = 1 - \beta, \qquad \mu = 1 - \beta',$$

elles s'identifient immédiatement avec les équations de la fonction F_1.

Par conséquent la fonction

$$(20)\qquad z(x, y) = \int_g^h u^{\beta+\beta'-\gamma}(u-1)^{\gamma-\alpha-1}(u-x)^{-\beta}(u-y)^{-\beta'}\,du$$

vérifie les équations de F_1.

En prenant pour g et h deux des cinq quantités 0, 1, ∞, x, y, nous obtenons ainsi dix intégrales particulières des équations de F_1, que nous écrirons, en les multipliant par des facteurs constants dont nous disposerons plus loin

$$V = u^{\beta+\beta'-\gamma}(u-1)^{\gamma-\alpha-1}(u-x)^{-\beta}(u-y)^{-\beta'}.$$

$$z_1 = C_1\int_1^{+\infty} V\,du, \qquad z_2 = C_2\int_0^{-\infty} V\,du, \qquad z_3 = C_3\int_0^{1} V\,du, \qquad z_4 = C_4\int_0^{x} V\,du,$$

$$z_5 = C_5\int_0^{y} V\,du, \qquad z_6 = C_6\int_1^{x} V\,du, \qquad z_7 = C_7\int_1^{y} V\,du, \qquad z_8 = C_8\int_x^{+\infty} V\,du,$$

$$z_9 = C_9\int_y^{+\infty} V\,du, \qquad z_{10} = C_{10}\int_x^{y} V\,du.$$

Pour que chacune de ces intégrales ait un sens il faut que les constantes α, β, β', γ soient soumises à certaines restrictions; la fonction V étant multiforme, il faut en outre préciser le chemin suivi et la détermination initiale des quantités

$$u^{\beta+\beta'-\gamma}, \qquad (u-1)^{\gamma-\alpha-1}, \qquad (u-x)^{-\beta}, \qquad (u-y)^{-\beta'}.$$

Alors seulement, les constantes C étant choisies, les dix intégrales des équations de F_1 seront des fonctions définies sans ambiguïté. Pour présenter ces résultats nous ferons d'abord un

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

changement de variable dans les intégrales définies. Si, dans la formule (20), on pose

$$u = \frac{1}{v},$$

l'intégrale correspondante $z(x, y)$ des équations de F_1 prend la forme

$$(20\,bis) \qquad z(x, y) = \int_h^{\frac{1}{g}} v^{\alpha-1}(1-v)^{\gamma-\alpha-1}(1-vx)^{-\beta}(1-vy)^{-\beta'}\,dv.$$

En faisant cette transformation dans les 10 intégrales z, nous obtenons

$$W = v^{\alpha-1}(1-v)^{\gamma-\alpha-1}(1-vx)^{-\beta}(1-vy)^{-\beta'},$$

$$z_1 = C_1\int_0^1 W\,dv, \qquad z_2 = C_2\int_0^{-\infty} W\,dv, \qquad z_3 = C_3\int_1^{+\infty} W\,dv, \qquad z_4 = C_4\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} W\,dv,$$

$$z_5 = C_5\int_{\frac{1}{y}}^{+\infty} W\,dv, \qquad z_6 = C_6\int_{\frac{1}{x}}^{1} W\,dv, \qquad z_7 = C_7\int_{\frac{1}{y}}^{1} W\,dv, \qquad z_8 = C_8\int_0^{\frac{1}{x}} W\,dv,$$

$$z_9 = C_9\int_0^{\frac{1}{y}} W\,dv, \qquad z_{10} = C_{10}\int_{\frac{1}{y}}^{\frac{1}{x}} W\,dv.$$

Voici maintenant les conditions qui achèvent de préciser la définition de ces intégrales :

Première intégrale :

$$z_1 = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 W\,dv.$$

On doit avoir $\mathcal{R}(\alpha) > 0$, $\mathcal{R}(\gamma-\alpha) > 0$, x et y ne devant pas prendre de valeurs réelles comprises entre 1 et $+\infty$; v suit l'axe réel de 0 à 1; on prend $\arg v = \arg 1 - v = 0$ et $\arg(1-vx) = 0$ pour $x = 0$, $\arg(1-vy) = 0$ pour $y = 0$.

Deuxième intégrale :

$$z_2 = e^{-\alpha\pi i}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+\beta'+1-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+\beta'+1-\gamma)}\int_0^{-\infty} W\,dv.$$

On doit avoir $\mathcal{R}(\alpha) > 0$, $\mathcal{R}(\beta+\beta'+1-\gamma) > 0$, x et y ne devant pas prendre de valeurs réelles comprises entre $-\infty$ et 0; v suit l'axe réel de 0 à $-\infty$; on prend

$$\arg v = +\pi, \qquad \arg(1-v) = 0,$$

$$\arg(1-vx) = 0 \quad \text{pour } x = 0; \qquad \arg(1-vy) = 0 \quad \text{pour } y = 0.$$

Troisième intégrale :

$$z_3 = e^{-\alpha+\beta+\beta'+1-\gamma\pi i}\frac{\Gamma(\beta+\beta'+1-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\beta+\beta'+1-\gamma)}\int_1^{+\infty} W\,dv.$$

On doit avoir $\mathcal{R}(\gamma-\alpha) > 0$, $\mathcal{R}(\beta+\beta'+1-\gamma) > 0$, x et y ne devant pas prendre de

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

valeurs réelles comprises entre 0 et 1 ; v suit l'axe réel de 1 à $+\infty$; on prend

$$\arg v = 0, \qquad \arg(1-v) = +\pi,$$
$$\arg(1-vx) \quad \text{et} \quad \arg(1-vy) \quad \text{compris entre } -\pi \quad \text{et} \quad +\pi.$$

Quatrième intégrale :

$$z_4 = e^{\alpha+\beta+\beta'+1-\gamma\pi i}\frac{\Gamma(\beta'+2-\gamma)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta+\beta'+1-\gamma)}\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} W\,dv$$

On doit avoir $\mathcal{R}(1-\beta)>0$, $\mathcal{R}(\beta+\beta'+1-\gamma)>0$, x ne devant pas prendre de valeurs réelles comprises entre 1 et $+\infty$ et $\frac{y}{x}$ de valeurs réelles comprises entre 0 et 1 ; on suppose pour fixer les idées x et $\frac{x}{y}$ dans la partie supérieure du plan : $0<\arg x<\pi$; v suit le rayon vecteur passant par $\frac{1}{x}$, depuis $\frac{1}{x}$ jusqu'à ∞; on prend

$$\arg v = -\arg x, \qquad -\pi < \arg(1-v) < +\pi,$$
$$\arg(1-vx) = +\pi, \qquad -\pi < \arg(1-vy) < +\pi.$$

Cinquième intégrale :

$$z_5 = e^{\alpha+\beta+\beta'+1-\gamma\pi i}\frac{\Gamma(\beta+2-\gamma)}{\Gamma(1-\beta')\Gamma(\beta+\beta'+1-\gamma)}\int_{\frac{1}{y}}^{+\infty} W\,dv.$$

On doit avoir $\mathcal{R}(1-\beta')>0$, $\mathcal{R}(\beta+\beta'+1-\gamma)>0$, y ne devant pas prendre de valeurs réelles comprises entre 1 et $+\infty$ et $\frac{x}{y}$ de valeurs réelles comprises entre 0 et 1, on suppose pour fixer les idées y et $\frac{y}{x}$ dans la partie supérieure du plan : $0<\arg y<\pi$; v suit le rayon vecteur passant par $\frac{1}{y}$, depuis $\frac{1}{y}$ jusqu'à ∞; on prend

$$\arg v = -\arg y, \qquad -\pi < \arg(1-v) < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(1-vx) < +\pi, \qquad \arg(1-vy) = +\pi.$$

Sixième intégrale :

$$z_6 = e^{\alpha+\beta'-\gamma\pi i}\frac{\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_{\frac{1}{x}}^{1} W\,dv.$$

On doit avoir $\mathcal{R}(1-\beta)>0$, $\mathcal{R}(\gamma-\alpha)>0$; x est assujetti à ne pas prendre de valeurs réelles négatives, $\frac{x(1-y)}{y(1-x)}$ de valeurs réelles comprises entre 0 et 1 ; on suppose pour fixer les idées x dans la partie supérieure du plan; v suit la droite joignant les deux points 1 et $\frac{1}{x}$; on prend

$$-\pi < \arg v < 0, \qquad -\pi < \arg(1-v) < +\pi,$$
$$\arg(1-vx) = \arg(1-x), \qquad -\pi < \arg(1-vy) < +\pi.$$

Septième intégrale :

$$z_7 = e^{\alpha+\beta-\gamma\pi i}\frac{\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta')}{\Gamma(1-\beta')\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_{\frac{1}{y}}^{1} W\,dv.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

On doit avoir $\mathcal{R}(1-\beta')>0$, $\mathcal{R}(\gamma-\alpha)>0$; y est assujetti à ne pas prendre de valeurs réelles négatives; $\frac{y(1-x)}{x(1-y)}$ de valeurs réelles comprises entre 0 et 1; on suppose, pour fixer les idées, y dans la partie supérieure du plan; v suit la droite joignant les deux points 1 et $\frac{1}{y}$; on prend

$$-\pi<\arg v<0, \qquad -\pi<\arg(1-v)<+\pi,$$
$$-\pi<\arg(1-vx)<+\pi, \qquad \arg(1-vy)=\arg(1-y).$$

Huitième intégrale :

$$z_8=\frac{\Gamma(\alpha+1-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta)}\int_0^{\frac{1}{x}} W\,dv.$$

On doit avoir $\mathcal{R}(\alpha)>0$, $\mathcal{R}(1-\beta)>0$; x et $\frac{x}{y}$ ne devant pas prendre de valeurs réelles comprises entre 0 et 1; on suppose pour fixer les idées $\frac{1}{x}$ dans la région supérieure du plan : $0<\arg\frac{1}{x}<\pi$; v suit le rayon vecteur passant par $\frac{1}{x}$; on prend

$$\arg v=\arg\frac{1}{x}, \qquad -\pi<\arg(1-v)<+\pi,$$
$$\arg(1-vx)=0, \qquad -\pi<\arg(1-vy)<+\pi$$

Neuvième intégrale :

$$z_9=\frac{\Gamma(\alpha+1-\beta')}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta')}\int_0^{\frac{1}{y}} W\,dv.$$

On doit avoir $\mathcal{R}(\alpha)>0$, $\mathcal{R}(1-\beta')>0$; y et $\frac{y}{x}$ ne devant pas prendre de valeurs réelles comprises entre 0 et 1; on suppose pour fixer les idées $\frac{1}{y}$ dans la région supérieure du plan : $0<\arg\frac{1}{y}<\pi$; v suit le rayon vecteur passant par $\frac{1}{y}$; on prend

$$\arg v=\arg\frac{1}{y}, \qquad -\pi<\arg(1-v)<+\pi,$$
$$-\pi<\arg(1-vx)<+\pi, \qquad \arg(1-vy)=0.$$

Dixième intégrale :

$$z_{10}=e^{\gamma-\alpha-\beta+1\pi i}\frac{\Gamma(\alpha+\beta-\beta')}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\beta')}\int_{\frac{1}{y}}^{\frac{1}{x}} W\,dv.$$

On doit avoir $\mathcal{R}(1-\beta)>0$, $\mathcal{R}(1-\beta')>0$; $\frac{x}{y}$ et $\frac{1-x}{1-y}$ ne devant pas prendre de valeurs réelles négatives; on suppose pour fixer les idées $\frac{y}{x}$ dans la partie supérieure du plan; v suit la droite joignant $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$; on prend

$$-\pi<\arg v<+\pi, \qquad -\pi<\arg(1-v)<+\pi,$$
$$\arg(1-vx)=\arg\left(1-\frac{x}{y}\right), \qquad \arg(1-vy)=\arg\left(1-\frac{y}{x}\right).$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Les dix intégrales (1) z *s'expriment au moyen de la fonction* F_1. En effet, dans chacune de ces dix intégrales définies, faisons respectivement les changements de variables

$$z_1 : v = w; \qquad z_2 : v = -\frac{w}{1-w}; \qquad z_3 : v = \frac{1}{w};$$

$$z_4 : v = \frac{1}{x(1-w)}; \qquad z_5 : v = \frac{1}{y(1-w)}; \qquad z_6 : v = \frac{1}{x+(1-x)w}; \qquad z_7 : v = \frac{1}{y+(1-y)w};$$

$$z_8 : v = \frac{w}{x}; \qquad z_9 : v = \frac{w}{y}; \qquad z_{10} : v = \frac{1}{y+(x-y)w}.$$

Nous obtenons :

$$z_1 = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 w^{\alpha-1}(1-w)^{\gamma-\alpha-1}(1-wx)^{-\beta}(1-wy)^{-\beta'}\,dw,$$

$$z_2 = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+\beta'+1-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+\beta'+1-\gamma)} \int_0^1 w^{\alpha-1}(1-w)^{\beta+\beta'-\gamma}[1-w(1-x)]^{-\beta}[1-w(1-y)]^{-\beta'}\,dw,$$

$$z_3 = \frac{\Gamma(\beta+\beta'+1-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\beta+\beta'+1-\gamma)} x^{-\beta} y^{-\beta'} \int_0^1 w^{\beta+\beta'-\gamma}(1-w)^{\gamma-\alpha-1}\left(1-\frac{w}{x}\right)^{-\beta}\left(1-\frac{w}{y}\right)^{-\beta'} dw,$$

$$z_4 = \frac{\Gamma(\beta'+2-\gamma)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta+\beta'+1-\gamma)} x^{\beta+1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}(y-x)^{-\beta'} \int_0^1 w^{-\beta}(1-w)^{\beta+\beta'-\gamma}\left[1-\frac{x}{x-1}w\right]^{\gamma-\alpha-1}\left[1-\frac{x}{x-y}w\right]^{-\beta'} dw,$$

$$z_5 = \frac{\Gamma(\beta+2-\gamma)}{\Gamma(1-\beta')\Gamma(\beta+\beta'+1-\gamma)} y^{\beta+1-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha-1}(x-y)^{-\beta} \int_0^1 w^{-\beta'}(1-w)^{\beta+\beta'-\gamma}\left[1-\frac{y}{y-x}w\right]^{-\beta}\left[1-\frac{y}{y-1}w\right]^{\gamma-\alpha-1} dw,$$

$$z_6 = \frac{\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} x^{\beta+\beta'-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(y-x)^{-\beta'} \int_0^1 w^{-\beta}(1-w)^{\gamma-\alpha-1}\left[1-\frac{x-1}{x}w\right]^{\beta+\beta'-\gamma}\left[1-\frac{x-1}{x-y}w\right]^{-\beta'} dw,$$

$$z_7 = \frac{\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta')}{\Gamma(1-\beta')\Gamma(\gamma-\alpha)} y^{\beta+\beta'-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(x-y)^{-\beta} \int_0^1 w^{-\beta'}(1-w)^{\gamma-\alpha-1}\left[1-\frac{y-1}{y-x}w\right]^{-\beta}\left[1-\frac{y-1}{y}w\right]^{-\beta+\beta'-\gamma} dw,$$

$$z_8 = \frac{\Gamma(\alpha+1-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta)} x^{-\alpha} \int_0^1 w^{\alpha-1}(1-w)^{-\beta}\left(1-\frac{w}{x}\right)^{\gamma-\alpha-1}\left(1-w\frac{y}{x}\right)^{-\beta'} dw,$$

$$z_9 = \frac{\Gamma(\alpha+1-\beta')}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta')} y^{-\alpha} \int_0^1 w^{\alpha-1}(1-w)^{-\beta'}\left(1-w\frac{x}{y}\right)^{-\beta}\left(1-\frac{w}{y}\right)^{\gamma-\alpha-1} dw,$$

$$z_{10} = \frac{\Gamma(2-\beta-\beta')}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\beta')} y^{\beta+\beta'-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha-1}(y-x)^{1-\beta-\beta'} \int_0^1 w^{-\beta'}(1-w)^{-\beta}\left(1-\frac{y-x}{y}w\right)^{\beta+\beta'-\gamma}\left(1-\frac{y-x}{y-1}w\right)^{\gamma-\alpha-1} dw.$$

En comparant les intégrales définies qui figurent dans ces dix expressions à la formule (4-VI), *on voit qu'elles s'identifient toutes avec des fonctions* F_1; *si, à chacune de ces dix fonctions* F_1, *on applique les cinq transformations* (5-VII), *on obtient finalement le tableau des* 60 *intégrales du*

---

(1) On remarquera que, pour que les dix intégrales aient simultanément un sens, il suffit que les éléments α, β, β', γ vérifient les cinq conditions

$$\mathcal{R}(\alpha) > 0, \qquad \mathcal{R}(\gamma-\alpha) > 0, \qquad \mathcal{R}(1-\beta) > 0, \qquad \mathcal{R}(1-\beta') > 0, \qquad \mathcal{R}(1+\beta+\beta'-\gamma) > 0.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

système d'équations aux dérivées partielles de la fonction F_1 (1)

$$z_1 = F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y),$$

$$z_2 = F_1(\alpha, \beta, \beta', \alpha+\beta+\beta'+1-\gamma, 1-x, 1-y),$$

$$z_3 = x^{-\beta} y^{-\beta'} F_1\left(\beta+\beta'+1-\gamma, \beta, \beta', \beta+\beta'+1-\alpha, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right),$$

$$z_4 = x^{\beta'+1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}(y-x)^{-\beta'} F_1\left(1-\beta, \alpha+1-\gamma, \beta', 2+\beta'-\gamma, \frac{x}{x-1}, \frac{x}{x-y}\right),$$

$$z_5 = y^{\beta+1-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha-1}(x-y)^{-\beta} F_1\left(1-\beta', \beta, \alpha+1-\gamma, 2+\beta-\gamma, \frac{y}{y-x}, \frac{y}{y-1}\right),$$

$$z_6 = x^{\beta+\beta'-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(y-x)^{-\beta'} F_1\left(1-\beta, \gamma-\beta-\beta', \beta', \gamma+1-\alpha-\beta, \frac{x-1}{x}, \frac{x-1}{x-y}\right),$$

$$z_7 = y^{\beta+\beta'-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(x-y)^{-\beta} F_1\left(1-\beta', \beta, \gamma-\beta-\beta', \gamma+1-\alpha-\beta', \frac{y-1}{y-x}, \frac{y-1}{y}\right),$$

$$z_8 = x^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \beta', \alpha+1-\beta, \frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right),$$

$$z_9 = y^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \beta, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta', \frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right),$$

$$z_{10} = y^{\beta+\beta'-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha-1}(y-x)^{1-\beta-\beta'} F_1\left(1-\beta', \gamma-\beta-\beta', \alpha+1-\gamma, 2-\beta-\beta', \frac{y-x}{y}, \frac{y-x}{y-1}\right),$$

$$z_{11} = (1-x)^{-\beta}(1-y)^{-\beta'} F_1\left(\gamma-\alpha, \beta, \beta', \gamma, \frac{x}{x-1}, \frac{y}{y-1}\right),$$

$$z_{12} = x^{-\beta} y^{-\beta'} F_1\left(\beta+\beta'+1-\gamma, \beta, \beta', \alpha+\beta+\beta'+1-\gamma, \frac{x-1}{x}, \frac{y-1}{y}\right),$$

$$z_{13} = x^{-\beta} y^{-\beta'}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\beta}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-\beta'} F_1\left(\gamma-\alpha, \beta, \beta', \beta+\beta'+1-\alpha, \frac{1}{1-x}, \frac{1}{1-y}\right),$$

$$z_{14} = x^{\beta'+1-\gamma} y^{-\beta'} F_1\left(\beta+\beta'+1-\gamma, \alpha+1-\gamma, \beta', 2+\beta'-\gamma, x, \frac{x}{y}\right),$$

$$z_{15} = x^{-\beta} y^{\beta+1-\gamma} F_1\left(\beta+\beta'+1-\gamma, \beta, \alpha+1-\gamma, 2+\beta-\gamma, \frac{y}{x}, y\right),$$

$$z_{16} = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(1-y)^{-\beta'} F_1\left(\gamma-\alpha, \gamma-\beta-\beta', \beta', \gamma+1-\alpha-\beta, 1-x, \frac{1-x}{1-y}\right),$$

$$z_{17} = (1-x)^{-\beta}(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} F_1\left(\gamma-\alpha, \beta, \gamma-\beta-\beta', \gamma+1-\alpha-\beta', \frac{1-y}{1-x}, 1-y\right),$$

$$z_{18} = x^{-\alpha}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\gamma-\alpha-1}\left(1-\frac{y}{x}\right)^{-\beta'} F_1\left(1-\beta, \alpha+1-\gamma, \beta', \alpha+1-\beta, \frac{1}{1-x}, \frac{y}{y-x}\right),$$

$$z_{19} = y^{-\alpha}\left(1-\frac{x}{y}\right)^{-\beta}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{\gamma-\alpha-1} F_1\left(1-\beta', \beta, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta', \frac{x}{x-y}, \frac{1}{1-y}\right),$$

$$z_{20} = x^{\beta+\beta'-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}(y-x)^{1-\beta-\beta'} F_1\left(1-\beta, \gamma-\beta-\beta', \alpha+1-\gamma, 2-\beta-\beta', \frac{x-y}{x}, \frac{x-y}{x-1}\right),$$

---

(1) Ce tableau est équivalent à celui qui a été donné par M. Le Vavasseur dans sa Thèse : *Sur le système d'équations aux dérivées partielles simultanées auxquelles satisfait la série hypergéométrique à deux variables* F_1, p. 49 à 52.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

$$z_{21} = (1-x)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \gamma-\beta-\beta', \beta', \gamma, \frac{x}{x-1}, \frac{x-y}{x-1}\right),$$

$$z_{22} = x^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \beta', \alpha+\beta+\beta'+1-\gamma, \frac{x-1}{x}, \frac{x-y}{x}\right),$$

$$z_{23} = x^{-\beta} y^{-\beta'} \left(1-\frac{1}{x}\right)^{\gamma-\beta-\beta'-1} F_1\left[\beta+\beta'+1-\gamma, 1-\alpha, \beta', \beta+\beta'+1-\alpha, \frac{1}{1-x}, \frac{y-x}{y(1-x)}\right]$$

$$z_{24} = x^{\beta'+1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(y-x)^{-\beta'} F_1\left[1-\beta, 1-\alpha, \beta', 2+\beta'-\gamma, x, \frac{x(1-y)}{x-y}\right],$$

$$z_{25} = x^{\beta'-1} y^{\beta+1-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha-1}(x-y)^{1-\beta-\beta'} F_1\left[1-\beta', 1-\alpha, \alpha+1-\gamma, 2+\beta-\gamma, \frac{y}{x}, \frac{y(1-x)}{x(1-y)}\right],$$

$$z_{26} = x^{\beta'+1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(y-x)^{-\beta'} F_1\left[1-\beta, 1-\alpha, \beta', \gamma+1-\alpha-\beta, 1-x, \frac{y(1-x)}{y-x}\right],$$

$$z_{27} = y^{\beta+\beta'-\gamma}(1-x)^{\beta'-1}(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(x-y)^{1-\beta-\beta'} F_1\left[1-\beta', 1-\alpha, \gamma-\beta-\beta', \gamma+1-\alpha-\beta', \frac{1-y}{1-x}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right],$$

$$z_{28} = x^{-\alpha}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \gamma-\beta-\beta', \beta', \alpha+1-\beta, \frac{1}{1-x}, \frac{1-y}{1-x}\right),$$

$$z_{29} = y^{-\alpha}\left(1-\frac{x}{y}\right)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \gamma-\beta-\beta', \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta', \frac{x}{x-y}, \frac{x-1}{x-y}\right),$$

$$z_{30} = x^{\beta'-1} y^{\beta+1-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha-1}(y-x)^{1-\beta-\beta'} F_1\left[1-\beta', 1-\alpha, \alpha+1-\gamma, 2-\beta-\beta', \frac{x-y}{x}, \frac{x-y}{x(1-y)}\right],$$

$$z_{31} = (1-y)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \beta, \gamma-\beta-\beta', \gamma, \frac{y-x}{y-1}, \frac{y}{y-1}\right),$$

$$z_{32} = y^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \beta, \alpha+1-\gamma, \alpha-\beta+\beta'+1-\gamma, \frac{y-x}{y}, \frac{y-1}{y}\right),$$

$$z_{33} = x^{-\beta} y^{-\beta'}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{\gamma-\beta-\beta'-1} F_1\left[\beta+\beta'+1-\gamma, \beta, 1-\alpha, \beta+\beta'+1-\alpha, \frac{x-y}{x(1-y)}, \frac{1}{1-y}\right],$$

$$z_{34} = x^{\beta'+1-\gamma} y^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}(y-x)^{1-\beta-\beta'} F_1\left[1-\beta, \alpha+1-\gamma, 1-\alpha, 2+\beta'-\gamma, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}, \frac{x}{y}\right],$$

$$z_{35} = y^{\beta+1-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(x-y)^{-\beta} F_1\left[1-\beta', \beta, 1-\alpha, 2+\beta-\gamma, \frac{y(1-x)}{y-x}, y\right],$$

$$z_{36} = x^{\beta+\beta'-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(1-y)^{\beta-1}(y-x)^{1-\beta-\beta'} F_1\left[1-\beta, \gamma-\beta-\beta', 1-\alpha, \gamma+1-\alpha-\beta, \frac{y(1-x)}{x(1-y)}, \frac{1-x}{1-y}\right],$$

$$z_{37} = y^{\beta+1-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(x-y)^{-\beta} F_1\left[1-\beta', \beta, 1-\alpha, \gamma+1-\alpha-\beta', \frac{x(1-y)}{x-y}, 1-y\right],$$

$$z_{38} = x^{-\alpha}\left(1-\frac{y}{x}\right)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \gamma-\beta-\beta', \alpha+1-\beta, \frac{y-1}{y-x}, \frac{y}{y-x}\right),$$

$$z_{39} = y^{-\alpha}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \beta, \gamma-\beta-\beta', \alpha+1-\beta', \frac{1-x}{1-y}, \frac{1}{1-y}\right),$$

$$z_{40} = y^{\beta+\beta'-\gamma}(1-x)^{\beta'-1}(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(y-x)^{1-\beta-\beta'} F_1\left[1-\beta', \gamma-\beta-\beta', 1-\alpha, 2-\beta-\beta', \frac{y-x}{y(1-x)}, \frac{y-x}{1-x}\right],$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

$$z_{41} = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(1-y)^{-\beta'} F_1\left(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta-\beta',\ \beta',\ \gamma,\ x,\ \frac{y-x}{y-1}\right),$$

$$z_{42} = x^{\beta'+1-\gamma} y^{-\beta'} F_1\left(\beta+\beta'+1-\gamma,\ \alpha+1-\gamma,\ \beta',\ \alpha+\beta+\beta'+1-\gamma,\ 1-x,\ \frac{y-x}{y}\right),$$

$$z_{43} = x^{-\beta} y^{-\beta'}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\gamma-\alpha-\beta}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-\beta'} F_1\left[\gamma-\alpha,\ 1-\alpha,\ \beta',\ \beta+\beta'+1-\alpha,\ \frac{1}{x},\ \frac{x-y}{x(1-y)}\right],$$

$$z_{44} = x^{\beta'+1-\gamma} y^{-\beta'}(1-x)^{\gamma-\beta-\beta'-1} F_1\left[\beta+\beta'+1-\gamma,\ 1-\alpha,\ \beta',\ \alpha+\beta'-\gamma,\ \frac{x}{x-1},\ \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right],$$

$$z_{45} = x^{\beta'+1-\gamma} y^{\beta+1-\gamma}(x-y)^{\gamma-\beta-\beta'-1} F_1\left[\beta+\beta'+1-\gamma,\ 1-\alpha,\ \alpha+1-\gamma,\ \alpha+\beta-\gamma,\ \frac{y}{y-x},\ \frac{y(1-x)}{y-x}\right],$$

$$z_{46} = x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(1-y)^{-\beta'} F_1\left[\gamma-\alpha,\ 1-\alpha,\ \beta',\ \gamma+1-\alpha-\beta,\ \frac{x-1}{x},\ \frac{y(1-x)}{x(1-y)}\right],$$

$$z_{47} = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(x-y)^{\alpha-\gamma} F_1\left[\gamma-\alpha,\ 1-\alpha,\ \gamma-\beta-\beta',\ \gamma+1-\alpha-\beta',\ \frac{y-1}{y-x},\ \frac{x(1-y)}{x-y}\right],$$

$$z_{48} = x^{-\alpha}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\gamma-\alpha-\beta}\left(1-\frac{y}{x}\right)^{-\beta'} F_1\left(1-\beta,\ \gamma-\beta-\beta',\ \beta',\ \alpha+1-\beta,\ \frac{1}{x},\ \frac{y-1}{y-x}\right),$$

$$z_{49} = y^{-\alpha}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{\gamma-\alpha-1}\left(1-\frac{x}{y}\right)^{1-\beta-\beta'} F_1\left(1-\beta',\ \gamma-\beta-\beta',\ \alpha+1-\gamma,\ \alpha+1-\beta',\ \frac{x}{y},\ \frac{1-x}{1-y}\right),$$

$$z_{50} = x^{\beta'+1-\gamma} y^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}(y-x)^{1-\beta-\beta'} F_1\left[1-\beta,\ 1-\alpha,\ \alpha+1-\gamma,\ \alpha-\beta-\beta',\ \frac{y-x}{y},\ \frac{y-x}{y(1-x)}\right],$$

$$z_{51} = (1-x)^{-\beta}(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} F_1\left(\gamma-\alpha,\ \beta,\ \gamma-\beta-\beta',\ \gamma,\ \frac{x-y}{x-1},\ y\right),$$

$$z_{52} = x^{-\beta} y^{\beta+1-\gamma} F_1\left(\beta+\beta'+1-\gamma,\ \beta,\ \alpha+1-\gamma,\ \alpha+\beta+\beta'+1-\gamma,\ \frac{x-y}{x},\ 1-y\right),$$

$$z_{53} = x^{-\beta} y^{-\beta'}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\beta}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{\gamma-\alpha-\beta'} F_1\left(\gamma-\alpha,\ \beta,\ 1-\alpha,\ \beta+\beta'+1-\alpha,\ \frac{y-x}{y(1-x)},\ \frac{1}{y}\right),$$

$$z_{54} = x^{\beta'+1-\gamma} y^{\beta+1-\gamma}(y-x)^{\gamma-\beta-\beta'-1} F_1\left[\beta+\beta'+1-\gamma,\ \alpha+1-\gamma,\ 1-\alpha,\ \alpha+\beta'-\gamma,\ \frac{x(1-y)}{x-y},\ \frac{x}{x-y}\right],$$

$$z_{55} = x^{-\beta} y^{\beta+1-\gamma}(1-y)^{\gamma-\beta-\beta'-1} F_1\left[\beta+\beta'+1-\gamma,\ \beta,\ 1-\alpha,\ \alpha+\beta-\gamma,\ \frac{y(1-x)}{x(1-y)},\ \frac{y}{y-1}\right],$$

$$z_{56} = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(y-x)^{\alpha-\gamma} F_1\left[\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta-\beta',\ 1-\alpha,\ \gamma+1-\alpha-\beta,\ \frac{y(1-x)}{y-x},\ \frac{x-1}{x-y}\right],$$

$$z_{57} = y^{\alpha-\gamma}(1-x)^{-\beta}(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} F_1\left[\gamma-\alpha,\ \beta,\ 1-\alpha,\ \gamma+1-\alpha-\beta',\ \frac{x(1-y)}{y(1-x)},\ \frac{y-1}{y}\right],$$

$$z_{58} = x^{-\alpha}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\gamma-\alpha-1}\left(1-\frac{y}{x}\right)^{1-\beta-\beta'} F_1\left(1-\beta,\ \alpha+1-\gamma,\ \gamma-\beta-\beta',\ \alpha+1-\beta,\ \frac{1-y}{1-x},\ \frac{y}{x}\right),$$

$$z_{59} = y^{-\alpha}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{\gamma-\alpha-\beta'}\left(1-\frac{x}{y}\right)^{-\beta} F_1\left(1-\beta',\ \beta,\ \gamma-\beta-\beta',\ \alpha+1-\beta',\ \frac{x-1}{x-y},\ \frac{1}{y}\right),$$

$$z_{60} = x^{\beta+\beta'-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(1-y)^{\beta-1}(y-x)^{1-\beta-\beta'} F_1\left[1-\beta,\ \gamma-\beta-\beta',\ 1-\alpha,\ \alpha-\beta-\beta',\ \frac{x-y}{x(1-y)},\ \frac{x-y}{1-y}\right].$$

Les 60 intégrales de ce tableau sont représentables par des *séries hypergéométriques convergentes* dans des domaines des plans x et y qu'il est facile de déterminer; voici les domaines

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

correspondants aux 10 premières :

z_1 : x intérieur au cercle $|x| = 1$, y intérieur au cercle $|y| = 1$,

z_2 : x intérieur au cercle $|x - 1| = 1$, y intérieur au cercle $|y - 1| = 1$,

z_3 : x extérieur au cercle $|x| = 1$, y extérieur au cercle $|y| = 1$,

z_4 : x à gauche de la droite $\mathcal{R}(x) = \frac{1}{2}$, y extérieur au cercle $|y - x| = |x|$,

z_5 : x extérieur au cercle $|x - y| = |y|$; y à gauche de la droite $\mathcal{R}(y) = \frac{1}{2}$,

z_6 : x à droite de la droite $\mathcal{R}(x) = \frac{1}{2}$, y extérieur au cercle $|y - x| = |x - 1|$;

z_7 : x extérieur au cercle $|x - y| = |y - 1|$, y à droite de la droite $\mathcal{R}(y) = \frac{1}{2}$,

z_8 : x extérieur au cercle $|x| = 1$, y intérieur au cercle $|y| = |x|$,

z_9 : x intérieur au cercle $|x| = |y|$, y extérieur au cercle $|y| = 1$,

z_{10} : y du même côté que x par rapport aux deux droites normales respectivement au milieu des segments $0 - x$ et $1 - x$.

XVI. — Relations entre quatre intégrales des équations de la fonction F_1.

Les équations de la fonction F_1 *n'admettent que trois intégrales linéairement indépendantes; par conséquent si l'on considère 4 des 60 intégrales du tableau précédent, elles doivent être liées par une relation linéaire.*

On peut d'ailleurs se borner à former les relations qui lient quatre à quatre les dix premières intégrales, puisque, d'après la manière même dont le tableau a été construit, on a

$$z_n = z_{n+10} = z_{n+20} = z_{n+30} = z_{n+40} = z_{n+50} \qquad (n \leq 10).$$

Ces relations ont été formées par M. Le Vavasseur dans sa Thèse, où leur énoncé occupe les page 76 à 112; nous ne pouvons donc songer à les reproduire toutes ici; nous devons nous contenter de donner une idée de la méthode suivie et des résultats acquis.

Pour simplifier les calculs, nous substituerons d'abord aux fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_{10}$, dix fonctions proportionnelles $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{10}$ déduites de celles-ci en les débarrassant des quotients de fonctions Γ, qui apparaissent en facteurs dans les intégrales définies

$$\varphi_1 = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)}{\Gamma(\gamma)} z_1, \qquad \varphi_2 = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta + \beta' + 1 - \gamma)}{\Gamma(\alpha + \beta + \beta' + 1 - \gamma)} z_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\varphi_9 = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \beta')}{\Gamma(\alpha + 1 - \beta')} z_9, \qquad \varphi_{10} = \frac{\Gamma(1 - \beta)\Gamma(1 - \beta')}{\Gamma(2 - \beta - \beta')} z_{10}.$$

La relation linéaire qui lie quatre fonctions φ est susceptible de prendre plusieurs formes distinctes selon la position des points x et y; M. Le Vavasseur a ainsi formé 14 tableaux de relations correspondant à 14 positions types pour les points x et y: le nombre des fonctions φ qui entrent dans certaines de ces relations, s'abaisse parfois exceptionnellement à trois [1].

[1] Le premier tableau contient 163 relations; sur ce nombre il y en a 7 qui ne contiennent que 3 fonctions φ: les relations entre : — $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$; — $\varphi_1, \varphi_6, \varphi_8$; — $\varphi_1, \varphi_7, \varphi_8$; — $\varphi_2, \varphi_5, \varphi_9$; — $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_6$; — $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_{10}$; — $\varphi_6, \varphi_7, \varphi_{10}$.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Voici les grandes lignes de la méthode suivie.

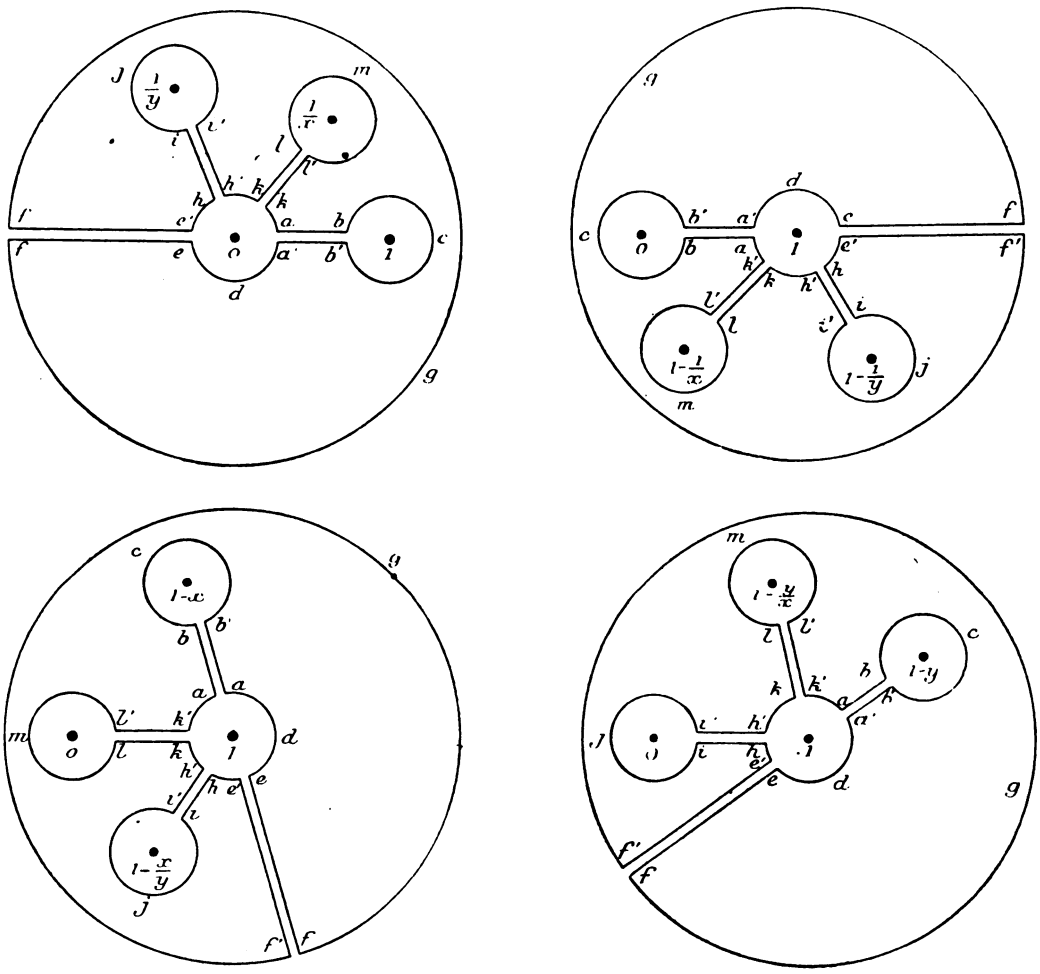
Dans le plan de la variable complexe v on fait décrire à cette variable un contour fermé C limitant une aire à l'intérieur de laquelle la fonction

$$W = v^{\alpha-1}(1-v)^{\gamma-\alpha-1}(1-vx)^{-\beta}(1-vy)^{-\beta'}$$

est holomorphe; on a alors, d'après le théorème de Cauchy,

$$\int_C W\,dv = 0.$$

Fig. 4.



Le contour C se compose :

1° De segments rectilignes joignant deux à deux certains des points singuliers

$$0,\quad 1,\quad x,\quad \frac{1}{x},\quad \frac{1}{y};$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

2° D'arcs de circonférences de rayon très petit décrits des points 0, 1, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ comme centre;

3° D'arcs de circonférences de rayon très grand décrits du point 0 comme centre.

Ceci étant, supposons que

$$\mathcal{R}(\alpha) > 0, \quad \mathcal{R}(\gamma - \alpha) > 0, \quad \mathcal{R}(1 - \beta) > 0, \quad \mathcal{R}(1 - \beta') > 0, \quad \mathcal{R}(\beta + \beta' + 1 - \gamma) > 0.$$

Si l'on fait tendre vers zéro les rayons des arcs de circonférence de centre 0, 1, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ et vers l'infini le rayon des grandes circonférences entourant le point 0, les intégrales $\int W\,dv$ relatives à ces portions du contour C tendent vers zéro; donc, à la limite, le théorème de Cauchy donne une relation entre les intégrales prises le long des segments rectilignes, d'où, manifestement, une relation entre les fonctions φ.

Un exemple éclaircira ces généralités; faisons décrire à la variable v le contour [1]

$$C = ab.bcb'.b'a'.a'de.ef.fgf'.f'e'.e'h.hi.iji'.i'h'.h'k.kl.lml'.l'k'.k'a.$$

à l'intérieur duquel il est clair qu'il n'y a aucun point singulier de W.

Si nous faisons tendre vers zéro les rayons des petites circonférences entourant les points 0, 1, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ et vers l'infini le rayon de la grande circonférence fgf', les intégrales

$$\int_{bcb'}, \quad \int_{a'de}, \quad \int_{fgf'}, \quad \int_{e'h}, \quad \int_{iji'}, \quad \int_{h'k}, \quad \int_{lml'}, \quad \int_{k'a}$$

tendent vers zéro; le théorème de Cauchy donne donc

$$\lim\left[\int_{ab} + \int_{b'a'} + \int_{ef} + \int_{f'e'} + \int_{hi} + \int_{i'h'} + \int_{kl} + \int_{l'k'}\right] = 0.$$

Or sur les figures on suit facilement, à partir du point a, la variation des arguments de v, $1 - v$, $1 - vx$, $1 - vy$; en se reportant aux hypothèses précises, faites sur ces arguments dans les définitions des intégrales z (proportionnelles aux fonctions φ), on obtient les résultats suivants :

1° Sur ab :

$$\arg v = 0, \qquad \arg(1 - v) = 0.$$

$$\lim \int_{ab} W\,dv = \varphi_1;$$

2° Sur $b'a'$:

$$\arg v = 0, \qquad \arg(1 - v) = -2\pi,$$

$$\lim \int_{b'a'} W\,dv = -e^{2(\alpha-\gamma)\pi i}\varphi_1;$$

---

[1] Sur la figure 4, à côté du contour C décrit par la variable v, on a tracé les trois contours décrits simultanément par $1 - v$, $1 - vx$, $1 - vy$.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

3° Sur ef :

$$\arg v = -\pi, \qquad \arg(1-v) = -2\pi,$$

$$\lim \int_{ef} W\,dv = e^{\alpha-2\gamma\pi i}\varphi_2;$$

4° Sur $f'e'$:

$$\arg v = +\pi, \qquad \arg(1-v) = 0,$$

$$\arg(1-vx) \text{ et } \arg(1-vy) \text{ augmentent de } 2\pi.$$

$$\lim \int_{f'e'} W\,dv = -e^{\alpha-2\beta-2\beta'\pi i}\varphi_2;$$

5° Sur hi :

$$\arg(1-vy) = +2\pi, \qquad \pi < \arg(1-vx) < 2\pi,$$

$$\lim \int_{hi} W\,dv = e^{-2\beta-\beta'\pi i}\varphi_9;$$

6° Sur $i'h'$:

$$\arg(1-vy) = 0, \qquad \pi < \arg(1-vx) < 2\pi,$$

$$\lim \int_{i'h'} W\,dv = -e^{-2\beta\pi i}\varphi_9;$$

7° Sur kl :

$$0 < \arg(1-vy) < \pi, \qquad \arg(1-vx) = +2\pi,$$

$$\lim \int_{kl} W\,dv = e^{-2\beta\pi i}\varphi_8;$$

8° Sur $l'k'$:

$$0 < \arg(1-vy) < \pi, \qquad \arg(1-vx) = 0,$$

$$\lim \int_{l'k'} W\,dv = -\varphi_8.$$

Nous obtenons donc la relation

$$[1-e^{2(\alpha-2\gamma)\pi i}]\varphi_1 + [e^{(\alpha-2\gamma)\pi i} - e^{(\alpha-2\beta-2\beta')\pi i}]\varphi_2 + [e^{-2(\beta+\beta')\pi i} - e^{-2\beta\pi i}]\varphi_9 + [e^{-2\beta\pi i} - 1]\varphi_8 = 0,$$

relation qui n'est, bien entendu, valable que pour la position des points x et y donnée par la figure, qui correspond à la première des 14 positions-types de M. Le Vavasseur.

XVII. — Relations entre les intégrales des équations de F_1 et de F_3.

Les intégrales générales des systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions F_1 et F_3 dépendent respectivement de trois et quatre constantes arbitraires; d'autre part, nous savons que la fonction F_1 se ramène toujours à la fonction F_3 par la formule (29-V)

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = (1-y)^{\beta'} F_3\left(\alpha, \gamma-\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, \frac{y}{y-1}\right).$$

Il semble qu'il y ait incompatibilité entre ces deux propositions; nous allons montrer que la contradiction n'est qu'apparente.

Soit

$$Z(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y)$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

une intégrale quelconque des équations de F_3; il est aisé, en partant de ces équations, de former celles auxquelles satisfait la fonction

$$W(x, y) = (1-y)^{\beta'} Z\left(\alpha, \gamma-\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, \frac{y}{y-1}\right);$$

on trouve

$$(21)\quad \begin{cases} x(1-x)r + y(1-y)s + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x - \beta' y]p - \alpha\beta z = 0, \\ y(1-y)t + x(1-y)s + [\gamma - (\alpha+\beta'+1)y]q - \beta' x p - \alpha\beta' z = 0. \end{cases}$$

Or, un simple coup d'œil jeté sur ce système montre que *la seconde équation seule est identique à la seconde équation de* F_1. Il en résulte qu'une intégrale W quelconque de ce système ne vérifie pas, en général, le système de F_1; pour qu'il en soit ainsi, il faut lui imposer une *condition supplémentaire* qui permette de rendre identiques la première équation (21) et la première équation de F_1. Cette condition supplémentaire, c'est qu'outre les équations (21) la fonction W vérifie l'équation déjà rencontrée (XIV)

$$(12)\qquad (x-y)s - \beta' p + \beta q = 0.$$

En effet, si l'on multiplie cette équation par $-y$ et qu'on l'ajoute à la première équation (21), on retrouve identiquement la première équation de F_1.

Le fait que, d'une part, F_1 *se ramène à* F_3 *et que, d'autre part, l'intégrale générale du système de* F_1 *contient une constante arbitraire de moins que celle du système de* F_3, *s'explique donc simplement par la nécessité d'imposer à une intégrale du système* (21), *pour qu'elle vérifie aussi le système de* F_1, *la condition supplémentaire exprimée par l'équation* (12).

XVIII. — Équations adjointes des équations de F_1, F_2, F_3, F_4.

Étant donnée une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre

$$(22)\qquad \mathcal{A}(u) = A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0,$$

on désigne sous le nom d'*équation adjointe* de cette équation, l'équation

$$(23)\qquad \mathcal{B}(v) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(Av) + 2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(Bv) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(Cv) - \frac{\partial}{\partial x}(Dv) - \frac{\partial}{\partial y}(Ev) + Fv = 0.$$

En développant les calculs, on a

$$(24)\qquad \mathcal{B}(v) = A\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \left[2\frac{\partial A}{\partial x} + 2\frac{\partial B}{\partial y} - D\right]\frac{\partial v}{\partial x} + \left[2\frac{\partial B}{\partial x} + 2\frac{\partial C}{\partial y} - E\right]\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$+ \left[\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 B}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \frac{\partial D}{\partial x} - \frac{\partial E}{\partial y} + F\right]v.$$

En outre, entre les deux expressions différentielles $\mathcal{A}(u)$ et $\mathcal{B}(v)$ existe l'identité

$$(25)\qquad v\mathcal{A}(u) - u\mathcal{B}(v) = \frac{\partial}{\partial x}\left[A\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + B\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(D - \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y}\right)uv\right]$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left[B\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + C\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(E - \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial C}{\partial y}\right)uv\right].$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Lorsque l'on a

$$\mathfrak{B}(v) \equiv \mathfrak{A}(v),$$

on dit que l'équation (22) est identique à son adjointe; la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi, c'est que

$$D = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}, \qquad E = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial y}$$

et par conséquent une équation identique à son adjointe est de la forme

$$(26) \qquad \mathfrak{A}(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(B\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial y}\right) + Fu = 0.$$

Ceci rappelé, considérons les trois équations vérifiées par la fonction

$$u = F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y):$$

$$\mathfrak{A}_1(u) \equiv x(1-x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y(1-x)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{\partial u}{\partial x} - \beta y\frac{\partial u}{\partial y} - \alpha\beta u = 0,$$

$$\mathfrak{A}_2(u) \equiv y(1-y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x(1-y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + [\gamma - (\alpha+\beta'+1)y]\frac{\partial u}{\partial y} - \beta' x\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha\beta' u = 0,$$

$$\mathfrak{A}_3(u) \equiv (x-y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \beta'\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

En appliquant la formule (24), on obtient immédiatement pour les adjointes de ces équations :

$$\mathfrak{B}_1(v) \equiv x(1-x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + y(1-x)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + [3-\gamma+(\alpha+\beta-4)x]\frac{\partial v}{\partial x} - (1-\beta)y\frac{\partial v}{\partial y} - (2-\alpha)(1-\beta)v = 0,$$

$$\mathfrak{B}_2(v) \equiv y(1-y)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + x(1-y)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + [3-\gamma+(\alpha+\beta'-4)y]\frac{\partial v}{\partial y} - (1-\beta')x\frac{\partial v}{\partial x} - (2-\alpha)(1-\beta')v = 0,$$

$$\mathfrak{B}_3(v) \equiv (x-y)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - (1-\beta')\frac{\partial v}{\partial x} + (1-\beta)\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Il est clair que ces équations sont précisément les équations vérifiées par la fonction

$$v = F_1(2-\alpha, 1-\beta, 1-\beta', 3-\gamma, x, y).$$

D'où cette proposition :

Les trois équations adjointes des équations de la fonction $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$ *sont les équations de la fonction*

$$F_1(2-\alpha, 1-\beta, 1-\beta', 3-\gamma, x, y).$$

En particulier, les trois équations vérifiées par la fonction $F_1\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x, y\right)$ *sont identiques à leur adjointe.*

Des calculs analogues aux précédents conduisent, pour les autres fonctions hypergéométriques, à la proposition suivante :

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Les équations adjointes des équations des fonctions

$$F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y); \quad F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y); \quad F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y)$$

sont respectivement les équations vérifiées par les fonctions

$$F_2(2-\alpha, 1-\beta, 1-\beta', 2-\gamma, 2-\gamma', x, y); \quad F_3(1-\alpha, 1-\alpha', 1-\beta, 1-\beta', 3-\gamma, x, y);$$
$$F_4(2-\alpha, 2-\beta, 2-\gamma, 2-\gamma', x, y).$$

En particulier, les équations vérifiées par les fonctions

$$F_2\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1, x, y\right); \quad F_3\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x, y\right); \quad F_4(1, 1, 1, 1, x, y)$$

sont identiques à leurs adjointes.

XIX. — Équations différentielles des fonctions F_1, F_2, F_3, F_4 considérées comme fonctions d'une seule variable.

Au paragraphe XII, nous avons étudié quelques propriétés des systèmes de deux équations aux dérivées partielles

$$r = a_1 s + a_2 p + a_3 q + a_4 z,$$
$$t = b_1 s + b_2 p + b_3 q + b_4 z,$$

en supposant la quantité $1 - a_1 b_1$ non identiquement nulle. Ce système est équivalent aux équations aux différentielles totales

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$
$$dp = (a_1 s + a_2 p + a_3 q + a_4 z)\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + (b_1 s + b_2 p + b_3 q + b_4 z)\,dy,$$
$$ds = (\alpha_1 s + \alpha_2 p + \alpha_3 q + \alpha_4 z)\,dx + (\beta_1 s + \beta_2 p + \beta_3 q + \beta_4 z)\,dy.$$

Supposons que dans la fonction $z(x, y)$ la variable y garde une valeur constante $y = y_0$; si dans les équations précédentes on fait $dy = 0$, elles deviennent

$$\frac{dz}{dx} = p, \qquad \frac{dp}{dx} = a_1 s + a_2 p + a_3 q + a_4 z,$$
$$\frac{dq}{dx} = s, \qquad \frac{ds}{dx} = \alpha_1 s + \alpha_2 p + \alpha_3 q + \alpha_4 z.$$

L'élimination des fonctions s, p, q entre ces quatre équations conduit pour la fonction

$$z(x) = z(x, y_0)$$

à une équation différentielle linéaire du quatrième ordre

$$A_0(x, y_0)\frac{d^4 z}{dx^4} + A_1(x, y_0)\frac{d^3 z}{dx^3} + A_2(x, y_0)\frac{d^2 z}{dx^2} + A_3(x, y_0)\frac{dz}{dx} + A_4(x, y_0)\,z = 0.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

On pourra appliquer à l'étude de cette équation les méthodes classiques de Fuchs. De même z considérée comme fonction de y seul ($x = x_0$) satisfait à une équation différentielle du quatrième ordre en y.

Considérons, par exemple, le système vérifié par la fonction F_3 :

$$\begin{cases} x(1-x)r + ys + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]p - \alpha\beta z = 0, \\ y(1-y)t + xs + [\gamma - (\alpha' + \beta' + 1)y]q - \alpha'\beta' z = 0. \end{cases}$$

Pour en déduire le système équivalent d'équations aux différentielles totales, dérivons la première équation par rapport à y, la deuxième par rapport à x et remplaçons $\frac{\partial r}{\partial y}$ par $\frac{\partial s}{\partial x}$ et $\frac{\partial t}{\partial x}$ par $\frac{\partial s}{\partial y}$

$$x(1-x)\frac{\partial s}{\partial x} + y\frac{\partial s}{\partial y} + [\gamma + 1 - (\alpha + \beta + 1)x]s - \alpha\beta q = 0,$$

$$y(1-y)\frac{\partial s}{\partial y} + x\frac{\partial s}{\partial x} + [\gamma + 1 - (\alpha' + \beta' + 1)y]s - \alpha'\beta' p = 0;$$

d'où

$$x[1-(1-x)(1-y)]\frac{\partial s}{\partial x} = [(\alpha + \beta + 1)xy - (\alpha + \beta + 1)x - (\gamma - \alpha' - \beta')y]s + \alpha'\beta' p - \alpha\beta(1-y)q,$$

$$y[1-(1-x)(1-y)]\frac{\partial s}{\partial y} = [(\alpha' + \beta' + 1)xy - (\alpha' + \beta' + 1)y - (\gamma - \alpha - \beta)x]s + \alpha\beta q - \alpha'\beta'(1-x)p.$$

Connaissant $\frac{\partial s}{\partial x}$ et $\frac{\partial s}{\partial y}$, on pourrait écrire le système d'équations aux différentielles totales; lorsque $dy = 0$, il se réduit à

$$(27)\quad \begin{cases} \frac{dz}{dx} = p, \qquad \frac{dq}{dx} = s, \\ x(1-x)\frac{dp}{dx} + ys + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]p - \alpha\beta z = 0, \\ x[(1-x)(1-y) - 1]\frac{ds}{dx} + [(\alpha + \beta + 1)xy - (\alpha + \beta + 1)x - (\gamma - \alpha' - \beta')y]s + \alpha'\beta' p - \alpha\beta(1-y)q = 0. \end{cases}$$

L'élimination de s, p, q entre ces quatre équations conduit pour la fonction F_3, considérée comme fonction de x seul, à l'équation du quatrième ordre

$$(28)\qquad A_0(x, y)\frac{d^4 z}{dx^4} + A_1(x, y)\frac{d^3 z}{dx^3} + A_2(x, y)\frac{d^2 z}{dx^2} + A_3(x, y)\frac{dz}{dx} + A_4(x, y)z = 0,$$

où les coefficients ont les valeurs suivantes :

$$A_0 = x^2(1-x)[(1-x)(1-y) - 1].$$

$$A_1 = x[(1-x)(1-y) - 1][\gamma + 2 - (\alpha + \beta + 5)x] + x(1-x)[(\alpha' + \beta' - \gamma - 1)y - (\alpha + \beta + 3)x(1-y)].$$

$$A_2 = [\gamma + 1 - (\alpha + \beta + 3)x][(\alpha' + \beta' - \gamma - 1)y - (\alpha + \beta + 3)x(1-y)]$$
$$+ x[(1-x)(1-y) - 1][2\alpha\beta + 3\alpha + 3\beta + 5] + (\alpha + 1)(\beta + 1)x + \alpha'\beta' y.$$

$$A_3 = -(\alpha + 1)(\beta + 1)\{(\alpha' + \beta' - \gamma - 1)y - (\alpha + \beta + 3)x(1-y) + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x](1-y)\}.$$

$$A_4 = \alpha\beta(\alpha + 1)(\beta + 1)(1-y).$$

L'équation (28) montre que z est une fonction holomorphe de x dans tout le plan, excepté

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

dans le voisinage des points

$$x = 0, \qquad x = 1, \qquad x = \infty, \qquad x = \frac{y}{y-1}.$$

Au point singulier $x = 0$, par exemple, l'équation fondamentale déterminante est

$$r(r-1)(r-2)(r-3) + r(r-1)(r-2)(2\gamma - \alpha' - \beta' + 3) - r(r-1)[(\gamma+1)(\alpha'+\beta'-\gamma-1) - \alpha'\beta'] = 0$$

dont les quatre racines sont

$$0, \quad 1, \quad \alpha' + 1 - \gamma, \quad \beta' + 1 - \gamma.$$

Pour les fonctions F_2 et F_4, on obtiendrait des résultats entièrement analogues.

Supposons au contraire que l'on parte d'un des systèmes étudiés au paragraphe XIV se ramenant aux équations aux différentielles totales

$$\begin{aligned} dz &= p\,dx + q\,dy, \\ dp &= (a_1 p + a_2 q + a_3 z)\,dx + (c_1 p + c_2 q + c_3 z)\,dy, \\ dq &= (c_1 p + c_2 q + c_3 z)\,dx + (b_1 p + b_2 q + b_3 z)\,dy; \end{aligned}$$

quand on y considère z comme une fonction de x seul ($dy = 0$), on a les trois équations

$$\frac{dz}{dx} = p, \qquad \frac{dp}{dx} = a_1 p + a_2 q + a_3 z, \qquad \frac{dq}{dx} = c_1 p + c_2 q + c_3 z$$

entre lesquelles on peut éliminer p et q. *On obtient ainsi une équation différentielle linéaire du troisième ordre à laquelle satisfait* $z(x) = z(x, y_0)$

$$B_0(x, y_0)\frac{d^3 z}{dx^3} + B_1(x, y_0)\frac{d^2 z}{dx^2} + B_2(x, y_0)\frac{dz}{dx} + B_3(x, y_0)\,z = 0.$$

Ce cas est en particulier celui de la fonction F_1; mais pour former l'équation du troisième ordre qu'elle vérifie comme fonction de x seul, au lieu d'appliquer la méthode générale que nous venons d'indiquer, nous suivrons une marche, due à M. E. Picard [1], qui s'appuie sur l'expression de F_1 par une intégrale simple.

Soit *la fonction*

$$z(x) = \int_g^h (u - a_1)^{b_1 - 1}(u - a_2)^{b_2 - 1}(u - a_3)^{b_3 - 1}(u - x)^{\lambda - 1}\,du, \tag{29}$$

g et h désignant deux des quantités a_1, a_2, a_3, ∞; nous allons former l'équation du troisième ordre vérifiée par cette fonction de x; d'après (20) et (20bis) la fonction F_1 s'identifie comme cas particulier avec $z(x)$, si l'on fait

$$\begin{aligned} &b_1 = \beta + \beta' + 1 - \gamma, \qquad b_2 = \gamma - \alpha, \qquad b_3 = 1 - \beta', \qquad \lambda = 1 - \beta, \\ &a_1 = 0, \qquad a_2 = 1, \qquad a_3 = y, \\ &g = 1, \qquad h = +\infty. \end{aligned}$$

---

[1] E. Picard, *Comptes rendus*, t. 90, p. 1267.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

La fonction $z(x)$ est d'ailleurs une des *fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur étudiées par Pochhammer* [1], dont nous aurons l'occasion de parler plus loin. L'équation du troisième ordre que nous obtiendrons pour F_1 considérée comme fonction de x seul rentre donc, comme cas particulier, dans les équations des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur de Pochhammer.

En posant

$$U = (u - a_1)^{b_1 - 1}(u - a_2)^{b_2 - 1}(u - a_3)^{b_3 - 1},$$

on a immédiatement

$$z = \int_g^h U(u - x)^{\lambda - 1}\, du,$$

$$\frac{dz}{dx} = -(\lambda - 1)\int_g^h U(u - x)^{\lambda - 2}\, du,$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)\int_g^h U(u - x)^{\lambda - 3}\, du,$$

$$\frac{d^3 z}{dx^3} = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)\int_g^h U(u - x)^{\lambda - 4}\, du.$$

Cela étant, considérons la fonction

$$G(u) = (u - a_1)^{b_1}(u - a_2)^{b_2}(u - a_3)^{b_3}(u - x)^{\lambda - 3}$$

qui s'annule pour les limites g et h du moment que l'intégrale (29) a un sens.

Calculons sa dérivée logarithmique

$$\frac{1}{G}\frac{dG}{du} = \frac{b_1}{u - a_1} + \frac{b_2}{u - a_2} + \frac{b_3}{u - a_3} + \frac{\lambda - 3}{u - x};$$

d'où, en posant

$$\varphi(u) = b_1(u - a_2)(u - a_3) + b_2(u - a_3)(u - a_1) + b_3(u - a_1)(u - a_2),$$
$$f(u) = (u - a_1)(u - a_2)(u - a_3),$$

il vient

$$\frac{dG}{du} = \varphi(u)U(u - x)^{\lambda - 3} + (\lambda - 3)f(u)U(u - x)^{\lambda - 4},$$

ou, en développant les polynomes $\varphi(u)$ et $f(u)$, respectivement du second et du troisième degré, selon les puissances de $(u - x)$,

$$\frac{dG}{du} = (\lambda - 3)f(x)U(u - x)^{\lambda - 4} + \left[\frac{\lambda - 3}{1}f'(x) + \varphi(x)\right]U(u - x)^{\lambda - 3}$$
$$+ \left[\frac{\lambda - 3}{2}f''(x) + \varphi'(x)\right]U(u - x)^{\lambda - 2} + \frac{1}{2}\left[\frac{\lambda - 3}{3}f'''(x) + \varphi''(x)\right]U(u - x)^{\lambda - 1}.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par $-(\lambda - 1)(\lambda - 2)\,du$ et intégrons-la entre les limites g et h; le premier membre devient

$$-(\lambda - 1)(\lambda - 2)\int_g^h dG = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)[G(h) - G(g)] = 0.$$

---

[1] POCHHAMMER, *Uber hypergeometrichen Funktionen höheren Ordnungen* (*Journ. reine angew. Math.*, t. LXXI, 1870, p. 216).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Quant aux quatre intégrales qui figurent au deuxième membre, elles s'identifient immédiatement avec $\frac{d^3z}{dx^3}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{dz}{dx}$ et z.

Nous obtenons ainsi l'équation du troisième ordre vérifiée par $z(x)$

$$(30)\quad f(x)\frac{d^3z}{dx^3}-\left[\frac{\lambda-3}{1}f'(x)+\varphi(x)\right]\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{\lambda-2}{1}\left[\frac{\lambda-3}{2}f''(x)+\varphi'(x)\right]\frac{dz}{dx}-\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{1.2}\left[\frac{\lambda-3}{3}f'''(x)+\varphi''(x)\right]z=0.$$

Dans le cas particulier de la fonction F_1

$$b_1=\beta+\beta'+1-\gamma,\qquad b_2=\gamma-\alpha,\qquad b_3=1-\beta',\qquad \lambda=1-\beta,$$
$$a_1=0,\qquad a_2=1,\qquad a_3=y,$$
$$\varphi(x)=(\beta+\beta'+1-\gamma)(x-1)(x-y)+(\gamma-\alpha)(x-y)x+(1-\beta')x(x-1),$$
$$f(x)=x(x-1)(x-y),$$

ce qui conduit pour l'équation du troisième ordre vérifiée par F_1

$$(31)\qquad B_0(x,y)\frac{d^3z}{dx^3}+B_1(x,y)\frac{d^2z}{dx^2}+B_2(x,y)\frac{dz}{dx}+B_3(x,y)z=0$$

aux valeurs suivantes des coefficients

$$B_0=x(1-x)(y-x),$$
$$B_1=(\gamma+1-\beta')(1-x)(y-x)+(\gamma-\alpha-\beta-2)x(y-x)-(\beta+\beta'+1)x(1-x),$$
$$B_2=(\beta+1)[(\alpha+\beta+\beta'+1-\gamma)x-\gamma(1-x)+(\beta'-\alpha-1)(y-x)],$$
$$B_3=\alpha\beta(\beta+1).$$

L'équation (31) peut s'étudier par les méthodes ordinaires de Fuchs; elle montre que l'intégrale générale de l'équation de F_1 considérée comme fonction de x est une fonction holomorphe dans tout le plan sauf dans le voisinage des quatre points

$$x=0,\qquad x=1,\qquad x=\infty,\qquad x=y$$

qui sont des points singuliers réguliers, en supposant toutefois la valeur constante de y différente de 0, 1 ou ∞.

Les équations déterminantes relatives à ces points admettent comme racines

pour $x=0$:	0,	1,	$\beta'+1-\gamma$,
» $x=1$:	0,	1,	$\gamma-\alpha-\beta$,
» $x=\infty$:	$-\beta$,	$-(\beta+1)$,	$-\alpha$,
» $x=y$:	0,	1,	$1-\beta-\beta'$.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

CHAPITRE IV.

EXTENSION AUX FONCTIONS DE DEUX VARIABLES DU PROBLÈME DE RIEMANN.

XX. — Historique.

Dans un Mémoire célèbre, Riemann [1] a défini la fonction hypergéométrique d'Euler et de Gauss, comme fonction d'une variable complexe x, par ses trois points critiques et les exposants relatifs à ces points, exposants assujettis à une relation convenable. Le Mémoire de Riemann est fondamental : il forme la base des recherches de Fuchs sur les équations différentielles linéaires (*Journal de Crelle*, t. LXVI), recherches qui ont été exposées et complétées par Tannery (*Annales de l'École Normale supérieure*, année 1874). Les mathématiciens Gauss [2] et Kummer [3] ont donné des relations linéaires à coefficients constants entre trois des intégrales de l'équation différentielle de la fonction hypergéométrique (I-6°); mais comme ils se sont placés au point de vue des valeurs réelles de la variable, les formules qu'ils ont obtenues présentent quelques difficultés quand on veut passer aux applications [4]. Ces difficultés ont été levées par M. Goursat dans sa Thèse; la méthode de Riemann est encore ici le fil conducteur.

Un problème analogue à celui de Riemann se pose pour les fonctions hypergéométriques de deux variables. C'est à M. Émile Picard qu'on doit la solution de la question, dans le cas d'une fonction de deux variables vérifiant trois équations aux dérivées partielles linéaires simultanées du type considéré dans le paragraphe XIV [5]. M. Émile Picard est, par cette voie nouvelle, conduit à la fonction F_1.

Nous allons exposer d'abord sa méthode. Pour les fonctions F_2, F_3, F_4, qui vérifient *deux* équations aux dérivées partielles simultanées du type du paragraphe XII, on peut traiter le même problème en partant des méthodes de Pochhammer [6]; c'est ce qu'a fait M. Goursat, dont nous signalerons ensuite les résultats.

---

(1) Riemann, *Mathematische Werke*, p. 67, ou *Œuvres mathématiques* traduction Laugel, p. 61-88 (Gauthier-Villars); on trouvera un exposé systématique des propriétés de la fonction hypergéométrique envisagée au point de vue de Riemann au Tome III du *Traité d'Analyse* de M. E. Picard, p. 310-340.

(2) Gauss, *Werke*, t. III, p. 207-229.

(3) Kummer, *J. reine angew. Mathematik*, t. XV, 1836, p. 39.

(4) Goursat, *Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéométrique* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. X, 1881, Supplément).

(5) Émile Picard, *Sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. X, 1881, et *Comptes rendus*, t. XC, 1880, p. 1267.

(6) Pochhammer, *Ueber hypergeometrischen Funktionen höheren ordnungen* (*J. reine angew. Mathematik*, t. LXXI, 1870, p. 216).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

XXI. — Conditions imposées a priori.

Soit $z = F(x, y)$ une fonction non uniforme des deux variables complexes x et y, jouissant des propriétés suivantes :

Entre quatre déterminations de la fonction F, il existe une relation linéaire et homogène à coefficients constants;

dans le voisinage de toute valeur u de x et v de y (u étant différent de v, u ou v ne coïncidant avec aucun des points 0, 1, ∞), la fonction F est holomorphe en x et y;

v étant un nombre quelconque différent de 0, 1, ∞, trois des branches de la fonction ont, dans le voisinage de $x = 0$, $y = v$, les déterminations suivantes, linéairement indépendantes

$$P_1(x, y), \quad P_2(x, y), \quad x^{\lambda+p_1-1}P_3(x, y),$$

λ et p_1 étant deux constantes et P_1, P_2, P_3 étant des fonctions holomorphes au voisinage de $x = 0$, $y = v$;

pareillement y ayant toujours la valeur v distincte de 0, 1, ∞, dans le voisinage de $x = 1$, trois branches de la fonction ont les déterminations

$$Q_1(x, y), \quad Q_2(x, y), \quad (1-x)^{\lambda+p_2-1}Q_3(x, y),$$

p_2 étant une constante, Q_1, Q_2, Q_3 des fonctions holomorphes au voisinage de $x = 1$, $y = v$;

pour $x = \frac{1}{x'} = \infty$, $x' = 0$, $y = v$, trois branches de la fonction ont les déterminations

$$x'^{-\lambda+1}R_1(x', y), \quad x'^{-\lambda+1}R_2(x', y), \quad x'^{3-\lambda-p_1+p_2-p_3}R_3(x', y),$$

p_3 étant une constante, R_1, R_2, R_3 des fonctions holomorphes au voisinage de $x' = 0$, $y = v$;

trois branches de la fonction ont des déterminations analogues quand x étant égal à un nombre u distinct de 0, 1, ∞, on donne à y des valeurs voisines de l'un des nombres 0, 1, ∞, les divers exposants étant représentés par les mêmes lettres accentuées; par exemple au voisinage de $y = 0$, trois branches ont les déterminations

$$P'_1(x, y), \quad P'_2(x, y), \quad y^{\lambda'+p'_1-1}P'_3(x, y),$$

P'_1, P'_2, P'_3 étant holomorphes au voisinage de $x = u$, $y = 0$;

enfin dans le voisinage de

$$x = y = w,$$

w étant une quantité quelconque distincte de 0, 1, ∞, la fonction admet les trois déterminations, linéairement indépendantes,

$$A_1(x, y), \quad A_2(x, y), \quad (x-y)^{\lambda+p_3-1}A_3(x, y),$$

A_1, A_2, A_3 étant holomorphes au voisinage de $x = w$, $y = w$.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Nous supposons que ni λ, $\lambda + p_1$, $\lambda + p_2$, $\lambda + p_3$, $p_1 + p_2 + p_3$, ni les quantités analogues accentuées ne soient des *entiers*, et que p_1 est différent de p_2, p'_1 de p'_2. Nous particularisons ces constantes accentuées en faisant

$$p'_1 = p_1, \qquad p'_2 = p_2, \qquad p'_3 = \lambda, \qquad \lambda' = p_3.$$

Ceci posé, nous allons montrer que la fonction $z = F(x, y)$ est déterminée par les conditions précédentes, le mot *déterminée* signifiant que $z = F(x, y)$ étant une première fonction satisfaisant à ces conditions, toute autre fonction, jouissant des mêmes propriétés, s'exprime par une fonction linéaire à coefficients constants de trois déterminations linéairement indépendantes de z.

Parmi ces déterminations, il en est une particulièrement intéressante, c'est celle qui est holomorphe au voisinage de $x = 0$, $y = 0$; nous allons voir que c'est la fonction $F_1(x, y)$.

XXII. — Formation des équations aux dérivées partielles du second ordre que vérifie la fonction z.

La fonction z définie dans le numéro précédent, vérifie trois équations simultanées du second ordre du type du paragraphe XIV. Pour les former, nous désignerons par z_1, z_2, z_3 trois branches distinctes de la fonction z; par p, q, r, s, t les dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ et par p_i, q_i, r_i, s_i, t_i les dérivées analogues de z_i. La fonction z vérifie évidemment les trois équations simultanées

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} r & p & q & z \\ r_1 & p_1 & q_1 & z_1 \\ r_2 & p_2 & q_2 & z_2 \\ r_3 & p_3 & q_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} s & p & q & z \\ s_1 & p_1 & q_1 & z_1 \\ s_2 & p_2 & q_2 & z_2 \\ s_3 & p_3 & q_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} t & p & q & z \\ t_1 & p_1 & q_1 & z_1 \\ t_2 & p_2 & q_2 & z_2 \\ t_3 & p_3 & q_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ces trois équations restent les mêmes quand on remplace z_1, z_2, z_3 par

$$c_{11} z_1 + c_{12} z_2 + c_{13} z_3,$$
$$c_{21} z_1 + c_{22} z_2 + c_{23} z_3,$$
$$c_{31} z_1 + c_{32} z_2 + c_{33} z_3,$$

les c_{ik} étant des constantes. Car par l'effet de cette substitution les coefficients des équa-

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

tions (1), (2), (3) sont multipliés par une même constante, à savoir le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix},$$

supposé différent de zéro.

Pour déterminer les coefficients de ces équations, nous multiplierons la première par le facteur μ défini comme il suit

$$\mu = x^{-\lambda+p_1+3}(1-x)^{-\lambda+p_2+3}y^{-\lambda'+p'_1+2}(1-y)^{-\lambda'+p'_2+2}(x-y)^{\lambda+p_3+3}.$$

Prenons le coefficient de r, sur lequel nous développerons le raisonnement; ce coefficient est

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & z_1 \\ p_2 & q_2 & z_2 \\ p_3 & q_3 & z_3 \end{vmatrix} \mu.$$

Laissant y constant et distinct de 0, 1, ∞, regardons cette expression (4) comme une fonction de x; cette fonction ne peut avoir d'autres points critiques que 0, 1, ∞; nous allons étudier la fonction dans le voisinage de chacun de ces points.

Prenons d'abord le point $x = 0$. La valeur du déterminant de l'expression (4) étant la même, à un facteur constant près, quand on remplace les éléments d'un système fondamental d'intégrales par ceux d'un autre système, nous pouvons supposer que z_1, z_2, z_3 désignent les trois branches dont il a été question au paragraphe XXI et qui sont susceptibles de prendre les formes

$$z_1 = P_1(x, y), \qquad z_2 = P_2(x, y), \qquad z_3 = x^{\lambda+p_3-1}P_3(x, y).$$

En substituant ces valeurs dans l'expression (4) on voit tout de suite qu'elle est holomorphe dans le voisinage de $x = 0$ et qu'elle s'annule pour $x = 0$. On reconnaît de même qu'il en est ainsi pour $x = 1$, et pour $x = y$. L'expression (4) est donc une fonction holomorphe de x s'annulant pour $x = 0$, $x = 1$, $x = y$.

Étudions-la dans le voisinage de $x = \infty$ ou, en faisant $x = \frac{1}{x'}$, dans le voisinage de $x' = 0$. Nous pouvons supposer que z_1, z_2, z_3 désignent les trois branches susceptibles de prendre au voisinage de $x' = 0$ les formes indiquées plus haut

$$x'^{-\lambda+1}R_1(x', y), \quad x'^{-\lambda+1}R_2(x', y), \quad x'^{3-\lambda-(p_1+p_2+p_3)}R_3(x', y).$$

On aura

$$p_1 = \frac{\partial z_1}{\partial x} = -x'^2\frac{\partial z_1}{\partial x'} = x'^{-\lambda+2}P_1(x'),$$

$$p_2 = \frac{\partial z_2}{\partial x} = -x'^2\frac{\partial z_1}{\partial x'} = x'^{-\lambda+2}P_2(x'),$$

$$p_3 = \frac{\partial z_3}{\partial x} = -x'^2\frac{\partial z_1}{\partial x'} = x'^{4-\lambda-(p_1+p_2+p_3)}P_3(x'),$$

$P_1(x')$, $P_2(x')$, $P_3(x')$ désignant des séries procédant suivant les puissances positives croissantes de x'. En substituant ces valeurs, ainsi que les expressions des dérivées partielles par rapport à y, dans l'expression (4), on reconnaît de suite qu'elle devient égale à x'^{-3} multiplié par une fonction holomorphe en x'. Le coefficient (4) de r dans l'équation (1) multipliée par μ est donc une fonction de x qui est holomorphe en tous les points à distance finie, qui s'annule

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

pour $x = 0$, $x = 1$, $x = y$ et qui à l'infini est de l'ordre de

$$\frac{1}{x'^3} = x^3.$$

C'est donc un *polynome* du troisième degré en x, de la forme

$$x(x-1)(x-y)\varphi(y),$$

le facteur $\varphi(y)$ étant une constante par rapport à x, c'est-à-dire une fonction de y seul.

Laissons maintenant x constant et distinct de $0, 1, \infty$; nous considérerons la même fonction (4) comme fonction de y : on vérifiera qu'elle n'a d'autres singularités que $y = 0$, $y = 1$, $y = x$, $y = \infty$, qu'elle s'annule pour $y = x$, qu'elle est holomorphe au voisinage de $y = 0$, $y = 1$, $y = x$, et qu'elle est à l'infini de l'ordre de

$$\frac{1}{y'} = y.$$

On en conclut qu'elle est en y un polynome du premier degré s'annulant pour $y = x$. Elle est donc de la forme

$$(y-x)\psi(x),$$

$\psi(x)$ désignant une fonction de x seul. Égalant ces deux formes de l'expression (4) on a, quels que soient x et y,

$$x(x-1)(x-y)\varphi(y) = (x-y)\psi(x),$$

d'où l'on conclut $\varphi(y) = h$ (h constante indépendante de x et y) et

$$\psi(x) = hx(x-1).$$

On peut toujours diviser tous les coefficients de (1) par h, ce qui revient à prendre $h = 1$.

En étudiant de même les coefficients de p, q, z dans l'équation (1) multipliée par μ, on trouve : coefficient de $p = Ax^2 + Bx + C$; A, B, C étant linéaires en y

$$A = ly + l', \qquad B = my + m', \qquad C = ny + n';$$

coefficient de $q = gy(1-y)$, g constante;
coefficient de $z = Dx + E$, D et E étant linéaires en y

$$D = \delta y + \delta', \qquad E = \varepsilon y + \varepsilon'.$$

L'équation (1) peut donc s'écrire

$$(1') \qquad x(x-1)(x-y)r + (Ax^2 + Bx + C)p + gy(1-y)q + (Dx + E)z = 0.$$

Si nous passons ensuite à l'équation (2), nous la multiplierons par

$$\mu' = x^{-(\lambda+p_1+2)}(1-x)^{-(\lambda+p_2+2)}(1-y)^{-(\lambda'+p_3'+2)}(x-y)^{-(\lambda+p_3+3)},$$

et nous verrons, par un raisonnement analogue, qu'elle s'écrit

$$(2') \qquad (x-y)s = (a''x + a')p + (b''y + b')q + ez,$$

où a', a'', b', b'', e sont des constantes.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Enfin l'équation (3) est analogue à (1), sauf le changement de x en y et de y en x. Elle a, d'après le même raisonnement, la forme

$$(3') \qquad y(y-1)(y-x)t + (A_1 y^2 + B_1 y + C_1)q + g_1 x(1-x)p + (D_1 y + E_1)z = 0,$$

A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 étant linéaires en x et g_1 désignant une constante :

$$A_1 = l_1 x + l'_1, \qquad B_1 = m_1 x + m'_1, \qquad C_1 = n_1 x + n'_1,$$
$$D_1 = \delta_1 x + \delta'_1, \qquad E_1 = \varepsilon_1 x + \varepsilon'_1.$$

Détermination des coefficients.

On peut achever de déterminer les coefficients en écrivant les conditions de compatibilité. Les équations aux dérivées partielles doivent en effet admettre trois solutions linéairement indépendantes. Elles sont de la forme (XIV)

$$(5) \qquad \begin{cases} r = a_1 p + a_2 q + a_3 z, \\ s = b_1 p + b_2 q + b_3 z, \\ t = c_1 p + c_2 q + c_3 z. \end{cases}$$

Ces équations conduisent au système d'équations aux différentielles totales

$$(6) \qquad \begin{cases} dz = p\,dx + q\,dy, \\ dp = (a_1 p + a_2 q + a_3 z)\,dx + (b_1 p + b_2 q + b_3 z)\,dy, \\ dq = (b_1 p + b_2 q + b_3 z)\,dx + (c_1 p + c_2 q + c_3 z)\,dy \end{cases}$$

définissant z, p, q en fonction de x et y.

Les conditions de compatibilité sont

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}(a_1 p + a_2 q + a_3 z) = \dfrac{\partial}{\partial x}(b_1 p + b_2 q + b_3 z), \\ \dfrac{\partial}{\partial y}(b_1 p + b_2 q + b_3 z) = \dfrac{\partial}{\partial x}(c_1 p + c_2 q + c_3 z), \end{cases}$$

ou en développant

$$a_1 s + a_2 t + a_3 q + p\frac{\partial a_1}{\partial y} + q\frac{\partial a_2}{\partial y} + z\frac{\partial a_3}{\partial y} = b_1 r + b_2 s + b_3 p + p\frac{\partial b_1}{\partial x} + q\frac{\partial b_2}{\partial x} + z\frac{\partial b_3}{\partial x},$$

$$b_1 s + b_2 t + b_3 q + p\frac{\partial b_1}{\partial y} + q\frac{\partial b_2}{\partial y} + z\frac{\partial b_3}{\partial y} = c_1 r + c_2 s + c_3 p + p\frac{\partial c_1}{\partial x} + q\frac{\partial c_2}{\partial x} + z\frac{\partial c_3}{\partial x}.$$

Remplaçant r, s, t par leurs valeurs (5) et égalant les coefficients de p, q, z on a les six condi-

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

tions

$$
(8)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&a_1 b_1 + a_2 c_1 + \frac{\partial a_1}{\partial y} = b_1 a_1 + b_2 b_1 + b_3 + \frac{\partial b_1}{\partial x},\\
&a_1 b_2 + a_2 c_2 + a_3 + \frac{\partial a_2}{\partial y} = b_1 a_2 + b_2^2 + \frac{\partial b_2}{\partial x},\\
&a_1 b_3 + a_2 c_3 + \frac{\partial a_3}{\partial y} = b_1 a_3 + b_2 b_3 + \frac{\partial b_3}{\partial x},\\
&b_1^2 + b_2 c_1 + \frac{\partial b_1}{\partial y} = c_1 a_1 + c_2 b_1 + c_3 + \frac{\partial c_1}{\partial x},\\
&b_1 b_2 + b_2 c_2 + b_3 + \frac{\partial b_2}{\partial y} = c_1 a_2 + c_2 b_2 + \frac{\partial c_2}{\partial x},\\
&b_1 b_3 + b_2 c_3 + \frac{\partial b_3}{\partial y} = c_1 a_3 + c_2 b_3 + \frac{\partial c_3}{\partial x}
\end{aligned}
\right.
$$

qui doivent avoir lieu quels que soient x et y.

En écrivant toutes ces conditions on déterminera les constantes figurant dans les coefficients. Actuellement, ces coefficients ont les valeurs suivantes :

$$
a_1 = \frac{Ax^2 + Bx + C}{x(1-x)(x-y)}, \qquad a_2 = \frac{gy(1-y)}{x(1-x)(x-y)}, \qquad a_3 = \frac{Dx + E}{x(1-x)(x-y)},
$$

$$
b_1 = \frac{a''x + a'}{x-y}, \qquad b_2 = \frac{b''y + b'}{x-y}, \qquad b_3 = \frac{e}{x-y},
$$

$$
c_1 = \frac{g_1 x(1-x)}{y(1-y)(y-x)}, \qquad c_2 = \frac{A_1 y^2 + B_1 y + C_1}{y(1-y)(y-x)}, \qquad c_3 = \frac{D_1 y + E_1}{y(1-y)(y-x)}.
$$

La première et la cinquième des conditions (8) sont, après suppression du terme $a_1 b_1$ dans les deux membres de la première et du terme $b_2 c_2$ dans ceux de la cinquième,

$$
(9)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&-\frac{gg_1}{(x-y)^2} - \frac{Ax^2 + Bx + C}{x(1-x)(x-y)^2} + \frac{lx^2 + mx + n}{x(1-x)(x-y)}\\
&\quad = \frac{(a''x + a')(b''y + b')}{(x-y)^2} + \frac{e}{x-y} + \frac{a''}{x-y} - \frac{a''x + a'}{(x-y)^2},\\
&-\frac{gg_1}{(y-x)^2} + \frac{A_1 y^2 + B_1 y + C_1}{y(1-y)(y-x)^2} + \frac{l_1 y^2 + m_1 y + n_1}{y(1-y)(y-x)}\\
&\quad = \frac{(a''x + a')(b''y + b')}{(y-x)^2} + \frac{e}{x-y} + \frac{b''}{x-y} + \frac{b''y + b'}{(y-x)^2}.
\end{aligned}
\right.
$$

En chassant les dénominateurs et remplaçant A, B, C, A_1, B_1, C_1 par leurs expressions on obtient

$$
\begin{aligned}
&-gg_1 x(1-x) + l'x^2 + m'x + n' + x(lx^2 + mx + n) - (a''x + a')(b''y + b')x(1-x)\\
&\qquad - (e + a'')(x-y)x(1-x) + (a''x + a')x(1-x) = 0;\\
&-gg_1 y(1-y) + l'_1 y^2 + m'_1 y + n'_1 + y(l_1 y^2 + m_1 y + n_1) - (a''x + a')(b''y + b')y(1-y)\\
&\qquad - (e + b'')(x-y)y(1-y) - (b''y + b')y(1-y) = 0.
\end{aligned}
$$

En égalant à zéro les coefficients de $x^3 y$ et de $x^2 y$ dans la première, puis de xy^2 dans la deuxième, on a

$$
a''b'' = 0, \qquad e + a'' = 0, \qquad e + b'' = 0
$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

qui donnent

$$a'' - b'' = e = 0.$$

Les conditions deviennent alors

$$(a' - gg_1 - a'b')x(1-x) + l'x^2 + m'x + n' - x(lx^2 + mx + n) = 0,$$
$$(-b' - gg_1 - a'b')y(1-y) + l'_1 y^2 + m'_1 y + n'_1 + y(l_1 y^2 + m_1 y + n_1) = 0.$$

Ces polynomes étant identiquement nuls, on a

$$l = l_1 = n' = n'_1 = 0.$$

et d'autres conditions que nous n'écrirons pas.

Le coefficient b_3 est alors nul, la troisième et la sixième des conditions (8) deviennent

$$(8') \quad \begin{cases} a_2 c_3 + \dfrac{\partial a_3}{\partial y} = b_1 a_3, \\ b_2 c_3 = c_1 a_3 + \dfrac{\partial c_3}{\partial x}. \end{cases}$$

En substituant les valeurs des coefficients, chassant les dénominateurs et égalant à zéro les coefficients des termes en x et y, on a des relations dont nous retiendrons les deux suivantes :

$$\delta = 0, \qquad \delta_1 = 0.$$

En utilisant ainsi toutes les relations de compatibilité, on arriverait à réduire les coefficients constants au nombre minimum et à ramener les équations aux dérivées partielles aux trois équations de F_1.

Mais cette méthode a l'inconvénient de ne pas donner les expressions des coefficients en fonction des exposants

$$\lambda, \quad p_1, \quad p_2, \quad p_3.$$

Pour arriver à ces expressions, reprenons la marche suivie par M. E. Picard, en ayant recours aux recherches de Pochhammer.

XXIII. — Utilisation des recherches de Pochhammer.

Les expressions des coefficients étant, d'après les résultats précédents,

$$(10) \quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{l'x^2 + (m_1 y + m')x + n_1 y}{x(1-x)(x-y)}, & a_2 = \dfrac{g_1 y(1-y)}{x(1-x)(x-y)}, & a_3 = \dfrac{\delta x + \varepsilon y + \varepsilon'}{x(1-x)(x-y)}, \\ b_1 = \dfrac{a'}{x-y}, & b_2 = \dfrac{b'}{x-y}, & b_3 = 0, \\ c_1 = \dfrac{g_1 x(1-x)}{y(1-y)(y-x)}, & c_2 = \dfrac{l'_1 y^2 + (m_1 x + m'_1)y + n_1 x}{y(1-y)(y-x)}, & c_3 = \dfrac{\delta'_1 y + \varepsilon_1 x + \varepsilon'_1}{y(1-y)(y-x)}, \end{cases}$$

rappelons les résultats des recherches de Pochhammer sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur à une variable.

Soit une fonction d'une variable indépendante x admettant les seuls points critiques u_1, u_2, u_3 et ∞, et telle qu'entre *quatre* branches de la fonction, il existe une relation linéaire et homogène à coefficients constants. Dans le voisinage d'un point critique u_i ($i = 1, 2, 3$), on a trois déter-

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

minations linéairement indépendantes de la fonction

$$P_1(x), \qquad P_2(x), \qquad (x-u_i)^{\lambda+p_i-1}P_3(x),$$

P_1, P_2, P_3 étant holomorphes au voisinage de $x = u_i$.

Dans le voisinage de $x = \frac{1}{x'} = \infty$, la fonction a les déterminations

$$x'^{-\lambda+1}R_1(x'), \qquad x'^{-\lambda+1}R_2(x'), \qquad x'^{3-\lambda-p_1+p_2+p_3}R_3(x'),$$

R_1, R_2, R_3 étant holomorphes au voisinage de $x' = 0$.

D'après les principes posés par Fuchs et invoqués par Pochhammer, l'équation linéaire du troisième ordre à laquelle satisfait une telle fonction F est complètement déterminée et peut se mettre sous la forme suivante [1] :

$$f(x)\frac{d^3F}{dx^3} - \left[\frac{\lambda-3}{1}f'(x)+\varphi(x)\right]\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{\lambda-2}{1}\left[\frac{\lambda-3}{2}f''(x)+\varphi'(x)\right]\frac{dF}{dx} - \frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{1.2}\left[\frac{\lambda-3}{3}f'''(x)+\varphi''(x)\right]F=0,$$

où

$$f(x) = (x-u_1)(x-u_2)(x-u_3),$$

$$\varphi(x) = f(x)\left[\frac{p_1}{x-u_1} + \frac{p_2}{x-u_2} + \frac{p_3}{x-u_3}\right]$$

Ces résultats de Pochhammer étant rappelés, considérons notre fonction F (x, y) comme une fonction de x seul, y ayant une valeur distincte de 0, 1, ∞. Les points critiques de F (x, y) sont alors $x = 0$, $x = 1$, $x = y$, $x = \infty$ et les exposants relatifs à ces points critiques sont précisément ceux de la fonction F (x) que nous venons de considérer. La fonction F (x, y) satisfait donc à l'équation

$$\text{(I)}\quad f(x)\frac{d^3F}{dx^3} - \left[\frac{\lambda-3}{1}f'(x)+\varphi(x)\right]\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{\lambda-2}{1}\left[\frac{\lambda-3}{2}f''(x)+\varphi'(x)\right]\frac{dF}{dx} - \frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{1.2}\left[\frac{\lambda-3}{3}f'''(x)+\varphi''(x)\right]F=0,$$

où

$$f(x) = x(x-1)(x-y),$$

$$\varphi(x) = f(x)\left[\frac{p_1}{x} + \frac{p_2}{x-1} + \frac{p_3}{x-y}\right].$$

Si, au contraire, nous regardons x comme constant et y comme variable, nous obtiendrons pour F (x, y) une équation (I') qui se déduira de (I) en remplaçant x par y, y par x et en accentuant les constantes p_1, p_2, p_3, λ.

Pour déterminer les constantes entrant dans les coefficients (10) de nos trois équations (5) on tirera de ces trois dernières une équation du troisième ordre (XIX) ne contenant que les dérivées partielles de F par rapport à x, et l'on identifiera cette équation avec (I).

---

[1] Nous avons déjà rencontré cette équation, conf. (30-XIX).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

XXIV. — Résultats du calcul.

En achevant les calculs, qui ne présentent d'autre difficulté que celle de la longueur, on obtient finalement pour $F(x, y)$ les trois équations

$$(11)\quad \begin{cases} (x-y)s = (1-\lambda')p - (1-\lambda)q, \\ x(x-1)(x-y)r + [(5-2\lambda-p_1-p_2-p_3)x^2 + (2\lambda+p_1+p_2-4)xy + (\lambda-3+p_1+p_3)x \\ \qquad - (\lambda+p_1-2)y]p + (1-\lambda)y(1-y)q + (\lambda-1)(3-\lambda-p_1-p_2-p_3)(x-y)z = 0, \\ y(y-1)(y-x)t + \ldots = 0, \end{cases}$$

où la dernière équation est déduite de la seconde en échangeant x et y, et en accentuant les lettres λ, p_1, p_2, p_3.

Il est facile de vérifier que ce système coïncide avec celui des équations (13-XIV) de F_1, si l'on fait

$$p_1 = 1 + \beta + \beta' - \gamma, \qquad p_2 = \gamma - \alpha, \qquad p_3 = 1 - \beta', \qquad \lambda = 1 - \beta;$$

on trouve une autre vérification dans l'expression des intégrales des équations F_1 au voisinage de $x = 0$, $y = 0$ (XV). Mais sans identifier avec les équations F_1, on peut constater directement que les équations (11) admettent trois solutions linéairement indépendantes, dont l'une n'est autre que la fonction F_1. Pour cela suivons l'analyse de M. E. Picard (*loc. cit.*).

XXV. — Les trois solutions linéairement indépendantes.

Il résulte du travail de Pochhammer (voir les calculs développés au paragraphe XIX) que l'équation (I) admet comme solutions l'intégrale définie

$$\int_g^h u^{p_1-1}(u-1)^{p_2-1}(u-y)^{p_3-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du,$$

g et h désignant deux quelconques des quantités $0, 1, y, x, \infty$. Nous supposons, pour que toutes ces intégrales aient un sens,

$$\mathcal{R}(p_1) > 0, \qquad \mathcal{R}(p_2) > 0, \qquad \mathcal{R}(p_3) > 0, \qquad \mathcal{R}(\lambda) > 0, \qquad \mathcal{R}(3-\lambda-p_1-p_2-p_3) > 0.$$

De même, l'équation (I') admet la solution

$$\int_g^h u^{p'_1-1}(u-1)^{p'_2-1}(u-x)^{p'_3-1}(u-y)^{\lambda'-1}\,du,$$

mais à cause des relations

$$p'_1 = p_1, \qquad p'_2 = p_2, \qquad p'_3 = \lambda, \qquad \lambda' = p_3,$$

ces solutions coïncident avec les précédentes; nous obtenons ainsi des solutions communes aux équations (I) et (I'). Une vérification facile montre que ces solutions satisfont aussi au système des trois équations (11).

C'est une de ces intégrales définies (celle pour laquelle $g = 1$, $h = +\infty$) qui donne en particulier, d'après les paragraphes XV et XIX, la fonction hypergéométrique F_1.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

XXVI. — Recherches de M. Goursat.

Extension du problème de Riemann aux fonctions F_2 et F_3.

En s'appuyant sur les résultats de Pochhammer, M. Goursat [1] a montré de même que les fonctions F_2, F_3, F_4 peuvent être définies par leurs points critiques et les exposants correspondants.

M. Goursat retrouve la fonction F_3 comme solution du problème suivant. Proposons-nous de déterminer une fonction $z = F(x, y)$ jouissant des propriétés suivantes :

1° Entre cinq déterminations de cette fonction existe une relation linéaire à coefficients constants;

2° Dans le voisinage de toute valeur a de x et b de y ne coïncidant pas avec $0, 1, \infty$ et telles que l'on n'ait pas $ab = a + b$, chaque branche de cette fonction est holomorphe;

3° Dans le voisinage des points suivants :

$$\left.\begin{array}{ll} x = 0, & y = b \\ x = 1, & y = b \\ x = \infty, & y = b \end{array}\right\} b \neq 0, 1, \infty,$$

$$\left.\begin{array}{ll} x = a, & y = 0 \\ x = a, & y = 1 \\ x = a, & y = \infty \end{array}\right\} a \neq 0, 1, \infty,$$

$$x = a, \quad y = b, \quad ab = a + b,$$

on a respectivement les quatre déterminations linéairement indépendantes

$$\begin{array}{llll}
P_1(x, y), & P_2(x, y), & x^{\alpha'+1-\gamma} P_3(x, y), & x^{\beta'+1-\gamma} P_4(x, y), \\
Q_1(x, y), & Q_2(x, y), & Q_3(x, y), & (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} Q_4(x, y), \\
x^{-\alpha} R_1(x, y), & x^{-\alpha} R_2(x, y), & x^{-\beta} R_3(x, y), & x^{-\beta} R_4(x, y), \\
P'_1(x, y), & P'_2(x, y), & y^{\alpha+1-\gamma} P'_3(x, y), & y^{\beta+1-\gamma} P'_4(x, y), \\
Q'_1(x, y), & Q'_2(x, y), & Q'_3(x, y), & (1-y)^{\gamma-\alpha'-\beta'} Q'_4(x, y), \\
y^{-\alpha'} R'_1(x, y), & y^{-\alpha'} R'_2(x, y), & y^{-\beta'} R'_3(x, y), & y^{-\beta'} R'_4(x, y), \\
S_1(x, y), & S_2(x, y), & S_3(x, y), & (xy - x - y)^{\gamma+1-\alpha-\beta-\alpha'-\beta'} S_4(x, y),
\end{array}$$

les 28 fonctions P, Q, R, P′, Q′, R′, S étant holomorphes respectivement aux points considérés.

Ceci étant, si nous donnons à y une valeur constante $\frac{c}{c-1}$ (c étant différent de $0, 1, \infty$), z devient une fonction de la seule variable x holomorphe pour toute valeur de x ne coïncidant avec aucun des points $0, 1, c, \infty$ et possédant dans le domaine de chacun de ces points quatre déterminations linéairement indépendantes, dont la forme se déduit immédiatement du Tableau précédent.

---

[1] Ed. Goursat, *Comptes rendus*, t. 95, p. 903 et 1044.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Or il existe effectivement une fonction $z(x)$ remplissant ces conditions; cette fonction satisfait à une équation linéaire du quatrième ordre complètement déterminée

$$A_0(x)\frac{d^4 z}{dx^4} + A_1(x)\frac{d^3 z}{dx^3} + A_2(x)\frac{d^2 z}{dx^2} + A_3(x)\frac{dz}{dx} + A_4(x) z = 0,$$

où

$$A_0 = x^2(1-x)(x-c),$$

$$A_1 = x[(2\gamma - \alpha' - \beta' + 3)(1-x)(x-c) - (\alpha+\beta-\gamma-3)x(x-c) + (\alpha+\beta+\alpha'+\beta'+2-\gamma)x(1-x)],$$

$$A_2 = [\gamma+1-(\alpha+\beta+3)x][(\alpha+\beta+3)x - (\alpha'+\beta'-\gamma-1)c]$$
$$- x(x-c)(2\alpha\beta+3\alpha+3\beta+5) + (1-c)(\alpha+1)(\beta+1)x - \alpha'\beta' c,$$

$$A_3 = -(\alpha+1)(\beta+1)[(2\alpha+2\beta-\gamma)x + (\alpha'+\beta'-\gamma-1)c - \gamma],$$

$$A_4 = -\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1).$$

Or si, dans cette équation, on remplace la constante c par sa valeur $\frac{y}{y-1}$, elle s'identifie immédiatement avec l'équation (28-XIX) vérifiée par la fonction F_3 considérée comme fonction de x seul.

Donc le problème posé conduit directement à la fonction F_3.

XXVII. — Recherches de M. E. Picard.

Groupe des équations de F_1. Fonctions hyperfuchsiennes déduites de F_1.

A l'étude du système d'équations aux dérivées partielles de F_1, envisagé à un point de vue connexe de celui des paragraphes précédents, se rattache un ensemble de travaux de M. E. Picard dont nous ne pouvons que résumer les résultats les plus importants. D'abord l'intégrale générale des équations de F_1 n'est pas une fonction uniforme de x et y; il y a donc lieu de chercher comment elle se transforme lorsque les variables x et y tournent autour d'un des points singuliers

$$x = 0, \qquad y = b \neq 0, 1, \infty,$$
$$x = 1, \qquad y = b \neq 0, 1, \infty,$$
$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

C'est le problème de la détermination du groupe des équations de F_1.

M. Picard [1]) considère trois intégrales particulières de ces équations [2]) :

$$\omega_1 = \int_0^x V\,du, \qquad \omega_2 = \int_0^y V\,du, \qquad \omega_3 = \int_0^1 V\,du,$$

$$V = u^{\beta+\beta'}(u-1)^{\gamma}(u-x)^{\alpha-1}(u-y)^{\beta'}$$

---

[1]) E. Picard, *Sur les groupes de certaines équations différentielles linéaires* (*Bull. des Sc. mathém.*, 2e série, t. IX, 1885, p. 202-209). La méthode exposée dans ce Mémoire est une extension de celle du *Traité d'Analyse*, t. II, p. 242, où sont étudiées systématiquement les propriétés des intégrales hypergéométriques.

[2]) ω_1, ω_2, ω_3 sont, aux facteurs constants près, les trois intégrales désignées par z_1, z_5 et z_3 au paragraphe XIV.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

qu'il met sous la forme suivante

$$\omega_1 = U_x - U_0, \qquad \omega_2 = U_y - U_0, \qquad \omega_3 = U_1 - U_0$$

en posant

$$U_x = \int_{u_0}^{x} V\,du, \qquad U_y = \int_{u_0}^{y} V\,du,$$

$$U_0 = \int_{u_0}^{0} V\,du, \qquad U_1 = \int_{u_0}^{1} V\,du, \qquad U_\infty = \int_{u_0}^{\infty} V\,du,$$

u_0 désignant un point arbitraire du plan de la variable u, les chemins d'intégration étant des courbes, ne se coupant pas, joignant u_0 aux points x, y, 0, 1, ∞, disposées en éventail autour de u_0 dans l'ordre (de gauche à droite), 0, x, 1, y, ∞. On étudie alors comment varient les U lorsqu'on fait décrire à x un circuit autour du point 0, puis autour du point 1, etc. ; des formules de transformation des U se déduisent immédiatement celles des ω, d'où le groupe de F_1 qui contient cinq substitutions fondamentales. Voici, par exemple, celle qui correspond à la circulation dans le sens direct de x autour de l'origine

$$\begin{aligned}
\omega'_1 &= e^{2\pi i(\alpha+\beta'-\gamma)}\omega_1,\\
\omega'_2 &= \omega_2 + [e^{2\pi i(\alpha-\beta)}-1]\omega_1,\\
\omega'_3 &= \omega_3 + [e^{2\pi i(\alpha-\beta)}-1]\omega_1.
\end{aligned}$$

A l'étude du groupe de F_1 se rattache le problème connexe de *l'inversion du quotient de deux intégrales : à quelles conditions les fonctions $x(s, t)$ et $y(s, t)$, définies par les équations*

$$\frac{\omega_1(x, y)}{\omega_3(x, y)} = s, \qquad \frac{\omega_2(x, y)}{\omega_3(x, y)} = t,$$

sont-elles des fonctions uniformes de s et t.

On sait [1] que le même problème, résolu pour l'inversion du quotient

$$\frac{\omega_1(x)}{\omega_2(x)} = s$$

de deux intégrales de l'équation hypergéométrique, conduit à une classe particulière remarquable de ces fonctions que H. Poincaré a appelées *fuchsiennes*.

M. Picard [2] a démontré qu'en posant

$$a = 1 + \beta - \beta' - \gamma, \qquad b = \gamma - \alpha, \qquad \lambda = 1 - \beta, \qquad \mu = 1 - \beta'$$

pour que l'inversion se fasse d'une manière uniforme il fallait que les dix nombres

$$\begin{gathered}
a + b - 1, \quad a + \lambda - 1, \quad a + \mu - 1, \quad b + \lambda - 1, \quad b + \mu - 1, \quad \lambda + \mu - 1,\\
2 - \lambda - \mu - a, \quad 2 - \lambda - \mu - b, \quad 2 - \lambda - a - b, \quad 2 - \mu - a - b
\end{gathered}$$

soient les inverses d'un nombre entier positif ou négatif.

---

(1) E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. III.

(2) E. Picard, *Sur les fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques de deux variables* (*Ann. Éc. normale*, 2e série, t. II, 1881, p. 381).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Tous les systèmes de nombres a, b, λ, μ vérifiant ces conditions ont été déterminés par M. Le Vavasseur [1] qui en a trouvé 102.

Lorsque l'inversion conduit à des fonctions x et y uniformes, ces fonctions rentrent dans la classe de fonctions que M. Picard a appelées *hyperfuchsiennes* et dont il a fait l'étude.

M. Picard a considéré [2] spécialement le cas où

$$a = b = \lambda = \mu = \frac{2}{3}$$

qui correspond à $F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, x, y\right)$; les intégrales ω des équations de F_1 sont ici de la forme

$$\int_g^h [u(u-1)(u-x)(u-y)]^{\frac{1}{3}} du.$$

Les fonctions uniformes $x(s, t)$ et $y(s, t)$ jouent dans la théorie des fonctions abéliennes auxquelles conduit la relation algébrique

$$v^3 = u(u-1)(u-x)(u-y)$$

le même rôle que la fonction modulaire dans la théorie des fonctions elliptiques.

---

(1) Le Vavasseur, Thèse, p. 113-191.

(2) E. Picard, *Sur des fonctions de deux variables indépendantes analogues aux fonctions modulaires* (*Acta mathematica*, t. II, 1883, p. 114-135).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

CHAPITRE V.

DES DEUX MODES DE RÉDUCTION DES FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES DE DEUX VARIABLES.

XXVIII. — Considérations générales.

On peut concevoir de deux façons différentes le problème de la réduction :

Premier mode de réduction, obtenu en supposant y fonction de x, ou réductions de première espèce. — Imaginons un système d'équations aux dérivées partielles linéaires et homogènes simultanées dont l'intégrale générale z est une combinaison linéaire à coefficients constants d'un certain nombre ρ de fonctions linéairement indépendantes $z_1, z_2, \ldots, z_\rho$

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots + C_\rho z_\rho. \tag{I}$$

Les variables indépendantes sont supposées être au nombre de deux, x et y; $z_1, z_2, \ldots, z_\rho$ sont des fonctions de x et y. Si alors on établit une relation quelconque

$$y = f(x)$$

entre x et y, z devient fonction de x seul et vérifie une équation différentielle linéaire et homogène d'ordre ρ. Mais, quand y est une fonction spéciale de x, définie par une équation différentielle non linéaire d'ordre $\rho - 1$, z vérifie une équation linéaire et homogène d'ordre $\rho - 1$. L'équation différentielle non linéaire qui donne y en fonction de x est *l'équation différentielle réductrice;* son intégrale générale est

$$K_1 z_1 + K_2 z_2 + \ldots + K_\rho z_\rho = 0,$$

avec $\rho - 1$ constantes qui sont les rapports des constantes $K_1, K_2, \ldots, K_\rho$, à l'une d'entre elles.

Deuxième mode de réduction. — En se plaçant dans l'hypothèse d'une fonction z de x et y définie par un système d'équations aux dérivées partielles linéaires et homogènes simultanées, dont l'intégrale générale est de la forme (I) et dont les coefficients sont *rationnels* en x et y, on peut dire que ces équations ne sont pas *irréductibles* et par suite qu'il y a *réduction*, quand il existe une intégrale z vérifiant des équations analogues, *à coefficients rationnels* dont l'intégrale générale renferme moins de ρ constantes arbitraires. Si cette nouvelle intégrale générale renferme $\rho - \sigma$ constantes arbitraires, on peut dire que la réduction est d'ordre σ.

Nous allons envisager successivement ces deux points de vue.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

XXIX. — Réductions de première espèce. Premier cas de réduction.

Soit z une fonction des deux variables indépendantes x et y satisfaisant à deux équations différentielles linéaires aux dérivées partielles de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} r = a_1 s + a_2 p + a_3 q + a_4 z, \\ t = b_1 s + b_2 p + b_3 q + b_4 z \end{cases}$$

qui admettent *quatre intégrales* communes linéairement indépendantes, les coefficients étant des fonctions de x et y choisies de telle façon qu'on ne puisse pas, par des différentiations et des éliminations, déduire des équations (1) une relation entre s, p, q et z. Ces équations sont donc du type général précédemment étudié (I-XII).

Les équations (1) ayant quatre intégrales communes linéairement indépendantes, le déterminant $1 - a_1 b_1$ n'est pas nul identiquement : alors, en dérivant la première de ces équations par rapport à y, la deuxième par rapport à x et remplaçant $\frac{\partial r}{\partial y}$ et $\frac{\partial t}{\partial x}$ par $\frac{\partial s}{\partial x}$ et $\frac{\partial s}{\partial y}$, on obtient deux équations du premier degré en $\frac{\partial s}{\partial x}$ et $\frac{\partial s}{\partial y}$, d'où l'on peut tirer ces deux quantités, car le déterminant des inconnues est $1 - a_1 b_1$ que l'on suppose différent de zéro. A l'aide de ces équations (1), on mettra les expressions trouvées pour $\frac{\partial s}{\partial x}$ et $\frac{\partial s}{\partial y}$ sous la forme

$$(1')\qquad \begin{cases} \frac{\partial s}{\partial x} = \alpha_1 s + \alpha_2 p + \alpha_3 q + \alpha_4 z, \\ \frac{\partial s}{\partial y} = \beta_1 s + \beta_2 p + \beta_3 q + \beta_4 z, \end{cases}$$

α_i et β_i étant des fonctions connues de x et y. La condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)$$

est supposée remplie identiquement, quels que soient x, y, z, p, q, s.

Dans ces équations, x et y sont des variables indépendantes. Si l'on établit une relation entre y et x

$$(2)\qquad y = f(x)$$

l'intégrale générale z des équations (1) devient une fonction de x seulement, et cette fonction z satisfait, en général, à une équation différentielle linéaire du quatrième ordre; mais, pour certaines déterminations spéciales de la fonction $f(x)$, cette fonction z de x pourra satisfaire à une équation différentielle *d'ordre moindre que 4*. Ce sont là les premiers cas de réduction que nous avons en vue.

Voici comment on obtiendra ces déterminations particulières de $f(x)$ [1]. On a, puisque z

---

[1] P. Appell, *Journal de Mathématiques*, 3e série, t. X, 1884.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

dépend de x directement et par l'intermédiaire de y,

$$\frac{dz}{dx} = p + qy',$$
$$\frac{d^2z}{dx^2} = r + 2sy' + ty'^2 + qy'',$$

y' et y'' désignant les dérivées de y par rapport à x, tirées de la relation (2). En vertu des équations (1), ces expressions deviennent

$$\frac{dz}{dx} = p + qy',$$
$$\frac{d^2z}{dx^2} = s(a_1 + 2y' + b_1y'^2) + p(a_2 + b_2y'^2) + q(a_3 + b_3y'^2 + y'') + z(a_4 + b_4y'^2).$$

Donc la fonction z de x vérifiera une équation différentielle du deuxième ordre facile à former, si l'on peut trouver une fonction y de x remplissant les deux conditions

$$(3)\qquad \begin{cases} a_1 + 2y' + b_1y'^2 = 0, \\ a_3 + b_3y'^2 + y'' = (a_2 + b_2y'^2)y'. \end{cases}$$

Il pourra ne pas exister de fonctions y de x vérifiant ces deux équations; c'est même ce qui arrivera en général.

On s'assurera de l'existence ou de la non-existence de cette fonction comme il suit. En résolvant les équations (3) par rapport à y' et y'', on obtient des expressions de la forme

$$(4)\qquad y' = \varphi(x, y), \qquad y'' = \psi(x, y),$$

d'où l'on tire l'équation

$$(5)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi(x, y) = \psi(x, y).$$

Cette équation (5) définit y comme fonction de x; pour que la fonction ainsi définie réponde à la question, il faut et il suffit que sa dérivée soit $\varphi(x, y)$. Il peut arriver que cette équation (5) soit identique en x et y; dans ce cas toute intégrale de la première équation (4) ou (3) est une solution du problème.

En laissant de côté ce cas particulier, voici comment on obtient les déterminations de $f(x)$ pour lesquelles z vérifie une équation linéaire et homogène du troisième ordre.

Nous avons trouvé

$$\frac{dz}{dx} = p + qy',$$
$$\frac{d^2z}{dx^2} = \gamma_1 s + \gamma_2 p + \gamma_3 q + \gamma_4 z,$$

où $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ sont les coefficients qui viennent d'être calculés et qui contiennent y' et y''. En prenant encore une fois la dérivée par rapport à x, on a

$$\frac{d^3z}{dx^3} = \gamma_1\left(\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y}y'\right) + s\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x} + \frac{\partial\gamma_1}{\partial y}y' + \frac{\partial\gamma_1}{\partial y'}y''\right) + \ldots$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

et, à l'aide des équations (1) et (1'), on pourra mettre cette équation sous la forme

$$\frac{d^3 z}{dx^3} = \delta_1 s + \delta_2 p + \delta_3 q + \delta_4 z,$$

les coefficients δ_i contenant x, y, y', y'' et y'''. Une nouvelle dérivation donne, après un calcul analogue,

$$\frac{d^4 z}{dx^4} = \varepsilon_1 s + \varepsilon_2 p + \varepsilon_3 q + \varepsilon_4 z,$$

les ε_i contenant x, y, y', y'', y''' et y^{IV}. En éliminant s, p, q entre les expressions de

$$\frac{dz}{dx}, \quad \frac{d^2 z}{dx^2}, \quad \frac{d^3 z}{dx^3}, \quad \frac{d^4 z}{dx^4},$$

on a l'équation linéaire et homogène du quatrième ordre prévue

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dz}{dx} & 0 & 1 & y' \\ \dfrac{d^2 z}{dx^2} - \gamma_4 z & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \dfrac{d^3 z}{dx^3} - \delta_4 z & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ \dfrac{d^4 z}{dx^4} - \varepsilon_4 z & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est là le cas général.

Pour qu'il existe une équation linéaire du troisième ordre à laquelle satisfasse z, il faut et il suffit que l'on puisse éliminer p, q, s entre les trois relations donnant $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2 z}{dx^2}$, $\frac{d^3 z}{dx^3}$, par suite il faut et il suffit que l'on ait

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ 0 & 1 & y' \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui est *une équation différentielle du troisième ordre donnant y en x.*

Cette équation différentielle (6) est attachée, d'une façon invariante, aux équations données (1). On peut l'appeler l'équation différentielle *réductrice*. Nous indiquerons plus loin, à propos d'un problème de Tisserand [1], des applications de cette idée générale.

Intégration de l'équation différentielle réductrice. — Les équations aux dérivées partielles (1) admettant quatre intégrales communes linéairement indépendantes z_1, z_2, z_3, z_4 fonctions de x et y, leur intégrale générale est (XII)

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 + C_4 z_4$$

avec quatre constantes arbitraires C_1, C_2, C_3, C_4. Mais si l'on établit entre x et y une relation de la forme

$$(6') \qquad K_1 z_1 + K_2 z_2 + K_3 z_3 + K_4 z_4 = 0,$$

---

[1] *Voir* la Note 2 à la fin du volume.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

où K_1, K_2, K_3, K_4 sont des *constantes*, la fonction z devient fonction de x seul et ne contient plus linéairement que *trois* constantes; elle vérifie donc alors une équation différentielle linéaire du *troisième ordre*.

Réciproquement, si y est une fonction de x telle que z vérifie une équation différentielle linéaire du troisième ordre, il existe entre z_1, z_2, z_3, z_4 une relation linéaire (6′) à coefficients constants. Donc l'intégrale générale de l'équation réductrice (6) définissant y en x est fournie par la relation (6′) qui donne y en fonction de x et de *trois constantes arbitraires* qui sont les rapports de trois des quantités K_1, K_2, K_3, K_4 à la quatrième [1].

Les théorèmes généraux qui donnent les intégrales des équations simultanées F_2, F_3, F_4 (XIII) fourniront des exemples de ces considérations générales.

Inversement, si l'on connaît l'intégrale générale de l'équation différentielle réductrice (6), on en déduit l'intégrale générale du système (1), par l'intégration d'une différentielle totale à deux variables. En effet, l'intégrale générale de (6) pourra s'écrire sous la forme

$$K_1 g_1(x, y) + K_2 g_2(x, y) + K_3 g_3(x, y) + K_4 g_4(x, y) = 0,$$

où les g_i sont proportionnels aux z_i

$$\frac{z_1}{g_1} = \frac{z_2}{g_2} = \frac{z_3}{g_3} = \frac{z_4}{g_4} = \lambda,$$

λ désignant une fonction inconnue de x et y. Les g_i étant connus, par hypothèse, on peut former un système analogue à (1) définissant une certaine fonction Z de x et y et admettant les intégrales fondamentales g_1, g_2, g_3, g_4. La substitution

$$z = \lambda Z$$

transforme ce système dans le système (1) et l'identification détermine

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial y}.$$

XXX. — Réduction de première espèce. Autres cas de réduction.

Supposons maintenant qu'une fonction z de x et y vérifie trois équations simultanées de la forme

$$(7) \qquad \begin{cases} r = a_1 p + a_2 q + a_3 z, \\ s = b_1 p + b_2 q + b_3 z, \\ t = c_1 p + c_2 q + c_3 z; \end{cases}$$

où les coefficients a_i, b_i, c_i sont des fonctions de z telles qu'on ne puisse pas, par des différentiations et des éliminations, déduire des équations (7) une relation entre p, q et z. L'intégrale générale est de la forme (XIV)

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3$$

---

[1] *Voir* Roger Liouville, *Comptes rendus*, t. 101, 1885, p. 1134, et t. 103, 1886, p. 457, 476, 520; *Journal de l'École Polytechnique*, 1887. — P. Appell, *Comptes rendus*, t. 167, 1918, p. 470.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

avec *trois constantes*. Si l'on établit une relation quelconque entre y et x, z devient une fonction de x qui vérifie en général une équation différentielle linéaire ordinaire du troisième ordre; mais si y est une fonction particulière de x donnée par la relation

$$K_1 z_1 + K_2 z_2 + K_3 z_3 = 0. \tag{8}$$

z vérifie une équation différentielle du second ordre. Dans ce cas y est donné en x par une équation différentielle réductrice de second ordre, facile à former, équation qui a, pour intégrale générale, la relation (8) avec deux constantes arbitraires, rapports de deux des constantes K_1, K_2, K_3 à la troisième.

Formation de l'équation réductrice. — La quantité y étant supposée fonction de x, on a

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= p + q y', \\ \frac{d^2 z}{dx^2} &= \varepsilon_1 p + \varepsilon_2 q + \varepsilon_3 z, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

où ε_1, ε_2, ε_3 contiennent x, y, y' et y''. Si l'on a

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ 1 & y' \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

z vérifie une équation linéaire du second ordre obtenue en éliminant p et q entre les équations (9). L'équation (10) du deuxième ordre en y est l'équation réductrice du système (7). L'application à la fonction F_1 est aisée.

XXXI. — Réduction de première espèce. Derniers cas de réduction.

Soient des équations simultanées de la forme

$$\left\{\begin{aligned} p &= a_1 q + a_2 z, \\ s &= b_1 q + b_2 z, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

où les coefficients a_i, b_i sont des fonctions de x et y telles que la différentiation et l'élimination ne permettent d'obtenir aucune relation entre q et z. L'intégrale générale de ce système est

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2;$$

mais si l'on établit entre x et y la relation

$$K_1 z_1 + K_2 z_2 = 0, \tag{12}$$

z vérifie une équation différentielle linéaire et homogène du *premier ordre*. Alors y devient une fonction de x qui vérifie une équation réductrice du premier ordre dont l'intégrale générale est précisément (12).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Formation de l'équation réductrice. — La quantité y étant fonction de x, on a

$$\frac{dz}{dx} = p + qy',$$

$$\frac{dz}{dx} = (a_1 + y')q + a_2 z.$$

Si donc

$$a_1 + y' = 0, \tag{13}$$

z vérifie une équation linéaire et homogène du premier ordre. La relation (13) est l'équation *réductrice* dont l'intégrale générale est (12).

Dernier cas. — Enfin le cas ultime est évidemment celui de deux équations simultanées

$$p = az, \qquad q = bz, \tag{14}$$

où les deux coefficients sont des fonctions de x et de y vérifiant la condition élémentaire

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x},$$

et dont l'intégrale générale est

$$z = Cz_1$$

avec une constante C. Si y est une fonction *quelconque* de x, z vérifie une équation linéaire du premier ordre

$$\frac{dz}{dx} = (a + by')z.$$

XXXII. — Réductions de seconde espèce.

Cas de réduction des fonctions hypergéométriques. — En se plaçant à un autre point de vue sur l'irréductibilité des systèmes d'équations différentielles *à coefficients rationnels* en x et y, on peut considérer les cas de réduction suivants pour les fonctions hypergéométriques de deux variables.

D'abord, pour chacune des fonctions F_2, F_3, F_4, il y aura réduction du premier, du second ou du troisième ordre, si, pour certaines relations établies entre les éléments α, β, α', β', γ, γ' qui y figurent, cette fonction vérifie, non seulement un système tel que (1), mais un autre système tel que (7), (11) ou (14), *avec des coefficients rationnels en x et y.*

De même pour la fonction F_1, il y aura réduction du premier ou du second ordre si, sous certaines conditions imposées aux éléments α, β, β', γ de F_1, cette fonction vérifie, non seulement un système tel que (7), mais un autre système tel que (11) ou (14) *avec des coefficients rationnels en x et y* [1]. La recherche systématique de tous ces cas de réduction est un problème très digne d'intérêt. Nous nous bornerons ici à donner des exemples.

Exemples de réduction du premier ordre. — La formule (29-V)

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = (1-y)^{-\beta'} F_3\left(\alpha, \gamma-\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, \frac{-y}{1-y}\right)$$

[1] P. Appell, *Comptes rendus*, t. 167, 1918, p. 410.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

donne, en changeant y en $\frac{-y}{1-y}$, (34-V).

$$F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y) = (1-y)^{\beta'} F_1\left(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, \frac{-y}{1-y}\right)$$

sous la condition unique

$$\alpha + \alpha' = \gamma. \tag{15}$$

La fonction F_3, dans laquelle la condition (15) est remplie, vérifie donc non seulement deux équations du type (1), mais, comme F_1, trois équations du type (7) à *coefficients rationnels;* la condition (15) est donc une condition de réduction du premier ordre de F_3 [1].

Nous n'écrirons pas les formules analogues aux précédentes qui s'obtiendraient en permutant α avec β et α' avec β', ou x avec y, et α avec α' en même temps que β avec β'.

Exemple de réduction du second ordre de F_3. — Considérons les deux équations suivantes de la forme (11) que nous écrirons d'une manière symétrique

$$\begin{cases} (1-x)p - (1-y)q - \lambda z = 0, \\ (xy - x - y)s - \mu(1-x)p - \nu(1-y)q = 0, \end{cases} \tag{16}$$

λ, μ, ν désignant des constantes données différentes de zéro. Il existe une fonction particulière

$$F_3 = \sum_{m,n=0}^{m,n=\infty} \frac{(\alpha, m)(\alpha', n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n$$

vérifiant ces équations. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit, comme on le voit, soit par substitution directe, soit par différentiation et combinaison des équations (16), que les cinq éléments α, α', β, β', γ qui figurent dans F_3 vérifient les cinq équations suivantes :

$$\alpha + \beta + \alpha' + \beta' - 2\gamma = 0, \qquad (\alpha - \beta)^2 - (\alpha' - \beta')^2 = 0. \tag{17}$$

$$\alpha + \beta - \alpha' - \beta' - 2\lambda = 0, \qquad \alpha\beta + \lambda\nu = 0, \qquad \alpha'\beta' + \lambda\mu = 0. \tag{18}$$

Les deux premières (17) indépendantes de λ, μ, ν donnent les conditions nécessaires et suffisantes que doivent remplir α, β, α', β', γ pour que la réduction ait lieu; les trois autres (18) donnent ensuite λ, μ et ν. Comme la fonction F_3 ne change pas quand on permute α avec β ou α' avec β', on peut toujours réduire la seconde des relations (17) à $\alpha - \beta = \alpha' - \beta'$. Dans cette hypothèse, en supposant inversement λ, μ et ν donnés, les équations (16) admettent l'intégrale particulière

$$F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y),$$

les éléments de cette fonction étant donnés par les relations

$$\alpha + \beta = \lambda + \mu - \nu, \qquad \alpha\beta = -\lambda\nu, \qquad \gamma = \mu - \nu, \qquad \alpha' = \alpha - \lambda, \qquad \beta' = \beta - \lambda. \tag{19}$$

Montrons, pour terminer, que la fonction F_3 correspondante peut s'exprimer à l'aide de la série hypergéométrique de Gauss. En effet, faisant

$$u = x + y - xy,$$

[1] *Voir* à ce sujet le paragraphe XVII.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

on voit que l'intégrale générale de la première des équations (16) est

$$z = (1 - y)^{\lambda} \varphi(u),$$

$\varphi(u)$ étant une fonction arbitraire de u. La seconde des équations (16) donne, pour déterminer $\varphi(u)$,

$$u(1 - u)\frac{d^2\varphi}{du^2} + [\mu - \nu - (\lambda + \mu - \nu + 1)u]\frac{d\varphi}{du} + \lambda\nu\varphi = 0,$$

équation qui admet comme solutions particulières (I-6°) dans le domaine de $u = 0$,

$$\varphi_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, u),$$
$$\varphi_2 = u^{1-\gamma} F(\alpha - 1 - \gamma, \beta - 1 - \gamma, 2 - \gamma, u),$$

les éléments α, β, γ ayant les valeurs (19). On a alors, en désignant par K_1 et K_2 des constantes et en supposant α, α', β, β', γ déterminés par les formules (19),

$$F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y) = K_1\varphi_1 + K_2\varphi_2.$$

Dans le domaine du couple de valeurs $x = 0$, $y = 0$, u étant voisin de 0, la seconde fonction φ_2 n'est pas régulière, tandis que F_3 et φ_1 le sont. On a donc $K_2 = 0$; on voit ensuite que $K_1 = 1$. D'où la formule [1]

$$F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y) = (1 - y)^{\lambda} F(\alpha, \beta, \gamma, x + y - xy)$$

sous les conditions (17). Il est inutile d'écrire les formules analogues qu'on en déduit par la permutation des variables entre elles et des éléments entre eux.

---

[1] La formule de réduction (35-V)

$$F_3(\alpha, \gamma - \alpha, \beta, \gamma - \beta, \gamma, x, y) = (1 - y)^{\alpha+\beta-\gamma} F(\alpha, \beta, \gamma, x + y - xy)$$

constitue un cas particulier de cette formule correspondant à

$$\alpha' = \gamma - \alpha, \qquad \beta' = \gamma - \beta,$$
$$\lambda = \alpha + \beta - \gamma, \qquad \lambda\mu = -(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta), \qquad \lambda\nu = -\alpha\beta.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

CHAPITRE VI.

LES POLYNOMES HYPERGÉOMÉTRIQUES A DEUX VARIABLES GÉNÉRALISANT LES POLYNOMES DE JACOBI.

XXXIII. — Polynomes hypergéométriques déduits de la fonction $F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y)$.

La fonction de Gauss $F(-n, \beta, \gamma, x)$ où le premier élément est égal à un entier négatif se réduit à un polynome de degré n; comme on peut toujours poser $\beta = \alpha + n$, l'étude des polynomes hypergéométriques se ramène à celle des *polynomes de Jacobi*

$$(1) \qquad \mathcal{J}_n(\alpha, \gamma, x) = F(-n, \alpha + n, \gamma, x).$$

Jacobi a établi que ses polynomes (I-8°) sont susceptibles de se mettre sous la forme élégante

$$(2) \qquad \mathcal{J}_n(\alpha, \gamma, x) = \frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}}{(\gamma, n)} \frac{d^n}{dx^n}\left[x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}\right];$$

en outre, ils vérifient évidemment l'équation hypergéométrique

$$(3) \qquad x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+1)x]\frac{dy}{dx} + n(\alpha+n)y = 0,$$

qui peut encore s'écrire

$$(3') \qquad \frac{d}{dx}\left[x^{\gamma}(1-x)^{\alpha+1-\gamma}\frac{dy}{dx}\right] + n(\alpha+n)x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}y = 0.$$

Enfin ces polynomes forment un système de fonctions orthogonales

$$(4) \qquad \int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\mathcal{J}_m(\alpha, \gamma, x)\mathcal{J}_n(\alpha, \gamma, x)\,dx = 0 \qquad (m \neq n).$$

En partant de la fonction hypergéométrique F_2, P. Appell a défini [1] une famille de polynomes à deux variables qui généralisent les résultats de Jacobi que nous venons de rappeler.

Considérons la fonction

$$(5) \qquad \mathcal{J}_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y)$$
$$= \frac{x^{1-\gamma}y^{1-\gamma'}}{(\gamma, m)(\gamma', n)}(1-x-y)^{\gamma+\gamma'-\alpha}\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n}\left[x^{\gamma+m-1}y^{\gamma'+n-1}(1-x-y)^{\alpha+m+n-\gamma-\gamma'}\right],$$

nous allons démontrer que c'est un polynome de degré $(m+n)$ en x et y s'exprimant au moyen de la fonction F_2.

---

[1] P. Appell, *Archiv der Math. und Physik* (Grünert), t. LXVI, 1881, p. 238.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

En effet, en développant la dérivée par la formule de Leibnitz, elle prend la forme

$$\sum_{p=0,\ q=0}^{p=m,\ q=n} (-1)^{p+q} \frac{(-m, p)(-n, q)}{(1, p)(1, q)} \frac{\partial^{m-p}}{\partial x^{m-p}} (x^{\gamma+m-1}) \frac{\partial^{n-q}}{\partial y^{n-q}} (y^{\gamma'+n-1}) \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} [(1-x-y)^{\alpha+m+n-\gamma-\gamma'}]$$

ou en effectuant les dérivations

$$x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} (1-x-y)^{\alpha+m+n-\gamma-\gamma'}$$
$$\times \sum_{p=0,\ q=0}^{p=m,\ q=n} \frac{(-m, p)(-n, q)}{(1, p)(1, q)} \frac{(\gamma, m)(\gamma', n)}{(\gamma, p)(\gamma', q)} (\gamma+\gamma'-\alpha-m-n, p+q) \frac{x^p y^q}{(x+y-1)^{p+q}},$$

ce qui donne immédiatement

$$(6) \quad \mathcal{F}_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) = (1-x-y)^{m+n} F_2\left(\gamma+\gamma'-\alpha-m-n, -m, -n, \gamma, \gamma', \frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1}\right).$$

Les éléments β et β' de la fonction F_2 étant respectivement égaux aux entiers négatifs $-m$ et $-n$, le développement de cette fonction hypergéométrique s'arrête au terme en $\frac{x^m y^n}{(x+y-1)^{m+n}}$; donc $\mathcal{F}_{m,n}$ est bien un polynome de degré $m+n$.

En outre, ces polynomes à deux variables constituent effectivement une généralisation des polynomes de Jacobi; en effet, en appliquant à la relation (1), la formule de transformation d'Euler, on obtient, pour le polynome de Jacobi, l'expression équivalente

$$(7) \qquad \mathcal{F}_n(\alpha, \gamma, x) = (1-x)^n F\left(\gamma-\alpha-n, -n, \gamma, \frac{x}{x-1}\right).$$

En rapprochant les expressions (6) *et* (7) *on voit que les polynomes* $\mathcal{F}_{m,n}$ *dérivent de la fonction* F_2 *de la même manière que les polynomes* $\mathcal{F}_n$ *de la fonction de Gauss.* En outre, leur expression (5) est la généralisation évidente de la formule de Jacobi (2).

Voici les valeurs des premiers polynomes $\mathcal{F}_{m,n}$:

$$\mathcal{F}_{0,0} = 1,$$

$$\mathcal{F}_{1,0} = (1-x-y) + \frac{\gamma+\gamma'-\alpha-1}{\gamma} x = 1 + \frac{\gamma'-\alpha-1}{\gamma} x - y,$$

$$\mathcal{F}_{0,1} = (1-x-y) + \frac{\gamma+\gamma'-\alpha-1}{\gamma'} y = 1 - x + \frac{\gamma-\alpha-1}{\gamma'} y,$$

$$\mathcal{F}_{2,0} = (1-x-y)^2 + 2\frac{\gamma+\gamma'-\alpha-2}{\gamma} x(1-x-y) + \frac{(\gamma+\gamma'-\alpha-2)(\gamma+\gamma'-\alpha-1)}{\gamma(\gamma+1)} x^2,$$

$$\mathcal{F}_{1,1} = (1-x-y)^2 + (\gamma+\gamma'-\alpha-2)(1-x-y)\left(\frac{x}{\gamma} + \frac{y}{\gamma'}\right) + \frac{(\gamma+\gamma'-\alpha-2)(\gamma+\gamma'-\alpha-1)}{\gamma\gamma'} xy,$$

$$\mathcal{F}_{0,2} = (1-x-y)^2 + 2\frac{\gamma+\gamma'-\alpha-2}{\gamma'} y(1-x-y) + \frac{(\gamma+\gamma'-\alpha-2)(\gamma+\gamma'-\alpha-1)}{\gamma'(\gamma'+1)} y^2.$$

.....

Les polynomes $\mathcal{F}_{m,n}$ s'expriment aussi par une *somme limitée de polynomes de Jacobi* $\mathcal{F}_n$; en

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

effet, en mettant F_2 sous la forme d'une série simple, on a

$$\mathfrak{F}_{m,n} = (1-x-y)^{m+n} \sum_{p=0}^{p=m} \frac{(\gamma+\gamma'-\alpha-m-n, p)(-m, p)}{(\gamma, p)(1, p)}$$
$$\times F\left(\gamma+\gamma'-\alpha-m-n+p, -n, \gamma', \frac{y}{x+y-1}\right) \frac{x^p}{(x+y-1)^p}.$$

Or, en vertu de (7),

$$F\left(\gamma+\gamma'-\alpha-m-n+p, -n, \gamma', \frac{y}{x+y-1}\right) = \frac{(1-x)^n}{(1-x-y)^n} \mathfrak{F}_n\left(\alpha+m-\gamma-p, \gamma', \frac{y}{1-x}\right);$$

d'où

$$(8) \qquad \mathfrak{F}_{m,n} = (1-x)^n \sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p \frac{(\gamma+\gamma'-\alpha-m-n, p)(-m, p)}{(\gamma, p)(1, p)}$$
$$\times \mathfrak{F}_n\left(\alpha+m-\gamma-p, \gamma', \frac{y}{1-x}\right) x^p (1-x-y)^{m-p}.$$

On en déduit notamment que les polynomes $\mathfrak{F}_{m,n}$ se réduisent à ceux de Jacobi dans les cas suivants :

$$(9) \qquad \mathfrak{F}_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', 0, y) = (1-y)^m \mathfrak{F}_n(\alpha+m-\gamma, \gamma', y),$$

$$(9') \qquad \mathfrak{F}_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, 0) = (1-x)^n \mathfrak{F}_m(\alpha+n-\gamma', \gamma, x)$$

et, d'autre part,

$$(10) \qquad \mathfrak{F}_{0,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) = (1-x)^n \mathfrak{F}_n\left(\alpha-\gamma, \gamma', \frac{y}{1-x}\right),$$

$$(10') \qquad \mathfrak{F}_{m,0}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) = (1-y)^m \mathfrak{F}_m\left(\alpha-\gamma', \gamma, \frac{x}{1-y}\right).$$

Remarquons enfin qu'il existe un lien très simple entre les $\mathfrak{F}_{m,n}$ et les polynomes Q_{mn} qui interviennent dans le développement de la fonction $F_3\left(\alpha, \alpha', 1, 1, \gamma, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$. En effet, en se reportant à la formule (23-IX), on voit que

$$(11) \qquad Q_{m,n}(x, y) = \mathfrak{F}_{m,n}(\gamma-1, \alpha, \alpha', x, y).$$

La propriété d'orthogonalité des polynomes de Jacobi s'étend aux polynomes $\mathfrak{F}_{m,n}$ de la manière suivante.

Considérons l'intégrale

$$(12) \qquad \iint x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} (1-x-y)^{\alpha-\gamma-\gamma'} P(x, y) \mathfrak{F}_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y)\, dx\, dy$$

étendue au domaine

$$x > 0, \quad y > 0, \quad 1 > x+y > 0,$$

$P(x, y)$ désignant un polynome et supposons (pour que l'intégrale ait un sens)

$$\mathfrak{R}(\gamma) > 0, \quad \mathfrak{R}(\gamma') > 0, \quad \mathfrak{R}(\alpha+1+\gamma-\gamma') > 0.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

En y remplaçant $\mathcal{F}_{m,n}$ par son expression (5), l'intégrale (12) prend la forme

$$(13)\qquad \frac{1}{(\gamma, m)}\frac{1}{(\gamma', n)}\int\int \mathrm{P}(x, y)\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n}[x^{\gamma+m-1}y^{\gamma'+n-1}(1-x-y)^{\alpha+m+n-\gamma-\gamma'}]\,dx\,dy.$$

Intégrons $m+n$ fois par parties et remarquons que les termes tout intégrés s'annulent aux limites du domaine, nous obtenons pour la valeur de l'intégrale (12)

$$(14)\qquad \frac{(-1)^{m+n}}{(\gamma, m)(\gamma', n)}\int\int x^{\gamma+m-1}y^{\gamma'+n-1}(1-x-y)^{\alpha+m+n-\gamma-\gamma'}\frac{\partial^{m+n}\mathrm{P}}{\partial x^m\,\partial y^n}\,dx\,dy.$$

On en déduit immédiatement la proposition suivante :

Si le polynome arbitraire $\mathrm{P}(x, y)$ *est de degré inférieur à* $m+n$, *l'intégrale* (12) *est nulle.*

La propriété d'orthogonalité des polynomes $\mathcal{F}_{m,n}$ résulte comme cas particulier de cette proposition.

En effet, faisons dans l'intégrale (12)

$$\mathrm{P}(x, y) = \mathcal{F}_{m',n'}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y).$$

Lorsque $m'+n'$ est différent de $m+n$, on peut supposer, pour fixer les idées, que c'est $m'+n'$ qui est inférieur à $m+n$, on a donc

$$(15)\qquad \int\int x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}(1-x-y)^{\alpha-\gamma-\gamma'}\mathcal{F}_{m,n}\mathcal{F}_{m',n'}\,dx\,dy = 0 \qquad (m+n < m'+n').$$

Au contraire, si $m+n = m'+n'$, la dérivée $\frac{\partial^{m+n}\mathcal{F}_{m',n'}}{\partial x^m\,\partial y^n}$ est une constante, on a donc

$$(16)\qquad \int\int x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}(1-x-y)^{\alpha-\gamma-\gamma'}\mathcal{F}_{m,n}\mathcal{F}_{m',n'}\,dx\,dy$$

$$= \frac{(-1)^{m+n}}{(\gamma, m)(\gamma', n)}\frac{\partial^{m+n}\mathcal{F}_{m',n'}}{\partial x^m\,\partial y^n}\int\int x^{\gamma+m-1}y^{\gamma'+n-1}(1-x-y)^{\alpha+m+n-\gamma-\gamma'}\,dx\,dy$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')\Gamma(\alpha+m+n-1-\gamma-\gamma')}{\Gamma(\alpha+2m+2n-1)}(-1)^{m+n}\frac{\partial^{m+n}\mathcal{F}_{m',n'}}{\partial x^m\,\partial y^n} \qquad (m+n = m'+n').$$

La propriété d'orthogonalité des polynomes de Jacobi permet de calculer les coefficients du développement d'une fonction arbitraire définie dans l'intervalle $(0 \leq x \leq 1)$

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{0}^{+\infty} \mathrm{A}_n\,\mathcal{F}_n(\alpha, \gamma, x)$$

par la *méthode de Fourier*. En effet, multiplions les deux membres de cette relation par

$$x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\mathcal{F}_n(\alpha, \gamma, x)\,dx$$

et intégrons dans l'intervalle $(0, 1)$: en intervertissant dans le second membre les signes somme et sigma (ce qui suppose la série uniformément convergente), on obtient l'équation

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\mathrm{F}(x)\,\mathcal{F}_n(\alpha, \gamma, x)\,dx = \mathrm{A}_n\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}[\mathcal{F}_n(\alpha, \gamma, x)]^2\,dx$$

qui détermine le coefficient A_n.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Essayons de même de développer une fonction arbitraire $F(x, y)$ définie dans le domaine $(x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 1 - x - y \geqq 0)$ en série de polynomes $\mathfrak{F}_{m,n}$:

$$F(x, y) = \sum_{m=0,\ n=0}^{m=\infty,\ n=\infty} A_{m,n}\, \mathfrak{F}_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y).$$

En partant des formules (15) et (16), nous obtenons

$$(17)\qquad \int\int x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} (1 - x - y)^{\alpha-\gamma-\gamma'} F\, \mathfrak{F}_{m,n}\, dx\, dy$$
$$= \sum_{m'+n'=m+n} A_{m',n'} \int\int x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} (1 - x - y)^{\alpha-\gamma-\gamma'} \mathfrak{F}_{m,n} \mathfrak{F}_{m',n'}\, dx\, dy,$$

résultat beaucoup plus compliqué que dans le cas d'une variable puisque le second membre, au lieu de contenir un seul des coefficients à déterminer, est formé d'une combinaison linéaire des $(m + n + 1)$ *coefficients* $A_{m',n'}$, *pour lesquels* $m' + n' = m + n$.

Pour obtenir les coefficients des polynomes d'un degré donné $m + n = k$, il faut donc écrire les $k + 1$ équations analogues à (17) en donnant dans le premier membre à m et n toutes les valeurs compatibles avec la relation $m + n = k$; les deuxièmes membres de ces équations sont des combinaisons linéaires des $k + 1$ coefficients $A_{m',n'}$ tels que $m' + n' = k$; on a ainsi un système de $(k + 1)$ équations linéaires entre ces $(k + 1)$ inconnues $A_{m',n'}$, qui permettra de les déterminer.

Il est à peine utile de faire remarquer à quels calculs pratiquement inextricables on sera ainsi conduit pour déterminer effectivement les coefficients $A_{m,n}$ du développement d'une fonction donnée. Nous indiquerons plus loin comment en adjoignant aux polynomes $\mathfrak{F}_{m,n}$ une autre famille de polynomes, il est possible, en appliquant la méthode de Fourier, d'obtenir une formule simple déterminant un à un les coefficients $A_{m,n}$.

Pour achever cette étude succincte des polynomes $\mathfrak{F}_{m,n}$, nous allons former le système de deux équations aux dérivées partielles vérifiées par la fonction

$$(18)\qquad z(x, y) = (1 - x - y)^{\alpha-\gamma-\gamma'} \mathfrak{F}_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y)$$
$$= \frac{x^{1-\gamma} y^{1-\gamma'}}{(\gamma, m)(\gamma', n)} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [x^{\gamma+m-1} y^{\gamma'+n-1} (1 - x - y)^{\alpha+m+n-\gamma-\gamma'}].$$

Dans la formule (6) appliquons à la fonction F_2 la formule de transformation (6_4-VII), nous obtenons

$$(19)\qquad \mathfrak{F}_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) = (1 - x - y)^{\gamma+\gamma'-\alpha} F_2(\gamma + \gamma' - \alpha - m - n, \gamma + m, \gamma' + n, \gamma, \gamma', x, y).$$

Par conséquent la fonction,

$$z(x, y) = F_2(\gamma + \gamma' - \alpha - m - n, \gamma + m, \gamma' + n, \gamma, \gamma', x, y)$$

vérifie le système des deux équations de F_2

$$(20)\qquad \begin{cases} x(1 - x)r - xys + [\gamma - (2\gamma + \gamma' - \alpha - n + 1)x]p - (\gamma + m)yq - (\gamma + m)(\gamma + \gamma' - \alpha - m - n)z = 0, \\ y(1 - y)t - xys + [\gamma' - (\gamma + 2\gamma' - \alpha - m + 1)y]q - (\gamma' + n)xp - (\gamma' + n)(\gamma + \gamma' - \alpha - m - n)z = 0. \end{cases}$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

XXXIV. — Deux systèmes adjoints de polynomes hypergéométriques déduits de F_2.

Considérons les polynomes de Jacobi lorsque $\alpha = \gamma$; nous poserons

$$(21)\qquad \begin{aligned} F_n(\gamma, x) &= \mathfrak{F}_n(\gamma, \gamma, x) \\ &= F(-n, \gamma + n, \gamma, x). \end{aligned}$$

En passant au cas de deux variables, on obtient deux systèmes de polynomes déduits de la fonction F_2 qui généralisent ces polynomes $F_n(\gamma, x)$: ce sont les systèmes formés par les polynomes

$$(22)\qquad F_{m,n}(\gamma, \gamma', x, y) = F_2(-m-n, \gamma+m, \gamma'+n, \gamma, \gamma', x, y),$$

$$(23)\qquad E_{m,n}(\gamma, \gamma', x, y) = F_2(\gamma+\gamma'+m+n, -m, -n, \gamma, \gamma', x, y).$$

Les fonctions F_2 qui définissent ces polynomes étudiés par P. Appell [1] sont effectivement les deux généralisations possibles de la fonction de Gauss qui définit F_n.

Les polynomes $F_{m,n}$ sont d'ailleurs un simple cas particulier des polynomes $\mathfrak{F}_{m,n}$, puisqu'en comparant les formules (22) et (19) on aperçoit de suite que

$$(24)\qquad F_{m,n}(\gamma, \gamma', x, y) = \mathfrak{F}_{m,n}(\gamma+\gamma', \gamma, \gamma', x, y).$$

Par conséquent, on déduit de (5) que

$$(25)\qquad F_{m,n}(\gamma, \gamma', x, y) = \frac{x^{1-\gamma} y^{1-\gamma'}}{(\gamma, m)(\gamma', n)} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} \left[x^{\gamma+m-1} y^{\gamma'+n-1} (1-x-y)^{m+n} \right].$$

Le polynome $F_{m,n}$ vérifie les deux équations déduites de (20)

$$(26)\qquad \begin{cases} x(1-x)r - xys + [\gamma - (\gamma+n+1)x]p - (\gamma+m)yq + (m+n)(\gamma+m)z = 0, \\ y(1-y)t - xys + [\gamma' - (\gamma'+m+1)y]q - (\gamma'+n)xp + (m+n)(\gamma'+n)z = 0. \end{cases}$$

D'autre part, le polynome $E_{m,n}$ vérifie évidemment les deux équations que l'on tire de celles de la fonction F_2 :

$$(27)\qquad \begin{cases} x(1-x)r - xys + [\gamma - (\gamma+\gamma'+n+1)x]p + myq + m(\gamma+\gamma'+m+n)z = 0, \\ y(1-y)t - xys + [\gamma' - (\gamma+\gamma'+m+1)y]q + nxp + n(\gamma+\gamma'+m+n)z = 0. \end{cases}$$

Or remarquons que les deux équations obtenues en faisant respectivement la somme des équations (26) et la somme des équations (27) sont identiques et ont toutes les deux pour expression

$$(28)\qquad \begin{aligned} &x(1-x)r - 2xys + y(1-y)t \\ &\quad + [\gamma - (\gamma+\gamma'+1)x]p + [\gamma' - (\gamma+\gamma'+1)y]q + (m+n)(\gamma+\gamma'+m+n)z = 0. \end{aligned}$$

Donc les polynomes $F_{m,n}$ et $E_{m,n}$ sont deux intégrales particulières de la même équation aux dérivées partielles (28).

---

[1] P. Appell, *Journ. de Math.*, 3e série, t. VIII, 1882, p. 208.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

De cette remarque se déduit une propriété d'orthogonalité remarquable pour les deux systèmes adjoints de polynomes $F_{m,n}$ et $E_{m,n}$, à savoir que l'intégrale

$$\int\int x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} F_{m,n}(\gamma, \gamma', x, y) E_{m',n'}(\gamma, \gamma', x, y)\, dx\, dy$$

(étendue au domaine $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $1 - x - y \geqq 0$)

n'est différente de zéro que si l'on a à la fois

$$m = m', \qquad n = n'.$$

Nous déduirons ce résultat, comme cas particulier, d'une propriété générale des solutions de l'équation aux dérivées partielles, obtenue en faisant la somme des deux équations de F_2, équation dont nous allons d'abord faire l'étude.

XXXV. — Propriétés de l'équation aux dérivées partielles obtenue en faisant la somme des deux équations de la fonction F_2.

Considérons les deux équations de F_2 :

$$x(1-x)r - xys + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]p - \beta y q - \alpha\beta z = 0,$$
$$y(1-y)t - xys + [\gamma' - (\alpha + \beta' + 1)y]q - \beta' x p - \alpha\beta' z = 0.$$

Faisons leur somme et posons

$$\beta + \beta' = \delta,$$

nous obtenons l'équation

$$(29) \qquad x(1-x)r - 2xys + y(1-y)t + [\gamma - (\alpha + \delta + 1)x]p + [\gamma' - (\alpha + \delta + 1)y]q - \alpha\delta z = 0$$

dont nous voulons établir quelques propriétés générales.

D'abord il est clair que l'on a une infinité de solutions de cette équation en prenant

$$z = F_2(\alpha, \delta + h, -h, \gamma, \gamma', x, y),$$

h étant une constante arbitraire.

On peut encore en obtenir d'autres en remarquant qu'en ajoutant membre à membre les deux équations de F_2

$$x(1-x)r - 2xys - y^2 t + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]p - (\alpha + \beta + 1)yq - \alpha\beta z = 0,$$
$$y(1-y)t - 2xys - x^2 r + [\gamma' - (\alpha + \beta + 1)y]q - (\alpha + \beta + 1)xp - \alpha\beta z = 0,$$

l'équation obtenue

$$x(1-2x)r - 4xys + y(1-2y)t + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)2x]p + [\gamma' - (\alpha + \beta + 1)2y]q - 2\alpha\beta z = 0$$

se ramène immédiatement à la forme (29) en y posant

$$x = \frac{x'}{2}, \qquad y = \frac{y'}{2}, \qquad \beta = \delta.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

De sorte que l'on a une nouvelle solution de (29) en prenant

$$z = F_4\left(\alpha, \delta, \gamma, \gamma', \frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right).$$

D'une manière générale, cherchons à satisfaire à l'équation (29) par une série entière en x et y

$$z = \sum A_{m,n} x^m y^n.$$

En substituant et égalant à zéro le coefficient de $x^m y^n$, on a entre les coefficients $A_{m,n}$ l'équation aux différences finies

$$(m+1)(m+\gamma)A_{m+1,n} + (n+1)(n+\gamma')A_{m,n+1} = (m+n+\alpha)(m+n+\delta)A_{m,n}.$$

Faisons

$$A_{m,n} = \frac{(\alpha, m+n)(\delta, m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} B_{m,n}, \tag{30}$$

on a

$$B_{m+1,n} + B_{m,n+1} = B_{m,n}, \tag{31}$$

équation aux différences finies que l'on peut intégrer par la méthode de Lagrange [1]. On trouve pour l'expression la plus générale de $B_{m,n}$

$$B_{m,n} = f(m) - \frac{n}{1} f(m+1) + \frac{n(n-1)}{1.2} f(m+2) + \ldots + (-1)^n f(m+n), \tag{32}$$

ou bien

$$B_{m,n} = \varphi(n) - \frac{m}{1} \varphi(n+1) + \frac{m(m-1)}{1.2} \varphi(n+2) + \ldots + (-1)^m \varphi(m+n), \tag{32'}$$

les fonctions f et φ étant *arbitraires*. Les deux expressions de $B_{m,n}$ ainsi trouvées ne sont pas distinctes; la première conviendra si l'on donne les coefficients $B_{m,0}$, car elle devient, en faisant $n = 0$, $f(m) = B_{m,0}$; la deuxième conviendra si l'on donne les coefficients $B_{0,n}$, car elle devient pour $m = 0$, $\varphi(n) = B_{0,n}$.

En portant l'expression générale de $B_{m,n}$ dans (30), on a l'expression générale de $A_{m,n}$; d'où résulte l'expression de la série entière la plus générale vérifiant l'équation (29)

$$\Phi(\alpha, \delta, \gamma, \gamma', x, y) = \sum_{m=0,\, n=0}^{m=\infty,\, n=\infty} \frac{(\alpha, m+n)(\delta, m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} B_{m,n} x^m y^n. \tag{33}$$

On voit, en particulier, que la condition nécessaire et suffisante pour que $\Phi(\alpha, \delta, \gamma, \gamma', x, y)$ *soit un polynome est que* α *ou* δ *soit égal à un entier négatif.* Si cette condition est remplie, $\alpha = -N$ par exemple, l'expression (33) donne une *infinité* de polynomes satisfaisant à l'équation (29). On peut encore démontrer que cette condition est nécessaire en remarquant que si l'équation (29) est vérifiée par un polynome z de degré $m + n = k$, l'équation que vérifie la fonction

$$z' = \frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \partial y^n}$$

---

[1] LAGRANGE, *Œuvres*, t. IV, p. 165.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

doit admettre la solution $z' = \text{const.}$; par conséquent le coefficient de z' doit y être nul. Or on forme facilement cette équation : en dérivant le premier membre de (29) m fois par rapport à x, n fois par rapport à y, on obtient

$$x(1-x)r' - 2xys' + y(1-y)t' + [\gamma + m - (\alpha + \delta + 2m + 2n + 1)x]p$$
$$+ [\gamma' + n - (\alpha + \delta + 2m + 2n + 1)y]q - (\alpha + m + n)(\delta + m + n)z = 0.$$

On retrouve la condition

$$(\alpha + k)(\delta + k) = 0.$$

Une solution $\Phi(\alpha, \delta, \gamma, \gamma', x, y)$ de l'équation (29) étant connue, on peut en déduire de nouvelles solutions grâce à la remarque suivante. Dans cette équation faisons

$$z = x^\lambda y^\mu (1 - x - y)^\nu z',$$

et désignons par p', q', r', s', t' les dérivées partielles de z'. L'équation devient, après quelques réductions faciles,

$$\begin{aligned} &x(1-x)r' - 2xys' + y(1-y)t' \\ &\quad + [\gamma + 2\lambda - (\alpha + \delta + 2\lambda + 2\mu + 2\nu + 1)x]p' \\ &\quad + [\gamma' + 2\mu - (\alpha + \delta + 2\lambda + 2\mu + 2\nu + 1)y]q' - (\alpha + \lambda + \mu + \nu)(\delta + \lambda + \mu + \nu)z' \\ &\qquad + \frac{\lambda(\lambda + \gamma - 1)}{x} z' + \frac{\mu(\mu + \gamma' - 1)}{y} z' + \frac{\nu(\alpha + \delta - \gamma - \gamma' - \nu)}{1 - x - y} z' = 0. \end{aligned}$$

Si l'on donne à λ, μ, ν des valeurs annulant les trois termes

$$(34) \qquad \begin{cases} \lambda(\lambda + \gamma - 1) = 0, \\ \mu(\mu + \gamma' - 1) = 0, \\ \nu(\alpha + \delta - \gamma - \gamma' + \nu) = 0, \end{cases}$$

l'équation prend la forme (29) où l'on aurait remplacé α, δ, γ, γ' par $\alpha + \lambda + \mu + \nu$, $\delta + \lambda + \mu + \nu$, $\gamma + 2\lambda$, $\gamma' + 2\mu$; par suite, elle admet, pour z', la solution

$$z' = \Phi(\alpha + \lambda + \mu + \nu, \delta + \lambda + \mu + \nu, \gamma + 2\lambda, \gamma' + 2\mu, x, y);$$

d'où, pour l'équation (29), la solution

$$z = x^\lambda y^\mu (1 - x - y)^\mu z'.$$

Or, les équations (34) donnent pour λ, μ, ν huit groupes de valeurs; on fait ainsi correspondre à $\Phi(\alpha, \delta, \gamma, \gamma', x, y)$ huit solutions de l'équation (29) dont voici le Tableau :

λ.	μ.	ν.	
0	0	0	$z_1 = \Phi(\alpha, \delta, \gamma, \gamma')$,
$1-\gamma$	0	0	$z_2 = x^{1-\gamma}\Phi(\alpha + 1 - \gamma, \delta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, \gamma')$,
0	$1-\gamma'$	0	$z_3 = y^{1-\gamma'}\Phi(\alpha + 1 - \gamma', \delta + 1 - \gamma', \gamma, 2 - \gamma')$,
$1-\gamma$	$1-\gamma'$	0	$z_4 = x^{1-\gamma}y^{1-\gamma'}\Phi(\alpha + 2 - \gamma - \gamma', \delta + 2 - \gamma - \gamma', 2 - \gamma, 2 - \gamma')$,
0	0	$\gamma + \gamma' - \alpha - \delta$	$z_5 = (1 - x - y)^{\gamma+\gamma'-\alpha-\delta}\Phi(\gamma + \gamma' - \delta, \gamma + \gamma' - \alpha, \gamma, \gamma')$,
$1-\gamma$	0	$\gamma + \gamma' - \alpha - \delta$	$z_6 = x^{1-\gamma}(1 - x - y)^{\gamma+\gamma'-\alpha-\delta}\Phi(\gamma' - \delta + 1, \gamma' - \alpha + 1, 2 - \gamma, \gamma')$,
0	$1-\gamma'$	$\gamma + \gamma' - \alpha - \delta$	$z_7 = y^{1-\gamma'}(1 - x - y)^{\gamma+\gamma'-\alpha-\delta}\Phi(\gamma - \delta + 1, \gamma - \alpha + 1, \gamma, 2 - \gamma')$,
$1-\gamma$	$1-\gamma'$	$\gamma + \gamma' - \alpha - \delta$	$z_8 = x^{1-\gamma}y^{1-\gamma'}(1 - x - y)^{\gamma+\gamma'-\alpha-\delta}\Phi(2 - \delta, 2 - \alpha, 2 - \gamma, 2 - \gamma')$.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Dans les fonctions Φ qui figurent dans ce Tableau, on a laissé de côté les variables x et y qui sont les mêmes dans les huit fonctions.

Ces généralités étant posées, parmi les fonctions qui satisfont à l'équation (29), considérons maintenant celles qui restent finies pour les valeurs réelles de x et y satisfaisant aux conditions

$$(35)\qquad x > 0, \quad y > 0, \quad 1 - x - y > 0.$$

Ces fonctions possèdent des propriétés intéressantes que l'on trouve de la façon suivante :

Soient z une fonction satisfaisant à l'équation (29)

$$(29)\qquad \begin{aligned}\mathfrak{A}(z) \equiv\ & x(1-x)r - 2xys + y(1-y)t \\ & + [\gamma - (\alpha+\delta+1)x]p + [\gamma' - (\alpha+\delta+1)y]q - \alpha\delta z = 0\end{aligned}$$

et z_1 une fonction satisfaisant à l'équation

$$(36)\qquad \begin{aligned}\mathfrak{B}(z_1) \equiv\ & x(1-x)r_1 - 2xys_1 + y(1-y)t_1 \\ & + [\gamma - (\alpha+\delta+1)x]p_1 + [\gamma' - (\alpha+\delta+1)y]q_1 - (\alpha-\lambda)(\delta-\lambda)z_1 = 0,\end{aligned}$$

obtenue en changeant dans (29), α en $\alpha - \lambda$ et δ en $\delta + \lambda$ (λ désignant une indéterminée). Entre les deux équations $\mathfrak{A}(z) = 0$ et $\mathfrak{B}(z_1) = 0$ existe une relation analogue à celle qui lie deux équations adjointes (25-XVIII). En effet multiplions l'équation (29) par z_1, l'équation (36) par $-z$ et ajoutons. Nous avons

$$(37)\qquad \begin{aligned}z_1\mathfrak{A}(z) - z\mathfrak{B}(z_1) \equiv\ & x(1-x)(rz_1 - zr_1) - 2xy(sz_1 - zs_1) + y(1-y)(tz_1 - zt_1) \\ & + [\gamma - (\alpha+\delta+1)x](pz_1 - zp_1) \\ & + [\gamma' - (\alpha+\delta+1)y](qz_1 - zq_1) + \lambda(\delta - \alpha + \lambda)zz_1 = 0\end{aligned}$$

Posons

$$pz_1 - zp_1 = P, \qquad qz_1 - zq_1 = Q,$$

et remarquons que

$$rz_1 - zr_1 = \frac{\partial P}{\partial x}, \qquad 2(sz_1 - zs_1) = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad tz_1 - zt_1 = \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

L'équation précédente devient

$$\begin{aligned}& x(1-x)\frac{\partial P}{\partial x} - xy\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + y(1-y)\frac{\partial Q}{\partial y} \\ & + [\gamma - (\alpha+\delta+1)x]P + [\gamma' - (\alpha+\delta+1)y]Q = \lambda(\delta - \alpha + \lambda)zz_1,\end{aligned}$$

ce que l'on peut écrire

$$\begin{aligned}& \frac{\partial}{\partial x}[x^\gamma y^{\gamma'-1}(1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'}(P - Px - Qy)] + \frac{\partial}{\partial y}[x^{\gamma-1}y^{\gamma'}(1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'}(Q - Px - Qy)] \\ & = \lambda(\delta - \alpha + \lambda)x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}(1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'}zz_1.\end{aligned}$$

Remplaçons dans le premier membre

$$\begin{aligned}P - Px - Qy \quad & \text{par} \quad P(1-x-y) + y(P-Q), \\ Q - Px - Qy \quad & \text{par} \quad Q(1-x-y) - x(P-Q),\end{aligned}$$

l'équation devient

$$(38)\qquad \begin{aligned}& \frac{\partial}{\partial x}[x^\gamma y^{\gamma'-1}(1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'+1}P] + \frac{\partial}{\partial y}[x^{\gamma-1}y^{\gamma'}(1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'+1}Q] + \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial y} \\ & = \lambda(\delta - \alpha + \lambda)x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}(1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'}zz_1,\end{aligned}$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

où

$$H = x^{\gamma} y^{\gamma'} (1 - x - y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'} (P - Q).$$

Cela posé, supposons que les fonctions z et z_1 restent finies pour les valeurs réelles de x et y satisfaisant aux inégalités (35), et que les fonctions Q, P, P — Q soient, aux limites, finies ou infinies d'ordre moindre que

$$\frac{1}{x^{\gamma}}, \quad \frac{1}{y^{\gamma'}}, \quad \frac{1}{(1 - x - y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'+1}},$$

et que, en outre,

$$(39) \qquad \mathcal{R}(\gamma) > 0, \quad \mathcal{R}(\gamma') > 0, \quad \mathcal{R}(\alpha + \delta - \gamma - \gamma' - 1) > 0.$$

Multiplions les deux membres de l'équation (38) par $dx\,dy$, et prenons l'intégrale double étendue aux valeurs de x et y satisfaisant aux inégalités (35).

On voit immédiatement que les intégrales provenant des deux premiers termes du premier membre sont nulles. Nous allons montrer que l'intégrale

$$\int\int \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial y}\right) dx\,dy$$

est aussi nulle. Pour évaluer cette intégrale, faisons un changement de variables et posons

$$x = t + u, \qquad y = t - u,$$

d'où

$$H = (t + u)^{\gamma} (t - u)^{\gamma'} (1 - 2t)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'} (P - Q).$$

Comme

$$\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial u},$$

on a

$$\int\int \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial y}\right) dx\,dy = 2\int\int \frac{\partial H}{\partial u}\,du\,dt.$$

Dans la nouvelle intégrale, on peut intégrer par rapport à u; l'intégrale indéfinie est H; elle doit être prise entre les limites $u = -t$, $u = +t$; or, H s'annule aux deux limites, car $\mathcal{R}(\gamma)$ et $\mathcal{R}(\gamma')$ sont positives; l'intégrale est donc nulle. Les trois intégrales du premier membre de (38) étant nulles, on a donc

$$\lambda(\delta - \alpha + \lambda)\int\int x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} (1 - x - y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'} z z_1\,dx\,dy = 0.$$

On conclut de là que, z et z_1 désignant respectivement des solutions des équations (29) *et* (36) *vérifiant les conditions voulues dans le domaine $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $1 - x - y \geqq 0$ et aux limites, l'intégrale double étendue à ce domaine*

$$(40) \qquad I = \int\int x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} (1 - x - y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'} z z_1\,dx\,dy$$

est nulle tant que

$$(41) \qquad \lambda(\delta - \alpha + \lambda) > 0.$$

Comme nous l'avons dit, ce théorème s'applique à deux fonctions z et z_1, solutions respectives des équations (29) et (36), ces fonctions restant finies dans le domaine (35) auquel s'étend l'intégration, et les trois fonctions Q, P, (P — Q) devenant aux limites infinies d'ordre

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

moindre que

$$\frac{1}{x^{\gamma}},\quad \frac{1}{y^{\gamma'}},\quad \frac{1}{(1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'+1}}.$$

Ces conditions sont évidemment remplies dans le cas particulier où les deux fonctions z et z_1 sont des polynomes; et alors la condition (41) *exprime que les deux polynomes sont de degrés différents.* Car nous avons vu précédemment que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (29) admette comme solution un polynome de degré k est

$$(\alpha+k)(\delta+k)=0;$$

et la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (36) (qui se déduit de la précédente par le changement de α, δ en $\alpha-\lambda$, $\delta+\lambda$) admette comme solution un polynome de degré k_1 est par conséquent

$$(\alpha-\lambda+k_1)(\delta+\lambda+k_1)=0.$$

Donc si $k=k_1$, on aura nécessairement

$$\lambda(\delta-\alpha+\lambda)=0.$$

XXXVI. — Propriété d'orthogonalité des deux systèmes de polynomes $F_{m,n}$ et $E_{m,n}$.

La propriété générale exprimée par la formule (40), que nous venons d'établir pour deux solutions z et z_1 des équations (29) et (36), va nous permettre de démontrer la propriété d'orthogonalité des deux systèmes adjoints de polynomes $F_{m,n}(\gamma, \gamma', x, y)$ et $E_{m,n}(\gamma, \gamma', x, y)$.

Il suffit de remarquer pour cela que ces polynomes sont des intégrales particulières de l'équation (28); considérons donc l'équation vérifiée par $F_{m,n}$

$$\begin{aligned} x(1-x)r-2xys+y(1-y)t \\ +[\gamma-(\gamma+\gamma'+1)x]p+[\gamma'-(\gamma+\gamma'+1)y]q+(m-n)(\gamma+\gamma'-m+n)z=0 \end{aligned}$$

et l'équation vérifiée par $E_{m',n'}$

$$\begin{aligned} x(1-x)r-2xys+y(1-y)t \\ +[\gamma-(\gamma+\gamma'+1)x]p+[\gamma'-(\gamma+\gamma'+1)y]q+(m'+n')(\gamma+\gamma'+m'+n')z=0. \end{aligned}$$

Ces équations s'identifient immédiatement avec (29) et (36) en y faisant

$$\alpha=-m-n,\qquad \delta=\gamma+\gamma'+m+n,\qquad \lambda=m'+n'-m-n.$$

Par conséquent, si les deux polynomes $F_{m,n}$ et $E_{m',n'}$ sont de degrés différents

$$m+n\neq m'+n',$$

comme on a

$$\lambda(\delta-\alpha+\lambda)=(m'+n'-m-n)(\gamma+\gamma'+m+n+m'+n'),$$

cette quantité est différente de zéro et la formule (40) donne

$$(42)\qquad \iint x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}F_{m,n}(\gamma,\gamma',x,y)E_{m',n'}(\gamma,\gamma',x,y)\,dx\,dy=0\qquad (x\geq 0,\ y\geq 0,\ 1-x-y\geq 0).$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Supposons maintenant les deux polynomes $F_{m,n}$ et $E_{m',n'}$ de même degré : $m+n=m'+n'$. L'application à $F_{m,n}$ de la formule (12)-(14), démontrée pour les polynomes $\mathcal{F}_{m,n}$, permet d'écrire

$$(43)\quad \iint x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}F_{m,n}E_{m',n'}\,dx\,dy = \frac{(-1)^{m+n}}{(\gamma,m)(\gamma',n)}\iint x^{\gamma+m-1}y^{\gamma'+n-1}(1-x-y)^{m+n}\frac{\partial^{m+n}E_{m',n'}}{\partial x^m\,\partial y^n}\,dx\,dy,$$

ceci d'ailleurs quel que soit le degré de $E_{m',n'}$.

En particulier, si $E_{m',n'}$ est de degré $m+n$, la dérivée qui figure dans la seconde intégrale est une constante; il est facile de voir que cette constante est nulle si l'on n'a pas

$$m'=m,\qquad n'=n.$$

Car dans le polynome

$$E_{m',n'}=F_2(\gamma+\gamma'+m'+n',\ -m',\ -n',\ \gamma,\ \gamma',\ x,\ y)$$

le seul terme de degré $m'+n'$ est le terme en $x^{m'}y^{n'}$.

Comme

$$\frac{\partial^{m+n}E_{m,n}}{\partial x^m\,\partial y^n}=(-1)^{m+n}\frac{(m+n+\gamma+\gamma',\ m+n)}{(\gamma,m)(\gamma',n)}(1,m)(1,n),$$

l'intégrale

$$\iint x^{\gamma+m-1}y^{\gamma'+n-1}(1-x-y)^{m+n}\frac{\partial^{m+n}E_{m,n}}{\partial x^m\,\partial y^n}\,dx\,dy$$

a pour valeur

$$(-1)^{m+n}\frac{(m+n+\gamma+\gamma',\ m+n)}{(\gamma,m)(\gamma',n)}(1,m)(1,n)\iint x^{\gamma+m-1}y^{\gamma'+n-1}(1-x-y)^{m+n}\,dx\,dy$$

ou

$$(-1)^{m+n}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')}{\Gamma(\gamma+\gamma')}\frac{(1,m)(1,n)(1,m+n)}{(\gamma+\gamma',m+n)}\frac{1}{\gamma+\gamma'+2m+2n}.$$

Nous pouvons donc conclure que l'intégrale

$$(44)\quad K_{m,n}^{m',n'}=\iint x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}F_{m,n}(\gamma,\gamma',x,y)E_{m',n'}(\gamma,\gamma',x,y)\,dx\,dy\qquad(x\geq 0,\ y\geq 0,\ 1-x-y\geq 0)$$

est nulle tant que l'on n'a pas à la fois

$$m'=m,\qquad n'=n.$$

Dans ce cas, elle a pour valeur

$$(45)\qquad K_{m,n}^{m,n}=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')}{\Gamma(\gamma+\gamma')}\frac{(1,m)(1,n)(1,m+n)}{(\gamma,m)(\gamma',n)(\gamma+\gamma',m+n)}\frac{1}{\gamma+\gamma'+2m+2n}.$$

Cette propriété d'orthogonalité des deux systèmes adjoints de polynomes $F_{m,n}$ et $E_{m,n}$ permet de résoudre le problème posé au paragraphe XXXIII :

Une fonction $F(x,y)$ *étant donnée dans le domaine* $x\geq 0$, $y\geq 0$, $1-x-y\geq 0$, *calculer les coefficients de son développement*

$$F(x,y)=\Sigma A_{m,n}F_{m,n}(\gamma,\gamma',x,y)$$

par la méthode de Fourier.

Il suffit de multiplier les deux membres par $x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}E_{m,n}\,dx\,dy$ et d'intégrer dans le domaine

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

considéré; on obtient immédiatement

$$(46)\qquad K_{m,n}^{m,n} A_{m,n} = \int\int x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} E_{m,n}(\gamma, \gamma', x, y) F(x, y)\, dx\, dy.$$

La même méthode permet encore de calculer les coefficients du développement

$$F(x, y) = \Sigma B_{m,n} E_{m,n}(\gamma, \gamma', x, y)$$

par la formule

$$(47)\qquad K_{m,n}^{m,n} B_{m,n} = \int\int x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} F_{m,n}(\gamma, \gamma', x, y) F(x, y)\, dx\, dy.$$

Par exemple déterminons les coefficients du développement

$$(1 - x - y)^{\lambda-1} = \Sigma B_{m,n} E_{m,n}(\gamma, \gamma', x, y) \qquad (\lambda > 0),$$

nous avons

$$\begin{aligned} K_{m,n}^{m,n} B_{m,n} &= \int\int x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} (1 - x - y)^{\lambda-1} F_{m,n}\, dx\, dy \\ &= \frac{(-1)^{m+n}(1-\lambda, m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)} \int\int x^{\gamma+m-1} y^{\gamma'+n-1} (1 - x - y)^{\lambda-1}\, dx\, dy \\ &= (-1)^{m+n} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\gamma+\gamma'+\lambda)} \frac{(1-\lambda, m+n)}{(\gamma+\gamma'+\lambda, m+n)}; \end{aligned}$$

d'où

$$B_{m,n} = (-1)^{m+n} \frac{\Gamma(\gamma+\gamma')\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\gamma+\gamma'+\lambda)} \frac{(1-\lambda, m+n)}{(\gamma+\gamma'+\lambda, m+n)} \frac{(\gamma, m)(\gamma', n)(\gamma+\gamma', m+n)}{(1, m)(1, n)(1, m+n)} (\gamma+\gamma'+2m+2n).$$

Lorsque λ est égal à un entier positif $k+1$, le développement s'arrête de lui-même aux termes pour lesquels $m+n=k$. Par exemple.

$$1 - x - y = \frac{1}{\gamma+\gamma'+1}(E_{0,0} + \gamma E_{1,0} + \gamma' E_{0,1}).$$

$$\begin{aligned} (1 - x - y)^2 = {} & \frac{2}{(\gamma+\gamma'+1)(\gamma+\gamma'+2)} E_{0,0} + \frac{4}{(\gamma+\gamma'+1)(\gamma+\gamma'+3)} (\gamma E_{1,0} + \gamma' E_{0,1}) \\ & + \frac{2}{(\gamma+\gamma'+2)(\gamma+\gamma'+3)} \left[\frac{\gamma(\gamma+1)}{1.2} E_{2,0} + \frac{\gamma.\gamma'}{1.1} E_{1,1} + \frac{\gamma'(\gamma'+1)}{1.2} E_{0,2} \right]. \end{aligned}$$

Comme second exemple, nous allons montrer qu'*un polynome* $F_{\mu,\nu}$ *s'exprime linéairement au moyen des polynomes* $E_{m,n}$ *de même degré*

$$F_{\mu,\nu}(\gamma, \gamma', x, y) = \sum_{m+n=\mu+\nu} C_{m,n}^{\mu,\nu} E_{m,n}(\gamma, \gamma', x, y).$$

En effet, les coefficients du développement de $F_{\mu,\nu}$ se calculent par la formule

$$K_{m,n}^{m,n} C_{m,n}^{\mu,\nu} = \int\int x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} F_{\mu,\nu} F_{m,n}\, dx\, dy;$$

en vertu de (15), cette intégrale est nulle si l'on n'a pas $m+n=\mu+\nu$; dans ce cas, on a

$$K_{m,n}^{m,n} C_{m,n}^{\mu,\nu} = \frac{(-1)^{m+n}}{(\gamma, m)(\gamma', n)} \int\int x^{\gamma+m-1} y^{\gamma'+n-1} (1 - x - y)^{m+n} \frac{\partial^{m+n} F_{\mu,\nu}}{\partial x^m\, \partial y^n}\, dx\, dy.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Or la dérivée partielle qui figure dans l'intégrale est une constante

$$\frac{\partial^{m+n} F_{\mu,\nu}}{\partial x^m \partial y^n} = \frac{(-\mu-\nu, m+n)(\gamma+\mu, m)(\gamma'+\nu, n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)} \qquad (m+n=\mu+\nu),$$

d'où

$$K_{m,n}^{\mu,\nu} C_{m,n}^{\mu,\nu} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')\Gamma^2(m+n+1)}{\Gamma(\gamma+\gamma'+2m+2n+1)} \frac{(\gamma+\mu, m)(\gamma'+\nu, n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)}.$$

D'où finalement

$$C_{m,n}^{\mu,\nu} = \frac{(1, m+n)}{(1, m)(1, n)} \frac{(\gamma+\mu, m)(\gamma'+\nu, n)}{(\gamma+\gamma'+m+n, m+n)}.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

CHAPITRE VII.

LES FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES DE n VARIABLES DE M. LAURICELLA.

XXXVII. — Définition des fonctions hypergéométriques de M. Lauricella

Le procédé, utilisé au paragraphe II pour former des séries à deux variables généralisant la série hypergéométrique de Gauss, est susceptible de s'étendre, sans d'ailleurs mettre en jeu aucune idée essentiellement nouvelle, à la formation de séries hypergéométriques de n variables. Cette extension a été faite par M. Lauricella [1] dans son Mémoire *Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili*, dont nous allons exposer brièvement les résultats.

Formons le produit des n séries hypergéométriques

$$F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, x_1), \quad F(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, x_2), \quad \ldots, \quad F(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, x_n).$$

Le terme général aura pour expression

$$\frac{(\alpha_1, m_1)(\beta_1, m_1)}{(\gamma_1, m_1)(1, m_1)} \frac{(\alpha_2, m_2)(\beta_2, m_2)}{(\gamma_2, m_2)(1, m_2)} \cdots \frac{(\alpha_n, m_n)(\beta_n, m_n)}{(\gamma_n, m_n)(1, m_n)} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}.$$

Considérons, dans ce terme général, le produit de p facteurs $(1 \leqq p \leqq n)$

$$(\alpha_j, m_j)(\alpha_{j+1}, m_{j+1}) \ldots (\alpha_{j+p-1}, m_{j+p-1})$$

et remplaçons-le par l'expression

$$(\alpha, m_j + m_{j+1} + \ldots + m_{j+p-1});$$

répétons la même opération sur un ou plusieurs des groupes de produits de facteurs (α, m), puis sur des groupes de facteurs (β, m) et de facteurs (γ, m); le terme général ainsi obtenu définira une série hypergéométrique de n variables

Telles sont les quatre fonctions suivantes :

$$(1) \quad F_A(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, x_1, \ldots, x_n) = \sum \frac{(\alpha, m_1 + \ldots + m_n)(\beta_1, m_1) \ldots (\beta_n, m_n)}{(\gamma_1, m_1) \ldots (\gamma_n, m_n)(1, m_1) \ldots (1, m_n)} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n},$$

$$(2) \quad F_B(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma, x_1, \ldots, x_n) = \sum \frac{(\alpha_1, m_1) \ldots (\alpha_n, m_n)(\beta_1, m_1) \ldots (\beta_n, m_n)}{(\gamma, m_1 + \ldots + m_n)(1, m_1) \ldots (1, m_n)} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n},$$

$$(3) \quad F_C(\alpha, \beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, x_1, \ldots, x_n) = \sum \frac{(\alpha, m_1 + \ldots + m_n)(\beta, m_1 + \ldots + m_n)}{(\gamma_1, m_1) \ldots (\gamma_n, m_n)(1, m_1) \ldots (1, m_n)} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n},$$

$$(4) \quad F_D(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma, x_1, \ldots, x_n) = \sum \frac{(\alpha, m_1 + \ldots + m_n)(\beta_1, m_1) \ldots (\beta_n, m_n)}{(\gamma, m_1 + \ldots + m_n)(1, m_1) \ldots (1, m_n)} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}.$$

---

[1] G. Lauricella, *Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili* (*Rendiconti Circ. mat. Palermo*, t. VII, 1893, p. 111-158).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Ces quatre fonctions, qui sont la généralisation directe respectivement des fonctions F_2, F_3, F_4, F_1, sont les seules qu'a étudiées M. Lauricella; mais, comme il le fait remarquer, le procédé de formation que nous venons d'exposer permet d'en construire bien d'autres. Pour se borner au cas de $n = 3$, on peut obtenir 14 fonctions hypergéométriques de trois variables, en excluant bien entendu les combinaisons qui correspondent au produit de trois fonctions de Gauss, ou d'une fonction de Gauss par une fonction de P. Appell.

En effet, outre les quatre combinaisons considérées

$$F_A : \frac{(\alpha, m+n+p)(\beta_1, m)(\beta_2, n)(\beta_3, p)}{(\gamma_1, m)(\gamma_2, n)(\gamma_3, p)(1, m)(1, n)(1, p)}; \qquad F_B : \frac{(\alpha_1, m)(\alpha_2, n)(\alpha_3, p)(\beta_1, m)(\beta_2, n)(\beta_3, p)}{(\gamma_1, m+n+p)(1, m)(1, n)(1, p)};$$

$$F_C : \frac{(\alpha, m+n+p)(\beta, m+n+p)}{(\gamma_1, m)(\gamma_2, n)(\gamma_3, p)(1, m)(1, n)(1, p)}; \qquad F_D : \frac{(\alpha, m+n+p)(\beta_1, m)(\beta_2, n)(\beta_3, p)}{(\gamma, m+n+p)(1, m)(1, n)(1, p)},$$

l'application régulière du procédé conduit encore à des combinaisons comme celles-ci :

$$\frac{(\alpha, m-n)(\alpha', p)(\beta, m)(\beta', n+p)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(\gamma'', p)(1, m)(1, n)(1, p)}; \quad \frac{(\alpha, m+n+p)(\beta, m+n)(\beta', p)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(\gamma'', p)(1, m)(1, n)(1, p)},$$

etc.

Domaine de convergence. — Par des calculs semblables à ceux qui sont développés au paragraphe III, M. Lauricella délimite ainsi les domaines de convergence de ses quatre séries :

1° F_A : $|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| < 1$,

2° F_B : $|x_1| < 1, \quad |x_2| < 1, \quad \ldots \quad |x_n| < 1$.

3° F_C : $|\sqrt{x_1}| + |\sqrt{x_2}| + \ldots + |\sqrt{x_n}| < 1$.

4° F_D : $|x_1| < 1, \quad |x_2| < 1, \quad \ldots \quad |x_n| < 1$.

XXXVIII. — Expression des fonctions hypergéométriques par des intégrales définies.

On vérifie facilement, en développant les intégrales définies selon les puissances de $x_1, \ldots x_n$, que l'on a

$$(5)\quad \begin{aligned} &F_A(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, x_1, \ldots, x_n) \\ &= \frac{\Gamma(\gamma_1)\ldots\Gamma(\gamma_n)}{\Gamma(\beta_1)\ldots\Gamma(\beta_n)\Gamma(\gamma_1-\beta_1)\ldots\Gamma(\gamma_n-\beta_n)} \\ &\times \int_0^1 \cdots \int_0^1 u_1^{\beta_1-1}\ldots u_n^{\beta_n-1}(1-u_1)^{\gamma_1-\beta_1-1}\ldots(1-u_n)^{\gamma_n-\beta_n-1}(1-u_1x_1-\ldots-u_nx_n)^{-\alpha}\,du_1\ldots du_n; \end{aligned}$$

$$(6)\quad \begin{aligned} &F_B(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma, x_1, \ldots, x_n) \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha_1)\ldots\Gamma(\alpha_n)\Gamma(\gamma-\alpha_1-\ldots-\alpha_n)} \\ &\times \int\cdots\int u_1^{\alpha_1-1}\ldots u_n^{\alpha_n-1}(1-u_1-\ldots-u_n)^{\gamma-\alpha_1-\ldots-\alpha_n-1}(1-u_1x_1)^{-\beta_1}\ldots(1-u_nx_n)^{-\beta_n}\,du_1\ldots du_n \\ &\qquad (u_1 \geq 0, \ldots, u_n \geq 0, 1-u_1-\ldots-u_n \geq 0); \end{aligned}$$

$$(7)\quad \begin{aligned} &F_D(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma, x_1, \ldots, x_n) \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta_1)\ldots\Gamma(\beta_n)\Gamma(\gamma-\beta_1-\ldots-\beta_n)} \\ &\times \int\cdots\int u_1^{\beta_1-1}\ldots u_n^{\beta_n-1}(1-u_1-\ldots-u_n)^{\gamma-\beta_1-\ldots-\beta_n-1}(1-u_1x_1-\ldots-u_nx_n)^{-\alpha}\,du_1\ldots du_n \\ &\qquad (u_1 \geq 0, \ldots, u_n \geq 0, 1-u_1-\ldots-u_n \geq 0). \end{aligned}$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

La fonction F_D peut encore se représenter par l'intégrale simple

$$(8)\quad F_D(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma, x_1, \ldots, x_n) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux_1)^{-\beta_1}\ldots(1-ux_n)^{-\beta_n}\,du.$$

De ces expressions, M. Lauricella tire des conséquences analogues à celles des paragraphes VII et VIII. Si l'on remarque, par exemple, que l'intégrale (5) ne change pas de forme quand on effectue l'un des $2^n - 1$ changements de variables

$$\begin{array}{rl}
n & \left\{\begin{array}{llll} u_1 = 1 - v_1, & u_2 = v_2, & \ldots, & u_n = v_n, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\ u_1 = v_1, & u_2 = v_2, & \ldots, & u_n = 1 - v_n, \end{array}\right. \\
\dfrac{n(n-1)}{1.2} & \left\{\begin{array}{llll} u_1 = 1 - v_1, & u_2 = 1 - v_2, & \ldots, & u_n = v_n, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \end{array}\right. \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
1 & \left\{ u_1 = 1 - v_1, \quad u_2 = 1 - v_2, \quad \ldots, \quad u_n = 1 - v_n, \right.
\end{array}$$

on obtient 2^n formules de transformation pour la fonction F_A :

$$(9_1)\quad F_A(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, x_1, \ldots, x_n),$$

$$(9_2)\quad = (1-x_1)^{-\alpha} F_A\left(\alpha, \gamma_1 - \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \frac{x_1}{x_1-1}, \frac{x_2}{1-x_1}, \ldots, \frac{x_n}{1-x_1}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(9_{2n})\quad = (1-x_1-\ldots-x_n)^{-\alpha} F_A\left(\alpha, \gamma_1-\beta_1, \ldots, \gamma_n-\beta_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \frac{x_1}{x_1+\ldots+x_n-1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1+\ldots+x_n-1}\right).$$

De même, en faisant dans l'intégrale (8) les $2n+1$ changements :

$$u = 1 - v, \qquad u = \frac{v}{(1-x_1) + vx_1}, \qquad \ldots, \qquad u = \frac{v}{(1-x_n) + vx_n},$$

$$u = \frac{1-v}{1-vx_1}, \qquad \ldots, \qquad u = \frac{1-v}{1-vx_n},$$

on obtient les $2n+2$ formules de transformation de la fonction F_D :

$$(10_1)\quad F_D(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma, x_1, \ldots, x_n),$$

$$(10_2)\quad = (1-x_1)^{-\beta_1}\ldots(1-x_n)^{-\beta_n} F_D\left(\gamma-\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma, \frac{x_1}{x_1-1}, \ldots, \frac{x_n}{x_n-1}\right),$$

$$(10_3)\quad = (1-x_1)^{-\alpha} F_D\left(\alpha, \gamma-\beta_1-\ldots-\beta_n, \beta_2, \ldots, \beta_n, \gamma, \frac{x_1}{x_1-1}, \frac{x_1-x_2}{x_1-1}, \ldots, \frac{x_1-x_n}{x_1-1}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(10_{n+3})\quad = (1-x_1)^{\gamma-\alpha-\beta_1}(1-x_2)^{-\beta_2}\ldots(1-x_n)^{-\beta_n} F_D\left(\gamma-\alpha, \gamma-\beta_1-\ldots-\beta_n, \beta_2, \ldots, \beta_n, \gamma, x_1, \frac{x_2-x_1}{x_2-1}, \ldots, \frac{x_n-x_1}{x_n-1}\right).$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

De cette même intégrale se déduisent divers cas de réduction de la fonction F_D; par exemple,

$$(11)\qquad F_D(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma, x, x, \ldots, x) = F(\alpha, \beta_1 + \ldots + \beta_n, \gamma, x).$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

d'où, en particulier,

$$F_D(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma, 1, 1, \ldots, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta_1 - \ldots - \beta_n)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta_1 - \ldots - \beta_n)}.$$

XXXIX. — Systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions F_A, F_B, F_C, F_D.

Chacune des quatre fonctions de M. Lauricella vérifie un système de n équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre :

$$F_A \quad \left\{ x_j(1 - x_j)\frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2} - x_j \sum_{(k \neq j)} x_k \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_j} + [\gamma_j - (\alpha + \beta_j + 1)x_j]\frac{\partial F}{\partial x_j} - \beta_j \sum_{(k \neq j)} x_k \frac{\partial F}{\partial x_k} - \alpha\beta_j F = 0 \right.$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n);$$

$$F_B \quad \left\{ x_j(1 - x_j)\frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2} + \sum_{(k \neq j)} x_k \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_k} + [\gamma_j - (\alpha_j + \beta_j + 1)x_j]\frac{\partial F}{\partial x_j} - \alpha_j\beta_j F = 0 \right.$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n);$$

$$F_C \quad \left\{ x_j(1 - x_j)\frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2} + \sum_{(s \neq j \text{ pour } r = j)} x_r \sum x_s \frac{\partial^2 F}{\partial x_r \partial x_s} + [\gamma_j - (\alpha + \beta + 1)x_j]\frac{\partial F}{\partial x_j} - (\alpha + \beta + 1)\sum_{(k \neq j)} x_k \frac{\partial F}{\partial x_k} - \alpha\beta F = 0 \right.$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n);$$

$$F_D \quad \left\{ x_j(1 - x_j)\frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2} + (1 - x_j)\sum_{(k \neq j)} x_k \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_j} + [\gamma - (\alpha + \beta_j + 1)x_j]\frac{\partial F}{\partial x_j} - \beta_j \sum_{(k \neq j)} x_k \frac{\partial F}{\partial x_k} - \alpha\beta_j F = 0 \right.$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n).$$

Le sens du symbole $\sum_{(k \neq j)}$ doit s'entendre de la manière suivante : il faut donner à k toutes les valeurs $1, 2, \ldots, n$, la valeur j étant seule exceptée.

Ces équations contiennent comme cas particuliers : pour $n = 1$ (auquel cas elles deviennent toutes les quatre identiques), l'équation hypergéométrique de Gauss; pour $n = 2$, les quatre systèmes d'équations de P. Appell.

On peut ramener ces quatre systèmes à la forme générale

$$(19) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2} = \sum_{(r \neq s)}\sum a_{rs}^{(j)} \frac{\partial^2 F}{\partial x_r \partial x_s} + \sum b_k^{(j)} \frac{\partial F}{\partial x_k} + c^{(j)} F \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

M. Lauricella a démontré au sujet des systèmes de cette forme une série de propositions qui constituent la généralisation complète des théorèmes des paragraphes XII et XIV; pour le détail des calculs nous renvoyons aux pages 122-129 de son Mémoire.

Appliquée aux quatre systèmes des fonctions hypergéométriques, ces propositions générales conduisent aux résultats suivants :

L'intégrale générale des systèmes vérifiés par les fonctions F_A, F_B, F_C *dépend linéairement de* 2^n *constantes arbitraires; celle du système vérifié par la fonction* F_D *dépend linéairement de* $(n + 1)$ *constantes arbitraires seulement.*

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

On peut donc écrire l'intégrale générale de ces systèmes dès qu'on en connaît 2^n intégrales particulières indépendantes pour les trois premiers, et $(n+1)$ pour le quatrième.

Système (F_A). — Pour obtenir l'intégrale générale du système (F_A), il suffit de remarquer qu'il ne change pas de forme lorsqu'on y effectue le changement

$$F = x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} F',$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ayant certaines valeurs convenables :

$$\begin{array}{r|cccccc}
 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_{n-1} & \lambda_n \\
1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
n & 1-\gamma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 & 0 & 1-\gamma_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 & \cdot & \cdots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\
 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-\gamma_n \\
\frac{n(n-1)}{1.2} & 1-\gamma_1 & 1-\gamma_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 & 0 & 1-\gamma_2 & 1-\gamma_3 & \dots & 0 & 0 \\
 & \cdot & \cdots & \cdots & \dots & \cdot & \cdot \\
 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-\gamma_{n-1} & 1-\gamma_n \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & 1-\gamma_1 & 1-\gamma_2 & 1-\gamma_3 & \dots & 1-\gamma_{n-1} & 1-\gamma_n .
\end{array}$$

On en déduit les 2^n intégrales particulières :

$$\begin{array}{r|l}
1 & F_A(\alpha, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, x_1, \dots, x_n), \\
n & x_1^{1-\gamma_1} F_A(\alpha+1-\gamma_1, \beta_1+1-\gamma_1, \beta_2, \dots, \beta_n, 2-\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, x_1, \dots, x_n), \\
 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
 & x_n^{1-\gamma_n} F_A(\alpha+1-\gamma_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n+1-\gamma_n, \gamma_1, \gamma_2, \dots, 2-\gamma_n, x_1, \dots, x_n), \\
\frac{n(n-1)}{1.2} & x_1^{1-\gamma_1} x_2^{1-\gamma_2} F_A(\alpha+2-\gamma_1-\gamma_2, \beta_1+1-\gamma_1, \beta_2+1-\gamma_2, \dots, \beta_n, 2-\gamma_1, 2-\gamma_2, \dots, \gamma_n, x_1, \dots, x_n), \\
 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
1 & x_1^{1-\gamma_1} x_2^{1-\gamma_2} \dots x_n^{1-\gamma_n} F_A(\alpha+n-\gamma_1-\dots-\gamma_n, \beta_1+1-\gamma_1, \dots, \beta_n+1-\gamma_n, 2-\gamma_1, \dots, 2-\gamma_n, x_1, \dots, x_n).
\end{array}$$

Lorsque aucun des nombres $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ n'est égal à un entier, on obtient l'intégrale générale du système F_A, en multipliant ces 2^n intégrales particulières par des constantes arbitraires, puis en faisant leur somme.

Système (F_B). — Pour déterminer l'intégrale générale du système (F_B), M. Lauricella remarque qu'il se ramène au système (F_A), lorsqu'on y effectue la transformation

$$x_1 = \frac{1}{\xi_1}, \qquad x_2 = \frac{1}{\xi_2}, \qquad \dots, \qquad x_n = \frac{1}{\xi_n}, \qquad F = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_n^{\alpha_n} F'.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Ceci permet d'écrire immédiatement les 2^n intégrales particulières :

$$1 \left\{ x_1^{-\alpha_1} x_2^{-\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} F_A\left(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n - \gamma + 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_1 - \beta_1 + 1, \ldots, \alpha_n - \beta_n + 1, \frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right), \right.$$

$$n \left\{ \begin{array}{l} x_1^{-\beta_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{-\alpha_n} F_A\left(\beta_1 + \ldots + \alpha_n - \gamma + 1, \beta_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1 - \alpha_1 + 1, \ldots, \alpha_n - \beta_n + 1, \frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$1 \left\{ x_1^{-\beta_1} x_2^{-\beta_2} \ldots x_n^{\beta_n} F_A\left(\beta_1 + \ldots + \beta_n - \gamma + 1, \beta_1, \ldots, \beta_n, \beta_1 - \alpha_1 + 1, \ldots, \beta_n - \alpha_n + 1, \frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right). \right.$$

Système (F_C). — En procédant comme pour le système (F_A), M. Lauricella forme directement les 2^n intégrales particulières :

$$1 \left\{ F_C(\alpha, \beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, x_1, \ldots, x_n), \right.$$

$$n \left\{ \begin{array}{l} x_1^{1-\gamma_1} F_C(\alpha + 1 - \gamma_1, \beta + 1 - \gamma_1, 2 - \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{1-\gamma_n} F_C(\alpha + 1 - \gamma_n, \beta + 1 - \gamma_n, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, 2 - \gamma_n, x_1, \ldots, x_n), \end{array} \right.$$

$$\frac{n(n-1)}{1.2} \left\{ \begin{array}{l} x_1^{1-\gamma_1} x_2^{1-\gamma_2} F_C(\alpha + 2 - \gamma_1 - \gamma_2, \beta + 2 - \gamma_1 - \gamma_2, 2 - \gamma_1, 2 - \gamma_2, \ldots, \gamma_n, x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$1 \left\{ x_1^{1-\gamma_1} x_2^{1-\gamma_2} \ldots x_n^{1-\gamma_n} F_C(\alpha + n - \gamma_1 - \ldots - \gamma_n, \beta + n - \gamma_1 - \ldots - \gamma_n, 2 - \gamma_1, 2 - \gamma_2, \ldots, x_1, \ldots, x_n). \right.$$

Système (F_D). — Les circonstances qui se présentent dans l'étude du système F_D sont très différentes; il suffisait d'ailleurs, pour le prévoir, de se rappeler que la fonction F_D généralise la fonction F_1.

Considérons, dans ce système, les équations de rangs r et s, respectivement ($r \neq s$) :

$$x_r(1 - x_r)\frac{\partial^2 F}{\partial x_r^2} + (1 - x_r)\sum_{(k \neq r)} x_k \frac{\partial^2 F}{\partial x_r \partial x_k} + [\gamma - (\alpha + \beta_r + 1)x_r]\frac{\partial F}{\partial x_r} - \beta_r \sum_{(k \neq r)} x_k \frac{\partial F}{\partial x_k} - \alpha\beta_r F = 0,$$

$$x_s(1 - x_s)\frac{\partial^2 F}{\partial x_s^2} + (1 - x_s)\sum_{(k \neq s)} x_k \frac{\partial^2 F}{\partial x_s \partial x_k} + [\gamma - (\alpha + \beta_s + 1)x_s]\frac{\partial F}{\partial x_s} - \beta_s \sum_{(k \neq s)} x_k \frac{\partial F}{\partial x_k} - \alpha\beta_s F = 0.$$

Dérivons la première par rapport à x_s, la deuxième par rapport à x_r; puis multiplions-les respectivement par $(1 - x_s)$ et $(1 - x_r)$ et retranchons-les; les dérivées troisièmes disparaissent et il reste, toutes simplifications faites,

$$(13) \qquad (x_r - x_s)\frac{\partial^2 F}{\partial x_r \partial x_s} - \beta_s \frac{\partial F}{\partial x_r} + \beta_r \frac{\partial F}{\partial x_s} = 0 \qquad (r \neq s).$$

Ces équations, conséquences nécessaires des n équations (F_D), sont au nombre de $\frac{n(n-1)}{1.2}$; on peut s'en servir pour éliminer dans les équations (F_D) les dérivées de la forme $\frac{\partial^2 F}{\partial x_r \partial x_s}$ ($r \neq s$);

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

on aboutit finalement à un système de $\frac{n(n+1)}{1.2}$ équations

$$(14)\quad \begin{cases} a_j \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_j^2} + \sum b_k^j \dfrac{\partial F}{\partial x_k} + c_j F = 0 & (j = 1, 2, \ldots, n), \\ (x_r - x_s) \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_r \partial x_s} - \beta_s \dfrac{\partial F}{\partial x_r} + \beta_r \dfrac{\partial F}{\partial x_s} = 0 & (r \neq s,\ r, s = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

L'intégrale générale de ce système dépend de $(n+1)$ constantes arbitraires, mais M. Lauricella n'en a donné que deux intégrales particulières seulement :

$$F_D(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma, x_1, \ldots, x_n),$$
$$F_D(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n, \alpha + \beta_1 + \ldots + \beta_n + 1 - \gamma, 1 - x_1, \ldots, 1 - x_n).$$

Ce point appellerait donc de nouvelles recherches : on pourrait étendre les résultats du paragraphe XV en partant de l'expression (8) de F_D; *l'intégrale*

$$z(x_1, \ldots, x_n) = \int_g^h u^{\beta_1 + \ldots + \beta_n - \gamma} (u-1)^{\gamma - \alpha - 1} (u - x_1)^{-\beta_1} \ldots (u - x_n)^{-\beta_n} du$$

où g et h désignent deux des $n+3$ quantités $0, 1, \infty, x_1, \ldots, x_n$ *fournit* $\frac{(n+3)(n+2)}{1.2}$ *intégrales particulières du système* (F_D). En leur appliquant les $2n+2$ transformations (10) de la fonction F_D, on formerait le *tableau complet des* $N = (n+3)(n+2)(n+1)$ *intégrales du système* (F_D) (pour $n = 1$, $N = 24$, voir p. 6; pour $n = 2$, $N = 60$, voir p. 62).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

CHAPITRE VIII.

LES DÉGÉNÉRESCENCES DES QUATRE FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES DE DEUX VARIABLES.

XL. — Les dégénérescences de la fonction hypergéométrique de Gauss.

Considérons la fonction hypergéométrique

$$(1)\qquad F\left(\alpha, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma, \varepsilon x\right) = \sum \frac{(\alpha, m)\left(\frac{1}{\varepsilon}, m\right)}{(\gamma, m)(1, m)} \varepsilon^m x^m.$$

Comme

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}, m\right)\varepsilon^m = 1(1-\varepsilon)(1-2\varepsilon)\ldots[1-\varepsilon(m-1)],$$

si l'on fait tendre ε vers zéro, on a

$$\lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{1}{\varepsilon}, m\right)\varepsilon^m = 1.$$

Par conséquent

$$(2)\qquad \lim_{\varepsilon=0} F\left(\alpha, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma, \varepsilon x\right) = \sum \frac{(\alpha, m)}{(\gamma, m)} \frac{x^m}{(1, m)};$$

la série du second membre, qui se déduit ainsi de la série hypergéométrique par un passage à la limite, converge évidemment pour toutes les valeurs de x. On pose habituellement

$$(3)\qquad \lim_{\varepsilon=0} F\left(\alpha, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma, \varepsilon x\right) = G(\alpha, \gamma, x).$$

La fonction $G(\alpha, \gamma, x)$, qui a été étudiée par Kummer [1], constitue une première dégénérescence de la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ de Gauss; les propriétés de la fonction G se déduisent par passage à la limite dans les formules relatives à la fonction $F\left(\alpha, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma, \varepsilon x\right)$. Considérons, par exemple, l'équation différentielle vérifiée par la fonction

$$y(x, \varepsilon) = F\left(\alpha, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma, \varepsilon x\right),$$

soit

$$(4)\qquad x(1-\varepsilon x)\frac{d^2y}{dx^2} + \left[\gamma - \left(\alpha + \frac{1}{\varepsilon} + 1\right)\varepsilon x\right]\frac{dy}{dx} - \alpha y = 0.$$

[1] Kummer, *Jour. reine und angew. Math.*, t. XV, 1836, p. 139.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Écrivons-la sous la forme

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(\gamma-x)\frac{dy}{dx}-\alpha y+\varepsilon\left[-x^2\frac{d^2y}{dx^2}-(\alpha+1)x\frac{dy}{dx}\right]=0.$$

Quand ε tend vers zéro, l'équation (4) tend donc vers celle-ci :

$$(5)\qquad x\frac{d^2y}{dx^2}+(\gamma-x)\frac{dy}{dx}-\alpha y=0.$$

Telle est l'équation à laquelle (comme on peut d'ailleurs le vérifier directement) satisfait la fonction $G(\alpha, \gamma, x)$.

Une circonstance digne de remarque se produit dans le passage de l'équation (4) à l'équation (5). L'équation hypergéométrique (4) possède les trois points singuliers réguliers (au sens de Fuchs) $0, \frac{1}{\varepsilon}, \infty$. Quand ε tend vers zéro, le point singulier $\frac{1}{\varepsilon}$ tend à se confondre avec le point singulier $x=\infty$. De fait l'équation de la fonction $G(\alpha, \gamma, x)$ ne possède plus que les deux points singuliers $0, \infty$ qui sont, le premier régulier et le second irrégulier. Le point irrégulier $x=\infty$ résulte ainsi de la fusion, de la confluence (pour parler comme les auteurs anglais), des deux singularités régulières $x=\frac{1}{\varepsilon}$, $x=\infty$; ce qui fait dire à ces mêmes auteurs que la fonction $G(\alpha, \gamma, x)$ de Kummer se déduit de la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ par confluence; ils l'appellent une *fonction hypergéométrique confluente*.

Lorsque γ n'est pas un nombre entier, l'intégrale générale de l'équation (5) est représentée dans tout le plan par l'expression

$$(6)\qquad y=A\,G(\alpha, \gamma, x)+Bx^{1-\gamma}G(\alpha+1-\gamma, 2-\gamma, x)$$

qui peut, si l'on veut, se déduire par passage à la limite de la formule (8-I).

La fonction $G(\alpha, \gamma, x)$ s'exprime par une intégrale définie

$$(7)\qquad G(\alpha, \gamma, x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}e^{ux}\,du.$$

Comme cette intégrale ne change pas de forme quand on y effectue la substitution

$$u=1-v,$$

on en déduit la relation [limite de la formule d'Euler (6'-I)]

$$(7')\qquad G(\alpha, \gamma, x)=e^x G(\gamma-\alpha, \gamma, -x)$$

qui a été donnée par Kummer.

Toute fonction de Kummer, où le premier élément est égal à un entier négatif $-n$, se réduit à un polynome de degré n; ces polynomes se déduisent par dégénérescence des polynomes de Jacobi (I, 8°) :

$$G(-n, \gamma, x)=\lim_{\varepsilon=0}\mathcal{J}_n\left(\frac{1}{\varepsilon}, \gamma, \varepsilon x\right),$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

d'où, en passant à la limite dans la formule (2-XXXIII) :

$$G(-n, \gamma, x) = \frac{x^{1-\gamma} e^x}{(\gamma, n)} \frac{d^n}{dx^n} [x^{\gamma+n-1} e^{-x}]. \tag{8}$$

Considérons encore la fonction hypergéométrique

$$F\left(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma, \varepsilon^2 x\right) = \sum \frac{\left(\frac{1}{\varepsilon}, m\right)\left(\frac{1}{\varepsilon}, m\right)}{(\gamma, m)(1, m)} \varepsilon^{2m} x^m$$

comme

$$\lim_{\varepsilon=0} \left(\frac{1}{\varepsilon}, m\right)\left(\frac{1}{\varepsilon}, m\right) \varepsilon^{2m} = 1,$$

on peut écrire

$$\lim_{\varepsilon=0} F\left(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma, \varepsilon^2 x\right) = \sum \frac{1}{(\gamma, m)} \frac{x^m}{(1, m)}.$$

Cette série converge évidemment pour toute valeur de x; on pose habituellement

$$\lim_{\varepsilon=0} F\left(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma, \varepsilon^2 x\right) = J(\gamma, x). \tag{9}$$

La fonction $J(\gamma, x)$, qui apparaît ainsi comme une nouvelle dégénérescence de la fonction de Gauss, se ramène très simplement aux transcendantes $J_k(x)$ introduites dans l'Analyse par Fourier et Bessel; on a, en effet,

$$J_k(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^k}{\Gamma(k+1)} J\left(k+1, -\frac{x^2}{2^2}\right). \tag{10}$$

De l'équation différentielle

$$x(1-\varepsilon^2 x)\frac{d^2 y}{dx^2} + \left[\gamma - \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} + 1\right)\varepsilon^2 x\right]\frac{dy}{dx} - y = 0,$$

vérifiée par la fonction

$$y(x, \varepsilon) = F\left(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma, \varepsilon^2 x\right),$$

on déduit, en faisant tendre ε vers zéro, l'équation de la fonction $J(\gamma, x)$

$$x\frac{d^2 y}{dx^2} + \gamma\frac{dy}{dx} - y = 0 \tag{11}$$

qui ne possède plus que les deux singularités 0 et ∞, le troisième point singulier $x = \frac{1}{\varepsilon^2}$ étant venu, par confluence, se fondre avec le point $x = \infty$.

Lorsque γ n'est pas un entier l'intégrale générale de l'équation (11) est représentée, dans tout le plan, par l'expression

$$y = A J(\gamma, x) + B x^{1-\gamma} J(2-\gamma, x).$$

Grâce à la formule (10), on peut, en partant de l'équation (11), retrouver l'équation classique de Bessel

$$x^2 \frac{d^2 J_k}{dx^2} + x\frac{dJ_k}{dx} + (x^2 - k^2) J_k = 0.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

XLI. — Les dégénérescences des fonctions hypergéométriques de deux variables.

La méthode de passage à la limite, qui permet de déduire les deux fonctions hypergéométriques confluentes $G(\alpha, \gamma, x)$ et $J(\gamma, x)$ de la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, peut, comme l'a montré M. Pierre Humbert [1], s'étendre aux fonctions de deux variables et conduit à des fonctions confluentes dont il a fait l'étude; nous allons exposer, en les développant, les résultats qu'il a obtenus.

En procédant, comme au paragraphe précédent, c'est-à-dire en remarquant que

$$\lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{1}{\varepsilon}, m\right)\varepsilon^m = \lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{1}{\varepsilon}, n\right)\varepsilon^n = \lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{1}{\varepsilon}, m+n\right)\varepsilon^{m+n} = 1,$$

on voit aisément que :

$$\text{(I)}\qquad \lim_{\varepsilon=0} F_1\left(\alpha, \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma, \varepsilon x, \varepsilon y\right) = \sum \frac{(\alpha, m+n)}{(\gamma, m+n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)},$$

$$\text{(II)}\qquad \lim_{\varepsilon=0} F_1\left(\frac{1}{\varepsilon}, \beta, \beta', \gamma, \varepsilon x, \varepsilon y\right) = \sum \frac{(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)},$$

$$\text{(III)}\qquad \lim_{\varepsilon=0} F_1\left(\alpha, \frac{1}{\varepsilon}, \beta', \gamma, \varepsilon x, y\right) = \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)},$$

$$\text{(IV)}\qquad \lim_{\varepsilon=0} F_1\left(\alpha, \beta, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma, x, \varepsilon y\right) = \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)}{(\gamma, m+n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)},$$

$$\text{(V)}\qquad \lim_{\varepsilon=0} F_2\left(\alpha, \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma, \gamma', \varepsilon x, \varepsilon y\right) = \sum \frac{(\alpha, m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)},$$

$$\text{(VI)}\qquad \lim_{\varepsilon=0} F_2\left(\frac{1}{\varepsilon}, \beta, \beta', \gamma, \gamma', \varepsilon x, \varepsilon y\right) = \sum \frac{(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)},$$

$$\text{(VII)}\qquad \lim_{\varepsilon=0} F_2\left(\alpha, \frac{1}{\varepsilon}, \beta', \gamma, \gamma', \varepsilon x, y\right) = \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta', n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)},$$

$$\text{(VIII)}\qquad \lim_{\varepsilon=0} F_2\left(\alpha, \beta, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma, \gamma', x, \varepsilon y\right) = \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)}{(\gamma, m)(\gamma', n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)},$$

$$\text{(IX)}\qquad \lim_{\varepsilon=0} F_3\left(\alpha, \alpha', \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma, \varepsilon x, \varepsilon y\right) = \sum \frac{(\alpha, m)(\alpha', n)}{(\gamma, m+n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)},$$

$$\text{(X)}\qquad \lim_{\varepsilon=0} F_3\left(\alpha, \alpha', \frac{1}{\varepsilon}, \beta', \gamma, \varepsilon x, y\right) = \sum \frac{(\alpha, m)(\alpha', n)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)},$$

$$\text{(XI)}\qquad \lim_{\varepsilon=0} F_3\left(\alpha, \alpha', \beta, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma, x, \varepsilon y\right) = \sum \frac{(\alpha, m)(\alpha', n)(\beta, m)}{(\gamma, m+n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)},$$

$$\text{(XII)}\qquad \lim_{\varepsilon=0} F_4\left(\alpha, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma, \gamma', \varepsilon x, \varepsilon y\right) = \sum \frac{(\alpha, m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)}.$$

---

[1] Pierre Humbert, *The Confluent Hypergeometric Functions of two Variables* (*Proceedings of the royal Society of Edinburg*, vol. XLI, Part. I, nº 9, p, 73-96).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Les fonctions (I) et (VI) se ramènent respectivement aux fonctions d'une variable

$$G(\alpha, \gamma, x+y) \quad \text{et} \quad G(\beta, \gamma, x)\,G(\beta', \gamma', y);$$

les fonctions (II) et (IX) se réduisent l'une à l'autre en mettant (α, α') à la place de (β, β'); les fonctions (V) et (XII) sont identiques; les fonctions (III) et (IV), (VII) et (VIII), (X) et (XI) se déduisent l'une de l'autre en échangeant le rôle de x et de y.

Il ne reste donc comme fonctions nouvelles et réellement distinctes que les fonctions

$$(\mathrm{II}),\quad (\mathrm{IV}),\quad (\mathrm{V}),\quad (\mathrm{VIII}),\quad (\mathrm{XI}).$$

Ces cinq fonctions confluentes jouent, par rapport aux fonctions F_1, F_2, F_3, F_4 le même rôle que la fonction $G(\alpha, \gamma, x)$ par rapport à $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

En poursuivant l'opération de passage à la limite, on obtient ensuite :

$$(\mathrm{XIII})\qquad \lim_{\varepsilon=0} F_1\left(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma, \varepsilon^2 x, \varepsilon^2 y\right) = \sum \frac{1}{(\gamma, m+n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)},$$

$$(\mathrm{XIV})\qquad \lim_{\varepsilon=0} F_1\left(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \beta', \gamma, \varepsilon^2 x, \varepsilon y\right) = \sum \frac{(\beta', n)}{(\gamma, m+n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)},$$

$$(\mathrm{XV})\qquad \lim_{\varepsilon=0} F_1\left(\frac{1}{\varepsilon}, \beta, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma, \varepsilon x, \varepsilon^2 y\right) = \sum \frac{(\beta, m)}{(\gamma, m+n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)},$$

$$(\mathrm{XVI})\qquad \lim_{\varepsilon=0} F_2\left(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma, \gamma', \varepsilon^2 x, \varepsilon^2 y\right) = \sum \frac{1}{(\gamma, m)(\gamma', n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)},$$

$$(\mathrm{XVII})\qquad \lim_{\varepsilon=0} F_2\left(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \beta', \gamma, \gamma', \varepsilon^2 x, \varepsilon y\right) = \sum \frac{(\beta', n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)},$$

$$(\mathrm{XVIII})\qquad \lim_{\varepsilon=0} F_2\left(\frac{1}{\varepsilon}, \beta, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma, \gamma', \varepsilon x, \varepsilon^2 y\right) = \sum \frac{(\beta, m)}{(\gamma, m)(\gamma', n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)},$$

$$(\mathrm{XIX})\qquad \lim_{\varepsilon=0} F_3\left(\frac{1}{\varepsilon}, \alpha', \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma, \varepsilon^2 x, \varepsilon y\right) = \sum \frac{(\alpha', n)}{(\gamma, m+n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)},$$

$$(\mathrm{XX})\qquad \lim_{\varepsilon=0} F_3\left(\alpha, \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma, \varepsilon x, \varepsilon^2 y\right) = \sum \frac{(\alpha, m)}{(\gamma, m+n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)},$$

$$(\mathrm{XXI})\qquad \lim_{\varepsilon=0} F_3\left(\alpha, \frac{1}{\varepsilon}, \beta, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma, x, \varepsilon^2 y\right) = \sum \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m+n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)},$$

$$(\mathrm{XXII})\qquad \lim_{\varepsilon=0} F_3\left(\frac{1}{\varepsilon}, \alpha', \frac{1}{\varepsilon}, \beta', \gamma, \varepsilon^2 x, y\right) = \sum \frac{(\alpha', n)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)},$$

$$(\mathrm{XXIII})\qquad \lim_{\varepsilon=0} F_4\left(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma, \gamma', \varepsilon^2 x, \varepsilon^2 y\right) = \sum \frac{1}{(\gamma, m)(\gamma', n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)}.$$

Les fonctions (XIII), (XVI), (XVII), (XVIII) et (XXIII) se ramènent à des fonctions d'une variable

(XIII)	$J(\gamma, x+y)$;	(XVI)	$J(\gamma, x)\,J(\gamma', y)$;
(XVII)	$J(\gamma, x)\,G(\beta', \gamma', y)$;	(XVIII)	$G(\beta, \gamma, x)\,J(\gamma', y)$;
(XXIII)	$J(\gamma, x)\,J(\gamma', y)$.		

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Les fonctions (XIV) et (XIX) se ramènent l'une à l'autre en échangeant α' et β'; de même (XV) et (XX) en échangeant α et β; en outre les fonctions (XIV) et (XV), (XXI) et (XXII) se déduisent l'une de l'autre en intervertissant le rôle de x et de y; il ne reste donc finalement, comme fonctions nouvelles et distinctes, que les fonctions

(XV) et (XXI).

M. Pierre Humbert introduit les notations suivantes :

1° Fonction (IV)

$$\Phi_1(\alpha;\beta;\gamma;x,y) = \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)}{(\gamma, m+n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)};$$

2° Fonction (II)

$$\Phi_2(\beta, \beta';\gamma, x, y) = \sum \frac{(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)};$$

3° Fonction (XV)

$$\Phi_3(\beta;\gamma, x, y) = \sum \frac{(\beta, m)}{(\gamma, m+n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)};$$

4° Fonction (VIII)

$$\Psi_1(\alpha;\beta;\gamma, \gamma', x, y) = \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)}{(\gamma, m)(\gamma', n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)};$$

5° Fonction (V)

$$\Psi_2(\alpha;\gamma, \gamma', x, y) = \sum \frac{(\alpha, m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)};$$

6° Fonction (XI)

$$\Xi_1(\alpha, \alpha';\beta;\gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha, m)(\alpha', n)(\beta, m)}{(\gamma, m+n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)};$$

7° Fonction (XXI)

$$\Xi_2(\alpha;\beta;\gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m+n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)}.$$

Certaines de ces fonctions peuvent aussi se déduire l'une de l'autre par confluence : c'est ainsi par exemple que

$$\lim_{\varepsilon=0} \Phi_2\left(\beta, \frac{1}{\varepsilon};\gamma; x, \varepsilon y\right) = \Phi_3(\beta;\gamma; x, y),$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \Psi_1\left(\alpha, \frac{1}{\varepsilon};\gamma, \gamma'; \varepsilon x, y\right) = \Psi_2(\alpha;\gamma, \gamma'; x, y),$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \Xi_1\left(\alpha, \frac{1}{\varepsilon};\beta;\gamma; x, \varepsilon y\right) = \Xi_2(\alpha;\beta;\gamma; x, y).$$

XLII. — Propriétés élémentaires des fonctions hypergéométriques confluentes.

Comme les fonctions hypergéométriques elles-mêmes, les fonctions confluentes s'expriment par des séries simples dont les éléments sont l'une des fonctions $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, $G(\alpha, \gamma, x)$,

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

J (γ, x); on obtient ces expressions en passant à la limite dans les formules (15-16-17-18-II) :

$$(12)\qquad \Phi_1(\alpha;\beta;\gamma;x,y)=\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{(\alpha,m)(\beta,m)}{(\gamma,m)(1,m)}G(\alpha+m,\gamma+m,y)x^m$$

$$=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(\alpha,n)}{(\gamma,n)(1,n)}F(\alpha+n,\beta,\gamma+n,x)y^n.$$

$$(13)\qquad \Phi_2(\beta,\beta';\gamma;x,y)=\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{(\beta,m)}{(\gamma,m)(1,m)}G(\beta',\gamma+m,y)x^m,$$

$$(14)\qquad \Phi_3(\beta;\gamma;x,y)=\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{(\beta,m)}{(\gamma,m)(1,m)}J(\gamma+m,y)x^m$$

$$=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(\gamma,n)(1,n)}G(\beta,\gamma+n,x)y^n$$

et de même pour toutes les autres.

M. P. Humbert a encore exprimé les fonctions confluentes sous forme de séries dont les éléments sont des produits de fonctions F, G ou J.

Par exemple, en passant à la limite dans l'expression (15-VIII) de F_2, on obtient

$$(15)\qquad \Psi_1(-p;\beta;\gamma,\gamma';x,y)=(-1)^p\sum\frac{(-p,m+n)}{(1,m)(1,n)}F(-m,\beta,\gamma,x)G(-n,\gamma',y),$$

$$(16)\qquad \Psi_2(-p;\gamma,\gamma';x,y)=(-1)^p\sum\frac{(-p,m+n)}{(1,m)(1,n)}G(-m,\gamma,x)G(-n,\gamma',y).$$

Les fonctions F et G qui figurent dans ces développements ayant leur premier élément égal à un entier négatif se réduisent d'ailleurs à des polynomes.

Dans le même ordre d'idées, on peut montrer que, de même que F_1 se ramène toujours à F_3, Φ_1 s'exprime simplement au moyen de Ξ_1. En effet, si dans la relation (29-V)

$$F_1\left(\alpha,\beta,\frac{1}{\varepsilon},\gamma,x,\varepsilon y\right)=(1-\varepsilon y)^{-\frac{1}{\varepsilon}}F_3\left(\alpha,\gamma-\alpha,\beta,\frac{1}{\varepsilon},\gamma,x,\frac{\varepsilon y}{\varepsilon y-1}\right)$$

on fait tendre ε vers zéro, on obtient immédiatement

$$(17)\qquad \Phi_1(\alpha;\beta;\gamma;x,y)=e^y\,\Xi_1(\alpha,\gamma-\alpha,\beta,\gamma,x,-y).$$

Enfin les fonctions hypergéométriques confluentes s'expriment par des intégrales définies. Par exemple, en passant à la limite dans la formule (4-VI), on a

$$(18)\qquad \Phi_1(\alpha;\beta;\gamma;x,y)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}e^{uy}\,du,$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

de même en partant de (1-VI)

$$(19)\quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_2(\beta, \beta'; \gamma; x, y) = \dfrac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma-\beta-\beta')} \displaystyle\int\int u^{\beta-1} v^{\beta'-1} (1-u-v)^{\gamma-\beta-\beta'-1} e^{ux+vy}\, du\, dv \\ \qquad\qquad (u \geq 0,\ v \geq 0,\ 1-u-v \geq 0). \end{array} \right.$$

XLIII. — Systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions hypergéométriques confluentes.

Les sept fonctions hypergéométriques confluentes vérifient chacune un système de deux équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre, que l'on obtient en passant à la limite dans le système de la fonction F_1, F_2, F_3 ou F_4, dont elle dérive :

$$\Phi_1 \left\{ \begin{array}{l} x(1-x)r + y(1-x)s + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]p - \beta y q - \alpha\beta z = 0, \\ yt + xs + (\gamma - y)q - xp - \alpha z = 0; \end{array} \right.$$

$$\Phi_2 \left\{ \begin{array}{l} xr + ys + (\gamma - x)p - \beta z = 0, \\ yt + xs + (\gamma - y)q - \beta' z = 0; \end{array} \right.$$

$$\Phi_3 \left\{ \begin{array}{l} xr + ys + (\gamma - x)p - \beta z = 0, \\ yt + xs + \gamma q - z = 0; \end{array} \right.$$

$$\Psi_1 \left\{ \begin{array}{l} x(1-x)r - xys + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]p - \beta y q - \alpha\beta z = 0, \\ yt + (\gamma' - y)q - xp - \alpha z = 0; \end{array} \right.$$

$$\Psi_2 \left\{ \begin{array}{l} xr + (\gamma - x)p - yq - \alpha z = 0, \\ yt + (\gamma' - y)q - xp - \alpha z = 0; \end{array} \right.$$

$$\Xi_1 \left\{ \begin{array}{l} x(1-x)r + ys + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]p - \alpha\beta z = 0, \\ yt + xs + (\gamma - y)q - \alpha' z = 0; \end{array} \right.$$

$$\Xi_2 \left\{ \begin{array}{l} x(1-x)r + ys + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]p - \alpha\beta z = 0, \\ yt + xs + \gamma q - z = 0. \end{array} \right.$$

Tous ces systèmes se ramènent à la forme (1-XII)

$$r = a_1 s + a_2 p + a_3 q + a_4 z,$$
$$t = b_1 s + b_2 p + b_3 q + b_4 z.$$

La quantité $1 - a_1 b_1$ est identiquement nulle pour les systèmes vérifiés par Φ_1, Φ_2, Φ_3; pour ceux des fonctions Ψ_1, Ψ_2, Ξ_1, Ξ_2, au contraire, elle n'est pas identiquement nulle.

Il résulte donc de la théorie générale des paragraphes XII et XIV que les intégrales générales des systèmes des fonctions Φ_1, Φ_2, Φ_3 s'expriment linéairement en fonction de trois intégrales particulières, et les intégrales générales des systèmes des fonctions Ψ_1, Ψ_2, Ξ_1, Ξ_2 en fonction de quatre intégrales particulières.

Chacune des fonctions Φ vérifie, en plus des deux équations précédentes, une troisième équation qui est une conséquence nécessaire des deux premières

Φ_1 $$xs - p + \beta q = 0,$$

Φ_2 $$(x-y)s - \beta' p + \beta q = 0,$$

Φ_3 $$xs - p + \beta q = 0.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

On obtient ces équations, en passant à la limite dans la troisième équation vérifiée par la fonction F_1 (12-XIV)

$$F_1 \qquad (x-y)s - \beta' p + \beta q = 0.$$

Voici, à titre d'exemple, les intégrales générales des systèmes d'équations de Ψ_1 et Ψ_2, contenant quatre constantes arbitraires :

$$\begin{aligned}\Psi_1 \qquad z = {} & A\Psi_1(\alpha;\beta;\gamma,\gamma';x,y)\\ & + Bx^{1-\gamma}\Psi_1(\alpha+1-\gamma;\beta+1-\gamma;2-\gamma,\gamma';x,y)\\ & + Cy^{1-\gamma'}\Psi_1(\alpha+1-\gamma';\beta;\gamma;2-\gamma';x,y)\\ & + Dx^{1-\gamma}y^{1-\gamma'}\Psi_1(\alpha+2-\gamma-\gamma';\beta+1-\gamma;2-\gamma,2-\gamma';x,y);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_2 \qquad z = {} & A\Psi_2(\alpha;\gamma,\gamma';x,y)\\ & + Bx^{1-\gamma}\Psi_2(\alpha+1-\gamma;2-\gamma,\gamma';x,y)\\ & + Cy^{1-\gamma'}\Psi_2(\alpha+1-\gamma';\gamma,2-\gamma';x,y)\\ & + Dx^{1-\gamma}y^{1-\gamma'}\Psi_2(\alpha+2-\gamma-\gamma';2-\gamma,2-\gamma';x,y).\end{aligned}$$

Les équations adjointes des équations des fonctions confluentes se déterminent aisément par la formule (24-XVIII); par exemple, les équations adjointes de celles de $\Phi_2(\beta,\beta';\gamma;x,y)$ sont

$$\begin{cases} xr + ys + (3-\gamma+x)p + (1-\beta)z = 0,\\ yt + xs + (3-\gamma+y)q + (1-\beta')z = 0;\end{cases}$$

ce sont précisément les équations vérifiées par la fonction $\Phi_2(1-\beta, 1-\beta'; 3-\gamma; -x, -y)$.

XLIV. — La fonction $W_{k,\mu}(x)$ de M. Whittaker.

Aux fonctions hypergéométriques confluentes déduites de $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ se rattachent deux fonctions, définies par M. Whittaker [1], qui jouent un rôle dans plusieurs questions connexes à la théorie du potentiel.

Considérons la fonction

$$G\left(\mu-k+\frac{1}{2}, 2\mu+1, x\right) = \lim_{\varepsilon=0} F\left(\mu-k+\frac{1}{2}, \frac{1}{\varepsilon}, 2\mu+1, \varepsilon x\right).$$

D'après (5) elle vérifie l'équation différentielle

$$(20) \qquad x\frac{d^2y}{dx^2} + (2\mu+1-x)\frac{dy}{dx} - \left(\mu-k+\frac{1}{2}\right)y = 0;$$

d'après la formule (6), lorsque μ n'est pas un multiple de $\frac{1}{2}$, cette équation admet comme intégrale générale la fonction

$$(21) \qquad y = A\,G\left(\mu-k+\frac{1}{2}, 2\mu+1, x\right) + Bx^{-2\mu}\,G\left(-\mu-k+\frac{1}{2}, -2\mu+1, x\right),$$

[1] Whittaker and Watson, *Modern Analysis*, 3e édition (*The confluent hypergeometric Function*, p. 337).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

cette expression étant valable dans tout le plan, puisque les seuls points singuliers de l'équation (20) sont $x = 0$ (point régulier) et $x = \infty$ (point irrégulier).

Ceci étant, remarquons que pour ramener l'équation (20) à la forme simplifiée

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \varphi(x)\, u,$$

il suffit de poser

$$u(x) = x^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} y(x). \tag{22}$$

L'équation (20) se transforme alors en celle-ci, plus simple et plus symétrique :

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \left[\frac{1}{4} - \frac{k}{x} + \frac{\mu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right] u. \tag{23}$$

Posons donc

$$\begin{aligned} M_{k,\mu}(x) &= x^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} G\left(\mu - k + \frac{1}{2}, 2\mu + 1, x\right) \\ &= x^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\left(\mu - k + \frac{1}{2}, n\right)}{(2\mu+1, n)} \frac{x^n}{(1, n)}. \end{aligned} \tag{24}$$

Cette fonction est une première intégrale particulière de l'équation (23); d'autre part, on voit de suite que la seconde intégrale particulière

$$x^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \left[x^{-2\mu} G\left(-\mu - k + \frac{1}{2}, -2\mu + 1, x\right)\right] = x^{-\mu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} G\left(-\mu - k + \frac{1}{2}, -2\mu + 1, x\right)$$

est tout simplement la fonction $M_{k,-\mu}(x)$; résultat qui pouvait d'ailleurs être prévu *a priori*, puisque l'équation (23) ne change pas quand on remplace μ par $-\mu$.

L'intégrale générale de l'équation (23) est donc définie, lorsque μ n'est pas un multiple de $\frac{1}{2}$, par la relation symétrique

$$u(x) = A\, M_{k,\mu}(x) + B\, M_{k,-\mu}(x). \tag{25}$$

La fonction $W_{k,\mu}(x)$ *de M. Whittaker est une intégrale particulière de l'équation* (23) *définie, lorsque* μ *n'est pas un multiple de* $\frac{1}{2}$, *par la formule*

$$W_{k,\mu}(x) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \mu - k\right)} M_{k,\mu}(x) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - k\right)} M_{k,-\mu}(x). \tag{26}$$

Nous aurons l'occasion de retrouver, dans la troisième partie, les deux fonctions $M_{k,\mu}(x)$ et $W_{k,\mu}(x)$ de M. Whittaker; voici quelques-unes de leurs propriétés élémentaires :

1° Lorsque $\mu - k + \frac{1}{2}$ est égal à un entier négatif $-p$, la fonction $G\left(\mu - k + \frac{1}{2}, 2\mu + 1, x\right)$ se réduit à un polynome de degré p

$$M_{p+\mu+\frac{1}{2},\mu}(x) = x^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} G(-p, 2\mu + 1, x),$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

d'où, d'après la formule (8) :

$$(27)\qquad M_{p+\mu+\frac{1}{2},\,\mu}(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}-\mu}\,e^{\frac{x}{2}}}{(2\mu+1,p)}\,\frac{d^p}{dx^p}\left[x^{p+2\mu}e^{-x}\right];$$

2° Entre les deux fonctions $M_{k,\mu}(x)$ et $M_{-k,\mu}(-x)$ existe la relation

$$(28)\qquad M_{k,\mu}(x) = (-1)^{\mu+\frac{1}{2}}\,M_{-k,\mu}(-x),$$

qui se déduit de la formule de Kummer (7')

$$G\left(\mu-k+\frac{1}{2},\,2\mu+1,\,x\right) = e^x\,G\left(\mu+k+\frac{1}{2},\,2\mu+1,\,-x\right);$$

3° En partant de l'intégrale (7) on obtient l'expression

$$M_{k,\mu}(x) = \frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma\left(\mu-k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)}\,\frac{x^{\mu+\frac{1}{2}}}{2^{2\mu}}\int_{-1}^{+1}(1-u)^{\mu+k-\frac{1}{2}}(1+u)^{\mu-k-\frac{1}{2}}e^{\frac{x}{2}u}\,du,$$

l'intégrale étant convergente lorsque

$$-\left(\mu+\frac{1}{2}\right) < k < \mu+\frac{1}{2};$$

4° De même lorsque $\mu+\frac{1}{2} > k$, on peut représenter la fonction $W_{k,\mu}$ par l'intégrale définie suivante :

$$W_{k,\mu}(x) = \frac{x^k e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma\left(\mu-k+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{+\infty} u^{\mu-k-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{u}{x}\right)^{\mu+k-\frac{1}{2}}e^{-u}\,du;$$

5° Grâce à cette dernière formule, on peut montrer que diverses fonctions connues s'expriment au moyen de $W_{k,\mu}$; telles sont :

la fonction gamma incomplète

$$\gamma(n,x) = \int_0^x t^{n-1}e^{-t}\,dt$$

et le logarithme intégral

$$\mathrm{li.}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log t},$$

pour lesquelles on a

$$\gamma(n,x) = \Gamma(n)\,x^{\frac{n-1}{2}}\,e^{-\frac{x}{2}}\,W_{\frac{n-1}{2},\,\frac{n}{2}}(x),$$

$$\mathrm{li.}(x) = -x^{\frac{1}{2}}(-\log x)^{-\frac{1}{2}}\,W_{-\frac{1}{2},\,0}(-\log x).$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

XLV. — Les fonctions $W_{k,\mu,\nu}(x, y)$ et $W_{k,\mu_1,\ldots,\mu_n}(x_1, \ldots, x_n)$.

Pour définir des fonctions de deux variables généralisant les fonctions $M_{k,\mu}$ et $W_{k,\mu}$ de M. Whittaker, M. Pierre Humbert part de la fonction hypergéométrique confluente

$$\Psi_2(\mu+\nu-k+1, 2\mu+1, 2\nu+1, x, y) = \lim_{\varepsilon=0} F_2\left(\mu+\nu-k+1, \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, 2\mu+1, 2\nu+1, \varepsilon x, \varepsilon y\right).$$

Il pose

$$M_{k,\mu,\nu}(x, y) = x^{\mu+\frac{1}{2}} y^{\nu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{x+y}{2}} \Psi_2(\mu+\nu-k+1, 2\mu+1, 2\nu+1, x, y), \tag{29}$$

d'où

$$M_{k,\mu,\nu}(x, y) = x^{\mu+\frac{1}{2}} y^{\nu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{x+y}{2}} \sum \frac{(\mu+\nu-k+1, m+n)}{(2\mu+1, m)(2\nu+1, n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)} \tag{30}$$

ou encore, sous la forme d'une série simple dont les éléments sont des fonctions $M_{k,\mu}$:

$$M_{k,\mu,\nu}(x, y) = x^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \sum \frac{(\mu+\nu-k+1, m)}{(2\mu+1, m)(1, m)} M_{k-\mu-m-\frac{1}{2}, \nu}(y) x^m \tag{30'}$$

$$= y^{\nu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}} \sum \frac{(\mu+\nu-k+1, n)}{(2\nu+1, n)(1, n)} M_{k-\nu-n-\frac{1}{2}, \mu}(x) y^n; \tag{30''}$$

en partant de la formule (16), on obtient, pour la fonction $M_{k,\mu,\nu}$, une nouvelle expression par une série double

$$M_{k,\mu,\nu}(x, y) = (-1)^{k-\mu-\nu-1} \sum \frac{(\mu+\nu-k+1, m+n)}{(1, m)(1, n)} M_{m+\mu+\frac{1}{2}, \mu}(x) M_{n+\nu+\frac{1}{2}, \nu}(y).$$

La fonction hypergéométrique confluente $\Psi_2(\alpha, \gamma, \gamma', x, y)$ vérifiant le système

$$\Psi_2 \qquad \begin{cases} xr + (\gamma - x)p - yq - \alpha z = 0, \\ yt + (\gamma' - y)q - xp - \alpha z = 0, \end{cases}$$

on en déduit que $M_{k,\mu,\nu}(x, y)$ satisfait aux deux équations

$$\begin{cases} x^2 r - xyq + \left(-\frac{x^2}{4} - \frac{xy}{2} + kx + \frac{1}{4} - \mu^2\right) z = 0, \\ y^2 t - xyp + \left(-\frac{y^2}{4} - \frac{xy}{2} + ky + \frac{1}{4} - \nu^2\right) z = 0. \end{cases} \tag{31}$$

En outre, l'intégrale générale du système de Ψ_2 ayant pour expression, lorsque γ et γ' ne sont pas des entiers,

$$\begin{aligned} z = {} & A\Psi_2(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) \\ & + Bx^{1-\gamma}\Psi_2(\alpha+1-\gamma, 2-\gamma, \gamma', x, y) \\ & + Cy^{1-\gamma'}\Psi_2(\alpha+1-\gamma', \gamma, 2-\gamma' x, y) \\ & + Dx^{1-\gamma}y^{1-\gamma'}\Psi_2(\alpha+2-\gamma-\gamma', 2-\gamma, 2-\gamma', x, y), \end{aligned}$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

on trouve, par l'intermédiaire de la formule (29), pour l'intégrale générale du système (31), lorsque μ et ν ne sont pas des multiples de $\frac{1}{2}$,

$$(32)\qquad u = A\,M_{k,\mu,\nu}(x, y) + B\,M_{k,-\mu,\nu}(x, y) + C\,M_{k,\mu,-\nu}(x, y) + D\,M_{k,-\mu,-\nu}(x, y).$$

Ce résultat pouvait d'ailleurs se prévoir *a priori*, puisque le système (31) ne change pas quand on y remplace μ et ν par $-\mu$ et $-\nu$.

La fonction $W_{k,\mu,\nu}(x, y)$, définie par M. Pierre Humbert, est une intégrale particulière du système (31), où les constantes A, B, C, D ont pour valeur, lorsque μ et ν ne sont pas des multiples de $\frac{1}{2}$,

$$(33)\qquad \begin{cases} A = \dfrac{\Gamma(-2\mu)\,\Gamma(-2\nu)}{\Gamma(-\mu-\nu-k)}, & C = \dfrac{\Gamma(-2\mu)\,\Gamma(2\nu)}{\Gamma(-\mu+\nu-k)}, \\ B = \dfrac{\Gamma(2\mu)\,\Gamma(-2\nu)}{\Gamma(+\mu-\nu-k)}, & D = \dfrac{\Gamma(2\mu)\,\Gamma(2\nu)}{\Gamma(+\mu+\nu-k)}. \end{cases}$$

Lorsque, dans le système (31), on remplace y par $\varepsilon^2 y$ et ν par $-\frac{1}{2}+\varepsilon$, puis que l'on fait tendre ε vers zéro, la seconde équation devient une identité et la première se confond avec l'équation (23) de M. Whittaker :

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2} + \left(-\frac{x^2}{4} + kx + \frac{1}{4} - \mu^2\right)u = 0.$$

D'autre part, on déduit de l'expression (30″) de $M_{k,\mu,\nu}$ que

$$\lim_{\varepsilon=0} M_{k,\mu,-\frac{1}{2}+\varepsilon}(x, \varepsilon^2 y) = M_{k,\mu}(x),$$

$$\lim_{\varepsilon=0} M_{k,-\mu,-\frac{1}{2}+\varepsilon}(x, \varepsilon^2 y) = M_{k,-\mu}(x),$$

$$\lim_{\varepsilon=0} M_{k,\mu,\frac{1}{2}-\varepsilon}(x, \varepsilon^2 y) = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon=0} M_{k,-\mu,\frac{1}{2}-\varepsilon}(x, \varepsilon^2 y) = 0.$$

Donc, à la limite, l'intégrale générale (32) du système (31) tend vers

$$u = A\,M_{k,\mu}(x) + B\,M_{k,-\mu}(x),$$

ce qui est bien l'intégrale générale de l'équation (23).

Notamment pour l'intégrale particulière $W_{k,\mu,\nu}$

$$\lim_{\varepsilon=0} A = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-k\right)}, \qquad \lim_{\varepsilon=0} B = \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-k\right)}.$$

D'où en se reportant à la formule (26)

$$\lim_{\varepsilon=0} W_{k,\mu,-\frac{1}{2}+\varepsilon}(x, \varepsilon^2 y) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-k\right)}M_{k,\mu}(x) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-k\right)}M_{k,-\mu}(x) = W_{k,\mu}(x);$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

par symétrie

$$\lim_{\varepsilon=0} W_{k,-\frac{1}{2}+\varepsilon,\nu}(\varepsilon^2 x, y) = W_{k,\nu}(y);$$

ce sont ces deux propriétés qui servent de définition à la fonction $W_{k,\mu,\nu}$ pour M. Pierre Humbert.

Pour passer au cas de n variables, M. Pierre Humbert [1] part de la fonction hypergéométrique F_A de M. Lauricella. Considérons la fonction confluente

$$(34)\qquad \Psi_2(\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, x_1, \ldots, x_n) = \lim_{\varepsilon=0} F_A\left(\alpha, \frac{1}{\varepsilon}, \ldots, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \varepsilon x_1, \ldots, \varepsilon x_n\right)$$
$$= \sum \frac{(\alpha, m_1 + \ldots + m_n)}{(\gamma_1, m_1)\ldots(\gamma_n, m_n)} \frac{x_1^{m_1}}{(1, m_1)} \cdots \frac{x_n^{m_n}}{(1, m_n)}.$$

Cette fonction contient comme cas particuliers, pour $n = 1$, la fonction $G(\alpha, \gamma, x)$ et, pour $n = 2$, la fonction $\Psi_2(\alpha, \gamma, \gamma', x, y)$ étudiée plus haut.

En passant à la limite dans les équations aux dérivées partielles de la fonction F_A, on voit immédiatement qu'elle vérifie le système de n équations

$$\Psi_2 \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_j \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_j^2} + [\gamma_j - x_j] \dfrac{\partial F}{\partial x_j} + \sum\limits_{(k \neq j)} x_k \dfrac{\partial F}{\partial x_k} - \alpha F = 0 \\ \qquad\qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \end{array} \right.$$

dont on obtient sans peine les 2^n intégrales particulières indépendantes

$$\begin{array}{ll} 1 & \Psi_2(\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, x_1, \ldots, x_n), \\ n & x_1^{1-\gamma_1}\Psi_2(\alpha+1-\gamma_1, 2-\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, x_1, \ldots, x_n), \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 1 & x_1^{1-\gamma_1}\ldots x_n^{1-\gamma_n}\Psi_2(\alpha-n-\gamma_1-\ldots-\gamma_n, 2-\gamma_1, \ldots, 2-\gamma_n, x_1, \ldots, x_n). \end{array}$$

Lorsque aucun des nombres $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ n'est égal à un entier, l'intégrale générale du système Ψ_2 est égale à la somme de ces intégrales multipliées chacune par une constante arbitraire.

Ceci étant, M. Pierre Humbert pose

$$(35)\qquad M_{k,\mu_1,\ldots,\mu_n}(x_1, \ldots, x_n)$$
$$= x_1^{\mu_1+\frac{1}{2}} \ldots x_n^{\mu_n+\frac{1}{2}} e^{-\frac{x_1+\ldots+x_n}{2}} \Psi_2\left(\mu_1+\ldots+\mu_n-k+\frac{n}{2}, 2\mu_1+1, \ldots, 2\mu_n+1, x_1, \ldots, x_n\right).$$

---

[1] Pierre HUMBERT, *La fonction* $W_{k,\mu_1,\ldots,\nu_n}(x_1, \ldots, x_n)$ (*Comptes rendus*, t. CLXXI, 1920, p. 428).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

En partant du système Ψ_2, on voit facilement que cette fonction vérifie les n équations

$$(36)\qquad \left\{ x_j^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2} - x_j \sum_{(r\neq j)} x_r \frac{\partial F}{\partial x_r} + \left[-\frac{x_j^2}{4} - \frac{x_j}{2} \sum_{(r\neq j)} x_r + k x_j + \frac{1}{4} - \mu_j^2 \right] F = 0 \right.$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n).$$

L'intégrale générale pourrait se déduire de celle du système Ψ_2; mais il est plus simple de remarquer que, toutes les équations demeurant invariantes quand on y change l'un des μ en $-\mu$, les 2^n fonctions déduites de $M_{k,\mu_1,\ldots,\mu_n}$ en y affectant de toutes les manières possibles les μ du signe — sont des intégrales particulières. Par conséquent, lorsque aucun des μ n'est un multiple de $\frac{1}{2}$, l'intégrale générale de (36) a pour expression

$$(37)\qquad u(x_1, \ldots, x_n) = \sum A\, M_{k,\omega_1\mu_1,\ldots,\omega_n\mu_n}(x_1, \ldots, x_n),$$

les ω devant être faits de toutes les manières possibles égaux à $+1$ et à -1.

La fonction $W_{k,\mu_1,\ldots,\mu_n}(x_1, \ldots, x_n)$ est une intégrale particulière du système (36), définie lorsque aucun des nombres μ n'est un multiple de $\frac{1}{2}$, par la relation

$$(38)\qquad W_{k,\mu_1,\ldots,\mu_n}(x_1, \ldots, x_n) = \sum \frac{\Gamma(-2\omega_1\mu_1)\ldots\Gamma(-2\omega_n\mu_n)}{\Gamma\left(1 - \frac{n}{2} - \omega_1\mu_1 - \ldots - \omega_n\mu_n - k\right)} M_{k,\omega_1\mu_1,\ldots,\omega_n\mu_n}.$$

On peut encore remarquer que $W_{k,\mu_1,\ldots,\mu_n}$ vérifie la condition

$$\lim_{\varepsilon=0} W_{k,\mu_1,-\frac{1}{2}+\varepsilon,\ldots,-\frac{1}{2}+\varepsilon}(x_1, \varepsilon^2 x_2, \ldots, \varepsilon^2 x_n) = W_{k,\mu_1}(x_1)$$

et les $(n-1)$ conditions analogues.

A la limite le système vérifié par la fonction

$$W_{k,\mu_1,-\frac{1}{2}+\varepsilon,\ldots,-\frac{1}{2}+\varepsilon}(x_1, \varepsilon^2 x_2, \ldots, \varepsilon^2 x_n)$$

se réduit à une équation unique, qui est celle de M. Whittaker.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

CHAPITRE IX.

LES FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES D'ORDRE SUPÉRIEUR A DEUX VARIABLES.

XLVI. — Les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur a une variable.

La fonction hypergéométrique de Gauss a été généralisée, en restant dans le domaine d'une seule variable, à deux points de vue différents.

Le premier point de vue, envisagé par Pochhammer [1], consiste à *généraliser l'équation différentielle du second ordre*

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0$$

possédant les trois points singuliers réguliers 0, 1, ∞ *en considérant l'équation d'ordre k*

$$(1)\qquad \begin{aligned} &f(x)\frac{d^ky}{dx^k}-\left[\frac{\lambda-k}{1}f'(x)+\varphi(x)\right]\frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}\\ &+\frac{\lambda-k+1}{1}\left[\frac{\lambda-k}{2}f''(x)+\varphi'(x)\right]\frac{d^{k-2}y}{dx^{k-2}}+\ldots\\ &-(-1)^k\frac{(\lambda-1)\ldots(\lambda-k+1)}{1.2\ldots(k-1)}\left[\frac{\lambda-k}{k}f^{(k)}(x)+\varphi^{(k-1)}(x)\right]y=0,\end{aligned}$$

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k)\qquad\text{(polynome de degré } k\text{)},$$

$$\varphi(x)=f(x)\left[\frac{b_1}{x-a_1}+\frac{b_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{b_k}{x-a_k}\right]\qquad\text{(polynome de degré } k-1\text{)}$$

possédant les $k+1$ *points singuliers réguliers* [2] $a_1, a_2, \ldots, a_k, \infty$ *et se réduisant à l'équation de Gauss pour*

$$k=2,\qquad a_1=0,\qquad a_2=1.$$
$$b_1=\beta+1-\gamma,\qquad b_2=\gamma-\alpha,\qquad \lambda=1-\beta.$$

De même que l'équation de Gauss admet comme solution la fonction (9-I)

$$y(x)=\int_g^h u^{\beta-\gamma}(u-1)^{\gamma-\alpha-1}(u-x)^{-\beta}\,du,$$

---

[1] Pochhammer, *Ueber hypergeometrischen Funktionen höheren Ordnungen* (*Jour. reine angew. Math.*, t. LXXI, 1870, p. 216). — Antérieurement cette équation avait déjà été considérée par Tissot [*Jour. de Math.* (Liouville), 1re série, t. XVII, 1852, p. 177], et par Hermite (*Cours de l'Ecole Polytechn.*, feuilles de 1868-1869) qui est revenu sur ce sujet dans *Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite de Paris à M. L. Fuchs de Göttingue* (*J. reine angew. Math.*, t. LXXIX, 1875, p. 324). Voir, plus haut, les paragraphes XIX et XXIV.

[2] On suppose, bien entendu, les k quantités $a_1, \ldots, a_k$ distinctes et distinctes de ∞.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

où g et h désignent deux des quatre quantités $0, 1, \infty, x$, il est aisé de montrer, par un calcul analogue à celui du paragraphe XIX, que *l'équation* (1) *admet comme solution la fonction*

$$(2) \qquad y(x) = \int_g^h (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\dots(u-a_k)^{b_k-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du,$$

g et h désignant deux des quantités $a_1, a_2, \dots, a_k, \infty, x$.

Pochhammer appelle la fonction (2) une *fonction hypergéométrique d'ordre supérieur;* dans son Mémoire, il a établi quelques-unes des propriétés fondamentales de ces fonctions.

Le second point de vue a été envisagé par Clausen [1], Mellin [2], Pincherle [3], Goursat [4]. Dans la série de Gauss

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_0^{+\infty} a_n x^n, \qquad a_n = \frac{(\alpha, n)(\beta, n)}{(\gamma, n)(1, n)}$$

le rapport de deux coefficients consécutifs

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\gamma+n)(1+n)}$$

est une fonction rationnelle de l'indice n, le numérateur et le dénominateur étant du second degré en n.

Pour généraliser la série de Gauss, on peut donc considérer la série

$$(3) \qquad F(x) = \sum_0^{+\infty} a_n x^n,$$

où le rapport de deux coefficients consécutifs est une fonction rationnelle quelconque de n :

$$(4) \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{P(n)}{R(n)} \qquad (n \geq 0),$$

$P(n)$ et $R(n)$ désignant deux polynomes en n.

Nous supposerons ces deux polynomes sans facteurs communs; en outre, pour que le rayon

---

(1) CLAUSEN, *Jour. reine angew. Math.*, t. III, p. 89.

(2) Hj. MELLIN, *Om definita integraler hvilka för obegränsat växande värden af vissa heltaliga parametrar harfva till gränser Hypergeometriska funktioner af sarokilda ordningar* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicae* t. XX). — *Ueber die fundamentale Wichtigkeit des Satzes von Cauchy für die Theorien der Gamma- und der hypergeometrischen Funktionen* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicae*, t. XXI). — *Ueber gewisse durch bestimmte Integrale vermittelte Beziehungen zwischen linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicae*, t. XXI). — *Ueber hypergeometrischen Reihen höherer Ordnungen* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicae*, t. XXIII). — *Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen erster Ordnung* (*Acta mathematica*, t. XV). — *Ueber die integration simultaner linearer differentialgleichungen durch bestimmte Integrale* (*Acta mathematica*, t. XXII).

(3) S. PINCHERLE, *Giornale di Matematiche*, t. XXXII, 1894-1895.

(4) E. GOURSAT, *Sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur* (*Ann. Ec. Normale*, t. XII, 1883, p. 261 et 395.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

de convergence de la série soit différent de zéro, il faut que le degré de $P(n)$ soit inférieur ou au plus égal à celui de $R(n)$; enfin pour qu'aucun des coefficients a_n ne soit infini, il faut que l'équation

$$R(n) = 0$$

n'admette aucune racine entière et positive.

En dehors de ces restrictions les polynomes P et R peuvent être choisis arbitrairement.

Les coefficients a_n se déterminent de proche en proche à partir de a_0 par la formule de récurrence (4) et l'on obtient ainsi

$$F(x) = a_0 \left[1 + \sum_1^{+\infty} \frac{P(0)\,P(1)\ldots P(n-1)}{R(0)\,R(1)\ldots R(n-1)} x^n \right].$$

Nous allons montrer que la connaissance des polynomes $P(n)$ *et* $R(n)$ *suffit pour former une équation différentielle linéaire vérifiée par la fonction*

$$y = F(x).$$

Désignons par $\omega + 1$ le degré du polynome $R(n)$, celui de $P(n)$ devant être inférieur ou au plus égal à $\omega + 1$. On peut évidemment mettre ces deux polynomes sous la forme suivante :

$$(5) \qquad P(n) = \lambda_0 + \lambda_1 n + \lambda_2 n(n-1) + \ldots + \lambda_{\omega+1} n(n-1)\ldots(n-\omega),$$

$$(5') \qquad R(n-1) = \rho_0 + \rho_1 n + \rho_2 n(n-1) + \ldots + \rho_{\omega+1} n(n-1)\ldots(n-\omega).$$

Les coefficients λ se déterminent par les équations

$$\begin{aligned} P(0) &= \lambda_0, \\ P(1) &= \lambda_0 + \lambda_1, \\ P(2) &= \lambda_0 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= P(0), \\ 1.\lambda_1 &= P(1) - P(0), \\ 1.2.\lambda_2 &= P(2) - 2P(1) + P(0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$(1, j)\lambda_j = \sum_{r=0}^{r=j} \frac{(-j, r)}{(1, r)} P(j-r).$$

De même

$$\begin{aligned} \rho_0 &= R(-1), \\ 1.\rho_1 &= R(0) - R(-1), \\ 1.2.\rho_2 &= R(1) - 2R(0) + R(-1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$(1, j)\rho_j = \sum_{r=0}^{r=j} \frac{(-j, r)}{(1, r)} R(j-1-r).$$

Bien entendu si $P(n)$ est de degré inférieur à $\omega + 1$, les derniers coefficients $\lambda_{\omega+1}, \lambda_\omega, \ldots$ seront identiquement nuls.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Ceci posé, des formules (5) et (5′), on déduit les identités

$$x^n \mathrm{P}(n) = \lambda_0(x^n) + \lambda_1 x \frac{d}{dx}(x^n) + \ldots + \lambda_{\omega+1} x^{\omega+1} \frac{d^{\omega+1}}{dx^{\omega+1}}(x^n),$$

$$x^n \mathrm{R}(n-1) = \rho_0(x^n) + \rho_1 x \frac{d}{dx}(x^n) + \ldots + \rho_{\omega+1} x^{\omega+1} \frac{d^{\omega+1}}{dx^{\omega+1}}(x^n);$$

d'où

$$x^{n+1}[a_{n+1}\mathrm{R}(n) - a_n \mathrm{P}(n)] \equiv \rho_0(a_{n+1}x^{n+1}) + \rho_1 x \frac{d}{dx}(a_{n+1}x^{n+1}) + \ldots + \rho_{\omega+1} x^{\omega+1} \frac{d^{\omega+1}}{dx^{\omega+1}}(a_{n+1}x^{n+1})$$
$$- x\left[\lambda_0(a_n x^n) + \lambda_1 x \frac{d}{dx}(a_n x^n) + \ldots + \lambda_{\omega+1} x^{\omega+1} \frac{d^{\omega+1}}{dx^{\omega+1}}(a_n x^n)\right].$$

Or, en vertu de la relation (4), le premier membre de cette identité est nul; en ajoutant membre à membre toutes les identités obtenues en donnant à n successivement les valeurs 0, 1, 2, ..., et en remarquant que

$$\sum_0^{+\infty} a_{n+1}x^{n+1} = y - a_0, \qquad \sum_0^{+\infty} a_n x^n = y,$$

nous obtenons la nouvelle identité

$$0 = \rho_0(y - a_0) + \rho_1 x \frac{d}{dx}(y - a_0) + \ldots + \rho_{\omega+1} x^{\omega+1} \frac{d^{\omega+1}}{dx^{\omega+1}}(y - a_0)$$
$$- x\left[\lambda_0 y + \lambda_1 x \frac{dy}{dx} + \ldots + \lambda_{\omega+1} x^{\omega+1} \frac{d^{\omega+1} y}{dx^{\omega+1}}\right]$$

ou

$$(\rho_{\omega+1} - \lambda_{\omega+1} x) x^{\omega+1} \frac{d^{\omega+1} y}{dx^{\omega+1}} + \ldots + (\rho_1 - \lambda_1 x) x \frac{dy}{dx} + (\rho_0 - \lambda_0 x) y = \rho_0 a_0.$$

Dans le cas général ρ_0 *n'est pas nul;* pour faire disparaître le coefficient a_0, il suffit de dériver par rapport à x. Nous obtenons ainsi l'équation linéaire d'ordre $\omega + 2$, vérifiée par la fonction $y(x)$

$$(6) \qquad \frac{d}{dx}\left[(\rho_{\omega+1} - \lambda_{\omega+1} x) x^{\omega+1} \frac{d^{\omega+1} y}{dx^{\omega+1}} + \ldots + (\rho_1 - \lambda_1 x) x \frac{dy}{dx} + (\rho_0 - \lambda_0 x) y\right] = 0.$$

Le cas particulier où $\rho_0 = 0$, qui correspond à $\mathrm{R}(-1) = 0$ [*le polynome* $\mathrm{R}(n)$ *contient* $n + 1$ *en facteur*], conduit à l'équation d'ordre $\omega + 1$ seulement

$$(7) \qquad (\rho_{\omega+1} - \lambda_{\omega+1} x) x^{\omega} \frac{d^{\omega+1} y}{dx^{\omega+1}} + \ldots + (\rho_1 - \lambda_1 x) \frac{dy}{dx} - \lambda_0 y = 0.$$

Le cas général peut d'ailleurs se déduire de ce cas particulier, en remarquant que l'on a toujours le droit d'écrire

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\mathrm{P}(n)}{\mathrm{R}(n)} = \frac{(n+1)\mathrm{P}(n)}{(n+1)\mathrm{R}(n)} = \frac{\mathrm{P}'(n)}{\mathrm{R}'(n)},$$

le nouveau polynome $\mathrm{R}'(n)$ contient ainsi $(n + 1)$ en facteur.

En mettant en évidence les racines des polynomes $\mathrm{P}(n)$ et $\mathrm{R}(n)$, nous écrirons

$$(8) \qquad \mathrm{P}(n) = (\alpha_1 + n)(\alpha_2 + n)\ldots(\alpha_\mu + n)$$
$$(8') \qquad \mathrm{R}(n) = (\beta_1 + n)(\beta_2 + n)\ldots(\beta_\omega + n)(1 + n) \qquad (\mu = \omega + 1).$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Nous supposons ainsi qu'une des racines de $R(n)$ est $n = -1$, ce qui simplifie plusieurs calculs et ne diminue pas, comme nous venons de le montrer, la généralité; comme

$$a_n = a_0 \frac{P(0)P(1)\ldots P(n-1)}{R(0)R(1)\ldots R(n-1)} = a_0 \frac{(\alpha_1, n)\ldots(\alpha_\mu, n)}{(\beta_1, n)\ldots(\beta_\omega, n)(1, n)},$$

nous poserons en faisant $a_0 = 1$

$$(9) \qquad F\left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu \\ \beta_1, \ldots, \beta_\omega\end{matrix}, x\right) = \sum_0^{+\infty} \frac{(\alpha_1, n)\ldots(\alpha_\mu, n)}{(\beta_1, n)\ldots(\beta_\omega, n)(1, n)} x^n.$$

Lorsque $\mu < \omega + 1$, cette série converge dans tout le plan de la variable x; si $\mu = \omega + 1$, elle ne converge qu'à l'intérieur du cercle $|x| = 1$.

Nous dirons que la fonction — définie par cette série à l'intérieur de son cercle de convergence (qui comprend tout le plan pour $\mu < \omega + 1$) et par son prolongement analytique au dehors, — est une fonction hypergéométrique d'ordre ω [1].

Une fonction d'ordre ω pour laquelle $\mu = \omega + 1$ est une *fonction complète;* d'une manière générale nous appellerons la différence

$$\theta = \omega + 1 - \mu,$$

la *classe* de la fonction. Pour un ordre ω donné il y a des fonctions de toute classe depuis $\theta = 0$ (fonction complète) jusqu'à $\theta = \omega + 1$.

Par exemple pour l'ordre $\omega = 0$, on a :

la fonction complète

$$F\left(\begin{matrix}\alpha \\ \cdot\end{matrix}, x\right) = \sum \frac{(\alpha, n)}{(1, n)} x^n = (1 - x)^{-\alpha},$$

la fonction de classe 1

$$F\left(\begin{matrix}\cdot \\ \cdot\end{matrix}, x\right) = \sum \frac{1}{(1, n)} x^n = e^x.$$

De même pour l'ordre $\omega = 1$, on a :
comme fonction complète, la fonction de Gauss

$$F\left(\begin{matrix}\alpha, \beta \\ \gamma\end{matrix}, x\right) = F(\alpha, \beta, \gamma, x);$$

comme fonction de classe 1, la fonction de Kummer

$$F\left(\begin{matrix}\alpha \\ \gamma\end{matrix}, x\right) = G(\alpha, \gamma, x);$$

comme fonction de classe 2, la fonction de Bessel

$$F\left(\begin{matrix}\cdot \\ \gamma\end{matrix}, x\right) = J(\gamma, x).$$

---

[1] On suppose naturellement que tous les éléments α sont distincts des éléments β, sans quoi l'ordre ne serait qu'apparemment égal à ω, la fonction se ramenant par suppression des éléments égaux à une fonction d'ordre inférieur à ω.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Toute fonction d'ordre ω et de classe θ peut se déduire par confluence d'une fonction complète d'ordre ω, de la même manière que les fonctions de Kummer et de Bessel se déduisent de celle de Gauss (3, 9-XL).

Soit, en effet la fonction

$$F\left(\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu \\ \beta_1, \ldots, \beta_\omega\end{matrix}, x\right) \qquad (\theta = \omega + 1 - \mu \geq 0).$$

Considérons la fonction complète

$$F\left(\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu, \frac{1}{\varepsilon}, \ldots, \frac{1}{\varepsilon} \\ \beta_1, \ldots, \beta_\omega\end{matrix}, \varepsilon^\theta x\right)$$

où les θ derniers éléments α sont égaux à $\frac{1}{\varepsilon}$; en s'appuyant sur la formule évidente

$$\lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{1}{\varepsilon}, n\right)^\theta \varepsilon^{n\theta} = 1,$$

il est clair que l'on a

$$\lim_{\varepsilon=0} F\left(\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu, \frac{1}{\varepsilon}, \ldots, \frac{1}{\varepsilon} \\ \beta_1, \ldots, \beta_\omega\end{matrix}, \varepsilon^\theta x\right) = F\left(\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu \\ \beta_1, \ldots, \beta_\omega\end{matrix}, x\right). \tag{10}$$

Cette proposition est intéressante parce qu'elle permet de déduire toutes les propriétés d'une fonction de classe θ par passage à la limite en partant d'une fonction complète.

La fonction complète d'ordre 2

$$F\left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \\ \beta_1, \beta_2\end{matrix}, x\right) = \sum_0^\infty \frac{(\alpha_1, n)(\alpha_2, n)(\alpha_3, n)}{(\beta_1, n)(\beta_2, n)(1, n)} x^n$$

a été spécialement étudiée par Clausen; d'après la théorie générale, elle doit vérifier une équation du troisième ordre; nous allons la former :

$$\begin{aligned}
P(n) &= (\alpha_1 + n)(\alpha_2 + n)(\alpha_3 + n) \\
&= \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1)n + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)n^2 + n^3 \\
&= \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + (1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1)n \\
&\qquad + (3 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)n(n-1) + n(n-1)(n-2), \\
R(n-1) &= (\beta_1 - 1 + n)(\beta_2 - 1 + n)n \\
&= \beta_1\beta_2 n + (1 - \beta_1 + \beta_2)n(n-1) + n(n-1)(n-2).
\end{aligned}$$

Les coefficients λ et ρ étant ainsi déterminés, la formule (7) (puisque $\rho_0 = 0$) donne l'équation du troisième ordre vérifiée par la fonction de Clausen

$$\begin{aligned}
x^2(1-x)\frac{d^3y}{dx^3} &+ [1 + \beta_1 + \beta_2 - (3 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x]x\frac{d^2y}{dx^2} \\
&+ [\beta_1\beta_2 - (1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 y = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Dans cette équation posons $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{\varepsilon}$ et remplaçons x par $\varepsilon^3 x$; en faisant tendre ε vers zéro, nous obtenons

$$(12) \qquad x^2 \frac{d^3 y}{dx^3} - (1 + \beta_1 + \beta_2) x \frac{d^2 y}{dx^2} + \beta_1 \beta_2 \frac{dy}{dx} - y = 0;$$

c'est précisément l'équation vérifiée par la fonction d'ordre 2 et de classe 3 se déduisant par confluence de la fonction de Clausen

$$F\left(\begin{matrix} \cdot \\ \beta_1, \beta_2 \end{matrix}, x\right) = \lim_{\varepsilon = 0} F\left(\begin{matrix} \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \\ \beta_1, \beta_2 \end{matrix}, \varepsilon^3 x\right) = \sum_0^{+\infty} \frac{(\beta_1, n)(\beta_2, n)}{(1, n)} x^n.$$

L'équation de Clausen (11) admet comme intégrale générale dans le domaine du point $x = 0$ la fonction

$$\begin{aligned} y = {} & A F\left(\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \\ \beta_1, \beta_2, \end{matrix}, x\right) \\ & + B x^{1-\beta_1} F\left(\begin{matrix} \alpha_1 + 1 - \beta_1, \alpha_2 + 1 - \beta_1, \alpha_3 + 1 - \beta_1 \\ 2 - \beta_1, \beta_2 + 1 - \beta_1 \end{matrix}, x\right) \\ & + C x^{1-\beta_2} F\left(\begin{matrix} \alpha_1 + 1 - \beta_2, \alpha_2 + 1 - \beta_2, \alpha_3 + 1 - \beta_2 \\ \beta_1 + 1 - \beta_2, 2 - \beta_2 \end{matrix}, x\right). \end{aligned}$$

Par confluence, on en déduit pour l'intégrale générale de l'équation (12)

$$y = A F\left(\begin{matrix} \cdot \\ \beta_1, \beta_2 \end{matrix}, x\right) + B x^{1-\beta_1} F\left(\begin{matrix} \cdot \\ 2 - \beta_1, \beta_2 + 1 - \beta_1 \end{matrix}, x\right) + C x^{1-\beta_2} F\left(\begin{matrix} \cdot \\ \beta_1 + 1 - \beta_2, 2 - \beta_2 \end{matrix}, x\right).$$

Pour compléter ce résumé, remarquons que la série (9), qui converge dans tout le plan pour une fonction incomplète, ne définit une fonction complète qu'à l'intérieur du cercle $|x| = 1$. Mais on peut donner des expressions analytiques qui représentent une telle fonction dans tout son domaine d'existence.

C'est ainsi qu'en généralisant l'expression (3-I) de la fonction de Gauss, on représente une fonction complète d'ordre ω par l'intégrale ω-uple :

$$(13) \quad F\left(\begin{matrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_{\omega+1} \\ \beta_1, \ldots, \beta_\omega \end{matrix}, x\right)$$
$$= C \int_0^1 \ldots \int_0^1 u_1^{\alpha_1 - 1}(1 - u_1)^{\beta_1 - \alpha_1 - 1} \ldots u_\omega^{\alpha_\omega - 1}(1 - u_\omega)^{\beta_\omega - \alpha_\omega - 1}(1 - u_1 \ldots u_\omega x)^{-\alpha_{\omega+1}} du_1 \ldots du_\omega;$$

$$C = \frac{\Gamma(\beta_1) \ldots \Gamma(\beta_\omega)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\beta_1 - \alpha_1) \ldots \Gamma(\alpha_\omega)\Gamma(\beta_\omega - \alpha_\omega)}.$$

Cette fonction est uniforme dans tout le plan une fois qu'on y a tracé comme coupure le segment $(1, \infty)$ de l'axe réel.

La formule de Barnes (24-X) se généralise aussi à une fonction complète d'ordre ω

$$(14) \quad \frac{\Gamma(\alpha_1) \ldots \Gamma(\alpha_{\omega+1})}{\Gamma(\beta_1) \ldots \Gamma(\beta_\omega)} F\left(\begin{matrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_{\omega+1} \\ \beta_1, \ldots, \beta_\omega \end{matrix}, x\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\Gamma(\alpha_1 + s) \ldots \Gamma(\alpha_{\omega+1} + s)}{\Gamma(\beta_1 + s) \ldots \Gamma(\beta_\omega + s)} \Gamma(-s)(-x)^s ds.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

le chemin d'intégration se composant de l'axe des quantités purement imaginaires depuis $-i\infty$ jusqu'à $+i\infty$ et de lacets combinés de manière à laisser à sa gauche les pôles de $\Gamma(\alpha_1+s), \ldots, \Gamma(\alpha_{\omega+1}+s)$ et à sa droite ceux de $\Gamma(-s)$.

XLVII. Les fonctions hypergéométriques les plus générales a deux variables.

Les deux points de vue, qui permettent de passer de la fonction de Gauss à ses généralisations dans le domaine d'une variable, sont susceptibles d'être employés pour obtenir la généralisation des quatre fonctions de P. Appell.

Le premier point de vue, analogue à celui de Pochhammer, consisterait à considérer des fonctions telles que

$$z(x, y) = \int_g^h (u-a_1)^{b_1-1} \ldots (u-a_k)^{b_k-1} (u-x)^{\lambda-1} (u-y)^{\mu-1}\, du, \tag{15}$$

g et h désignant deux des quantités $a_1, \ldots, a_k, \infty, x, y$.

Cette expression contient comme cas particulier l'expression (20-XV) de la fonction F_1 : ($k=2$)

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad b_1 = \beta+\beta'+1-\gamma, \quad b_2 = \gamma-\alpha, \quad \lambda = 1-\beta, \quad \mu = 1-\beta'.$$

Par une méthode semblable à celle du paragraphe XV, il serait aisé de former deux équations linéaires aux dérivées partielles d'ordre k vérifiées par la fonction $z(x, y)$.

Ce point de vue n'a pas, à notre connaissance, fait l'objet d'une étude systématique.

Signalons cependant que M. René Garnier, au cours de ses recherches sur les équations différentielles à points critiques fixes [1], a été amené à considérer des systèmes d'équations aux dérivées partielles de ce type, dont il a indiqué plusieurs propriétés, en connexion avec l'étude qu'il poursuivait.

Le second point de vue a été envisagé par MM. Hj. Mellin [2], R. Birkeland [3], Kampé de Fériet, qui considèrent comme *la fonction hypergéométrique la plus générale à deux variables* toute fonction définie par une série double

$$F(x, y) = \sum_0^{+\infty} a_{m,n} x^m y^n \tag{16}$$

dont les coefficients vérifient les conditions

$$\frac{a_{m+1,n}}{a_{m,n}} = \frac{P(m, n)}{R(m, n)}, \qquad \frac{a_{m,n+1}}{a_{m,n}} = \frac{Q(m, n)}{S(m, n)}; \tag{17}$$

---

(1) R. Garnier. *Sur des équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale générale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes* (Thèse, p. 105-126).

(2) Hj. Mellin, *Zur Theorie zweier allgemeinen Klassen Bestimmter Integrale* (*Acta Soc. Scientiarum Fennicae*, t. XXII). — *Ueber die Integration partieller Linearer Differentialgleichungen durch Vielfache Integrale* (*Acta mathematica*, t. XXII, p. 19-40). — *Comptes rendus*, t. CLXXII, 1921, p. 658.

(3) R. Birkeland, *Comptes rendus*, t. CLXXI, 1920, p. 1370; t. CLXXII, 1921, p. 309 et 1155.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

P, Q, R, S désignant des polynomes soumis seulement aux restrictions suivantes :

1° Les degrés de P et Q sont au plus égaux respectivement à ceux de R et S, pour que la série puisse converger en dehors des valeurs $x = y = 0$;

2° R et S ne s'annulent pour aucune valeur des entiers positifs m et n, afin qu'aucun des coefficients $a_{m,n}$ ne soit infini.

3° Les deux relations (17) doivent être compatibles; or on a :

d'une part,

$$\frac{a_{m+1,n+1}}{a_{m,n}} = \frac{a_{m+1,n+1}}{a_{m,n+1}} \frac{a_{m,n+1}}{a_{m,n}} = \frac{P(m, n+1)}{R(m, n+1)} \frac{Q(m, n)}{S(m, n)};$$

d'autre part,

$$\frac{a_{m+1,n+1}}{a_{m,n}} = \frac{a_{m+1,n+1}}{a_{m+1,n}} \frac{a_{m+1,n}}{a_{m,n}} = \frac{Q(m+1, n)}{S(m+1, n)} \frac{P(m, n)}{R(m, n)}.$$

D'où la condition de compatibilité

$$\frac{P(m, n+1)}{R(m, n+1)} \frac{Q(m, n)}{S(m, n)} - \frac{Q(m+1, n)}{S(m+1, n)} \frac{P(m, n)}{R(m, n)} = 0, \tag{18}$$

qui doit être vérifiée quels que soient m et n.

Ces trois restrictions étant satisfaites, les polynomes P, Q, R, S peuvent être choisis arbitrairement.

La propriété fondamentale [1] *des fonctions hypergéométriques générales c'est que la connaissance des polynomes* P, Q, R, S *suffit pour former un système de deux équations linéaires aux dérivées partielles vérifiées par cette fonction.*

En effet, le polynome $P(m, n)$ étant donné écrivons-le sous la forme

$$P(m, n) = \sum \alpha_{j,k} m(m-1)\ldots(m-j+1)n(n-1)\ldots(n-k+1). \tag{19}$$

Les coefficients $\alpha_{j,k}$ se déterminent de proche en proche

$$P(0, 0) = \alpha_{0,0};$$
$$P(1, 0) = \alpha_{0,0} + \alpha_{1,0}, \qquad P(0, 1) = \alpha_{0,0} + \alpha_{0,1}, \qquad \ldots,$$

d'où

$$\alpha_{0,0} = P(0, 0), \qquad \alpha_{1,0} = P(1, 0) - P(0, 0), \qquad \alpha_{0,1} = P(0, 1) - P(0, 0), \qquad \ldots,$$

et d'une manière générale

$$(1, j)(1, k)\alpha_{j,k} = \sum_{r=0,\, s=0}^{r=j,\, s=k} \frac{(-j, r)(-k, s)}{(1, r)(1, s)} P(j-r, k-s).$$

---

[1] J. Kampé de Fériet, *Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions hypergéométriques les plus générales* (*Comptes rendus*, t. CLXXII, 1921, p. 1634).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Bien entendu, le développement (19) s'arrête de lui-même aux termes pour lesquels $j+k$ est égal au degré du polynome $P(m, n)$.

Nous écrirons de même

$$(19') \qquad Q(m, n) = \sum \beta_{j,k}\, m(m-1)\ldots(m-j+1)\, n(n-1)\ldots(n-k+1),$$

$$(19'') \qquad R(m-1, n) = \sum \rho_{j,k}\, m(m-1)\ldots(m-j+1)\, n(n-1)\ldots(n-k+1),$$

$$(19''') \qquad S(m, n-1) = \sum \sigma_{j,k}\, m(m-1)\ldots(m-j+1)\, n(n-1)\ldots(n-k+1),$$

les coefficients β, ρ, σ se déterminant d'une manière analogue aux α.

Ceci posé, on a évidemment les identités

$$x^m y^n P(m, n) = \sum \alpha_{j,k} x^j y^k \frac{\partial^{j+k}}{\partial x^j \partial y^k}(x^m y^n),$$

$$x^m y^n R(m-1, n) = \sum \rho_{j,k} x^j y^k \frac{\partial^{j+k}}{\partial x^j \partial y^k}(x^m y^n);$$

d'où

$$x^{m+1} y^n [a_{m+1,n} R(m, n) - a_{m,n} P(m, n)]$$
$$= \sum \left[\rho_{j,k} \frac{\partial^{j+k}}{\partial x^j \partial y^k}(a_{m+1,n} x^{m+1} y^n) - \alpha_{j,k} x \frac{\partial^{j+k}}{\partial x^j \partial y^k}(a_{m,n} x^m y^n)\right] x^j y^k.$$

Or, en vertu de la première des relations (17), le premier membre de cette identité est nul; ajoutons toutes les identités obtenues en donnant à m et n successivement les valeurs 0, 1, 2 ...; puis remarquons que

$$\sum_0^{+\infty} a_{m,n} x^m y^n = F(x, y),$$

$$\sum_0^{+\infty} a_{m+1,n} x^{m+1} y^n = F(x, y) - (a_{0,0} + a_{0,1} y + a_{0,2} y^2 + \ldots + a_{0,n} y^n + \ldots),$$

il vient en posant

$$\frac{\partial^{j+k} F}{\partial x^j \partial y^k} = p_{j,k},$$

$$\begin{aligned}\sum (\rho_{j,k} - \alpha_{j,k} x) x^j y^k p_{j,k} = {} & \rho_{0,0}(a_{0,0} + a_{0,1} y + a_{0,2} y^2 + \ldots\ldots\ldots + a_{0,n} y^n + \ldots) \\ & + \rho_{0,1}(a_{0,1} y + 2 a_{0,2} y^2 + \ldots\ldots + n a_{0,n} y^n + \ldots) \\ & + \rho_{0,2}(2 a_{0,2} y^2 + \ldots + n(n-1) a_{0,n} y^n + \ldots) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Dans le cas général, $\rho_{0,0}$, $\rho_{0,1}$, $\rho_{0,2}$, ... *n'étant pas nuls*, on fait disparaître les coefficients $a_{0,0}$, $a_{0,1}$, ... en dérivant cette égalité par rapport à x, ce qui conduit à une première équation vérifiée par $F(x, y)$; la seconde équation s'obtient par une marche symétrique en partant de la seconde relation (17). D'où le système cherché

$$(20) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left[\sum (\rho_{j,k} - \alpha_{j,k} x) x^j y^k p_{j,k}\right] = 0,$$

$$(20') \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left[\sum (\sigma_{j,k} - \beta_{j,k} y) x^j y^k p_{j,k}\right] = 0.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Dans le premier crochet, les termes de l'ordre le plus élevé sont ceux pour lesquels $j + k$ est égal au degré de R, puisque le degré de P est au plus égal à celui de R; donc *l'ordre de l'équation aux dérivées partielles* (20) *est égal au degré du polynome* R (m, n) *augmenté d'une unité; de même l'ordre de l'équation* (20') *est égal au degré de* S (m, n) *augmenté d'une unité.*

Dans le cas particulier où R *et* S *contiennent respectivement en facteur* $m + 1$ *et* $n + 1$, on a d'après (19'') et (19''')

$$\rho_{0,0} = \rho_{0,1} = \rho_{0,2} = \ldots = 0,$$
$$\sigma_{0,0} = \sigma_{1,0} = \sigma_{2,0} = \ldots = 0.$$

Donc les coefficients $a_{0,0}$, $a_{0,1}$, $a_{1,0}$, ... ne figurent plus dans l'équation; la dérivation destinée à les faire disparaître devient inutile et l'on obtient pour le système vérifié par F (x, y)

$$\sum (\rho_{j,k} - \alpha_{j,k} x) x^j y^k p_{j,k} = 0, \tag{21}$$

$$\sum (\sigma_{j,k} - \beta_{j,k} y) x^j y^k p_{j,k} = 0. \tag{21'}$$

Ces équations sont en outre respectivement divisibles par x et par y; l'ordre de la première est égal au degré de R, l'ordre de la seconde au degré de S.

Pour donner une première application de cette méthode générale, considérons la fonction

$$\zeta(x, y, p, q) = \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1} v^{q-1} e^{-u-v}}{1 - x e^{-u} - y e^{-v}} \, du \, dv, \tag{22}$$

p et q désignant deux entiers positifs. On trouve facilement [1]

$$\zeta(x, y, p, q) = \sum \frac{(1, m+n)}{(1, m)(1, n)} \frac{x^m}{(m+1)^p} \frac{y^n}{(n+1)^q}; \tag{23}$$

d'où

$$\frac{a_{m+1,n}}{a_{m,n}} = \frac{(m+n+1)(m+1)^p}{(m+1)(m+2)^p}, \qquad \frac{a_{m,n+1}}{a_{m,n}} = \frac{(m+n+1)(n+1)^q}{(n+1)(n+2)^q}.$$

Donc $\zeta(x, y, p, q)$ est une fonction hypergéométrique générale et l'on a

$$P(m, n) = (m+1)^p + n(m+1)^{p-1}, \qquad Q(m, n) = (n+1)^q + m(n+1)^{q-1},$$
$$R(m, n) = (m+2)^p, \qquad S(m, n) = (n+2)^q.$$

Posons

$$(m+1)^p = \sum_{s=0}^{s=p} D_p^s \, m(m-1)\ldots(m-s+1),$$

---

[1] Pour $x = 1$, $y = 0$, cette fonction se réduit à la fonction de Riemann :

$$\zeta(1, 0, p, q) = \zeta(p) = \sum \frac{1}{(m+1)^p}.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

les coefficients D_r^s sont des nombres entiers déterminés par la formule [1]

$$(1, s).D_r^s = (s+1)^r - \frac{s}{1}(s)^r + \frac{s(s-1)}{1.2}(s-1)^r - \ldots$$

Ceci étant, nous avons

$$P(m, n) = \sum_{j=0}^{j=p} D_p^j\, m(m-1)\ldots(m-j+1) + n \sum_{j=0}^{j=p-1} D_{p-1}^j\, m(m-1)\ldots(m-j+1)$$

$$R(m-1, n) = \sum_{j=0}^{j=p} D_p^j\, m(m-1)\ldots(m-j+1).$$

Ces relations fournissent la valeur des coefficients $\alpha_{j,k}$ et $\rho_{j,k}$:

$$\rho_{j,0} = D_p^j, \qquad \rho_{j,k} = 0 \quad (k > 0),$$
$$\alpha_{j,0} = D_p^j, \qquad \alpha_{j,1} = D_{p-1}^j, \qquad \alpha_{j,k} = 0 \quad (k > 1).$$

Nous pouvons donc, d'après (20), écrire la première équation vérifiée par $\zeta(x, y, p, q)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x)\left(\sum_{j=0}^{j=p} D_p^j x^j \frac{\partial^j \zeta}{\partial x^j}\right) - xy\frac{\partial}{\partial y}\left(\sum_{j=0}^{j=p-1} D_{p-1}^j x^j \frac{\partial^j \zeta}{\partial x^j}\right)\right] = 0,$$

la seconde s'en déduit par symétrie

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[(1-y)\left(\sum_{j=0}^{j=q} D_q^j y^j \frac{\partial^j \zeta}{\partial y^j}\right) - xy\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{j=0}^{j=q-1} D_{q-1}^j y^j \frac{\partial^j \zeta}{\partial y^j}\right)\right] = 0.$$

Les coefficients $a_{m,n}$ du développement d'une fonction hypergéométrique générale sont liés par un système de deux équations aux différences finies linéaires du premier ordre

$$(17) \qquad \begin{cases} R(m, n)a_{m+1,n} - P(m, n)a_{m,n} = 0, \\ S(m, n)a_{m,n+1} - Q(m, n)a_{m,n} = 0. \end{cases}$$

La méthode que nous venons d'indiquer est susceptible de s'étendre [2] *aux fonctions beaucoup plus générales, dont les coefficients $a_{m,n}$ vérifient un système de deux équations aux différences finies linéaires, mais d'ordre quelconque :*

$$(24) \qquad \sum_{r=0,\, s=0}^{r=p,\, s=q} P_{r,s}(m, n)a_{m+r,n+s} = 0,$$

$$(24') \qquad \sum_{r=0,\, s=0}^{r=p',\, s=q'} Q_{r,s}(m, n)a_{m+r,n+s} = 0,$$

---

[1] Ces entiers jouent un grand rôle dans le Calcul des différences finies; d'après M. Niels Nielsen (*Traité élémentaire des Nombres de Bernoulli*, p. 16) ils ont été introduits dans l'Analyse par Euler : *Institutiones Calculi differentialis*, p. 485.

[2] J. Kampé de Fériet, *Sur certains systèmes associés d'équations aux différences finies et d'équations aux dérivées partielles linéaires* (*Comptes rendus*, t. CLXXIII, 1921, p. 285).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

$P_{r,s}$ et $Q_{r,s}$ désignant des polynomes en m et n, au nombre de $(p+1)(q+1)$ et $(p'+1)(q'+1)$, soumis seulement aux restrictions suivantes :

1° Les degrés de $P_{r,s}$ et $Q_{r,s}$ sont au plus égaux respectivement à ceux de $P_{p,q}$ et $Q_{p',q'}$.
2° $P_{p,q}$ et $Q_{p',q'}$ ne s'annulent pour aucune valeur des entiers positifs m et n.
3° Les deux équations (24) et (24') sont compatibles.

En effet, en répétant le raisonnement fait plus haut au sujet du polynome $P(m, n)$, on voit qu'on peut mettre les polynomes donnés sous la forme

$$P_{r,s}(m-r, n-s) = \sum_{j,k} \alpha_{j,k}^{r,s}\, m(m-1)\ldots(m-j+1)\, n(n-1)\ldots(n-k+1),$$

$$Q_{r,s}(m-r, n-s) = \sum_{j,k} \beta_{j,k}^{r,s}\, m(m-1)\ldots(m-j+1)\, n(n-1)\ldots(n-k+1)$$

et l'on a les deux identités

$$x^{m+r}y^{n+s}\, P_{r,s}(m, n) = \sum_{j,k} \alpha_{j,k}^{r,s} x^j y^k \frac{\partial^{j+k}}{\partial x^j\, \partial y^k}(x^{m+r}y^{n+s}), \tag{25}$$

$$x^{m+r}y^{n+s}\, Q_{r,s}(m, n) = \sum_{j,k} \beta_{j,k}^{r,s} x^j y^k \frac{\partial^{j+k}}{\partial x^j\, \partial y^k}(x^{m+r}y^{n+s}). \tag{25'}$$

Il en résulte que la fonction $F(x, y)$ vérifie le système de deux équations aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p\, \partial y^q}\left[\sum_{j,k}\left(\sum_{r,s} \alpha_{j,k}^{r,s} x^{p-r} y^{q-s}\right) x^j y^k p_{j,k}\right] = 0, \tag{26}$$

$$\frac{\partial^{p'+q'}}{\partial x^{p'}\, \partial y^{q'}}\left[\sum_{j,k}\left(\sum_{r,s} \beta_{j,k}^{r,s} x^{p'-r} y^{q'-s}\right) x^j y^k p_{j,k}\right] = 0. \tag{26'}$$

En effet, si l'on développe en série les crochets de (26) et (26'), le coefficient de $x^{m+p}\, y^{n+q}$ dans le premier, et celui de $x^{m+p'}\, y^{n+q'}$ dans le second ($m \geq 0$, $n \geq 0$) se réduisent, d'après les identités (25) et (25'), au premier membre des équations (24) et (24') respectivement; ils sont donc identiquement nuls; quant aux termes en $x^{m+p}\, y^{n+q}$ et $x^{m+p'}\, y^{n+q'}$, pour lesquels $m < 0$ ou $n < 0$, ils disparaissent quand on dérive les crochets.

L'ordre de l'équation (26) est égal au degré de $P_{p,q}$ augmenté de $p+q$; celui de (26') au degré de $Q_{p',q'}$ augmenté de $p'+q'$.

Dans le cas particulier où les polynomes $P_{r,s}$ et $Q_{r,s}$ contiennent en facteur

$$(m+r)(m+r-1)\ldots(m+1)(n+s)(n+s-1)\ldots(n+1)$$

$$\begin{pmatrix} r = 1, 2, \ldots, p \text{ ou } p' \\ s = 1, 2, \ldots, q \text{ ou } q' \end{pmatrix};$$

on a

$$\alpha_{j,k}^{r,s} = \beta_{j,k}^{r,s} = 0 \qquad (0 \leq j < r,\ 0 \leq k < s);$$

la dérivation des crochets devient inutile et la fonction $F(x, y)$ vérifie simplement le

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

système

$$(27)\qquad \sum_{j,k}\left(\sum_{r,s}\alpha_{j,k}^{r,s}x^{p-r}y^{q-s}\right)x^jy^kp_{j,k}=0,$$

$$(27')\qquad \sum_{j,k}\left(\sum_{r,s}\beta_{j,k}^{r,s}x^{p'-r}y^{q'-s}\right)x^jy^kp_{j,k}=0.$$

En outre (27) est divisible par $x^p\,y^q$ et (27′) par $x^{p'}\,y^{q'}$.

XLVIII. — Les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur a deux variables.

Pour les fonctions d'une variable les polynomes P (n) et R (n) se décomposent toujours en facteurs du premier degré :

$$P(n)=(\alpha_1+n)\ldots(\alpha_\mu+n),$$
$$R(n)=(\beta_1+n)\ldots(\beta_\omega+n)(1+n).$$

On est donc, dans tous les cas, conduit à considérer des fonctions du type suivant :

$$F(x)=\sum_0^{+\infty}\frac{(\alpha_1,n)\ldots(\alpha_\mu,n)}{(\beta_1,n)\ldots(\beta_\omega,n)(1,n)}x^n.$$

Mais il n'en est plus de même pour les fonctions de deux variables. Les polynomes P, Q, R, S ne peuvent pas en général se décomposer en facteurs du premier degré.

Le cas exceptionnel où cette décomposition est possible conduit à considérer une classe particulière de fonctions hypergéométriques générales.

Ces fonctions, définies et étudiées par J. Kampé de Fériet sous le nom de *fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur* (1), jouissent de certaines propriétés remarquables dont nous allons faire un exposé succinct.

Supposons donc que les polynomes donnés soient de la forme suivante :

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned}
P(m,n)&=\prod_{i=1}^{i=\mu}(\alpha_i+m+n)\prod_{i=1}^{i=\nu}(\beta_i+m),\\
Q(m,n)&=\prod_{i=1}^{i=\mu}(\alpha_i+m+n)\prod_{i=1}^{i=\nu}(\beta'_i+n),\\
R(m,n)&=(m+1)\prod_{i=1}^{i=\rho}(\gamma_i+m+n)\prod_{i=1}^{i=\sigma}(\delta_i+m),\\
S(m,n)&=(n+1)\prod_{i=1}^{i=\rho}(\gamma_i+m+n)\prod_{i=1}^{i=\sigma}(\delta'_i+n).
\end{aligned}\right.$$

(1) J. Kampé de Fériet, *Les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur à deux variables* (*Comptes rendus*, t. CLXXIII, 1921, p. 401). — *Quelques propriétés des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur à deux variables* (*Comptes rendus*, t. CLXXIII, 1921, p. 489).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

La fonction hypergéométrique qui correspond à ces valeurs a pour expression (en supposant $a_{0,0} = 1$)

$$(29)\qquad F(x, y) = \sum_{m,n} \frac{\prod_{i=1}^{i=\mu}(\alpha_i, m+n) \prod_{i=1}^{i=\nu}(\beta_i, m)(\beta'_i, n)}{\prod_{i=1}^{i=\rho}(\gamma_i, m+n) \prod_{i=1}^{i=\sigma}(\delta_i, m)(\delta'_i, n)} \frac{x^m y^n}{(1, m)(1, n)}.$$

Les seules restrictions imposées sont que $\mu + \nu \leqq \rho + \sigma + 1$ (pour que la série converge en dehors du point $x = y = 0$) et qu'aucune des constantes γ, δ, δ' ne soit égale à un entier négatif.

Nous représenterons cette fonction par le symbole

$$F\left(\begin{array}{c|ccc|c} \mu & \alpha_1 & \dots & \alpha_\mu & \\ \nu & \beta_1, \beta'_1 & \dots & \beta_\nu, \beta'_\nu & x, y \\ \rho & \gamma_1 & \dots & \gamma_\rho & \\ \sigma & \delta_1, \delta'_1 & \dots & \delta_\sigma, \delta'_\sigma & \end{array}\right)$$

qui met en évidence *les entiers positifs ou nuls* μ, ν, ρ, σ que nous appellerons ses *indices caractéristiques* et les $\mu + 2\nu + \rho + 2\sigma$ constantes dont elle dépend.

L'entier

$$\omega = \rho + \sigma$$

caractérisera l'*ordre* de la fonction.

Comme on doit avoir $\mu + \nu \leqq \omega + 1$, nous dirons qu'une fonction pour laquelle

$$\mu + \nu = \omega + 1$$

est une *fonction complète* d'ordre ω.

D'une manière plus générale, la différence

$$\theta = \omega + 1 - (\mu + \nu)$$

désignera la *classe* de la fonction. Pour un ordre ω donné, il y a des fonctions de toute classe depuis $\theta = 0$ (fonction complète) jusqu'à $\theta = \omega + 1$.

Nous dirons que deux fonctions qui ont les mêmes indices caractéristiques sont du même type. *Le nombre des types différents des fonctions d'ordre ω et de classe θ est égal à*

$$(30)\qquad N_{\omega,\theta} = \omega(\omega + 3) - \theta(\omega + 1).$$

On l'obtient en cherchant le nombre des solutions acceptables du système

$$\mu + \nu = \omega + 1 - \theta, \qquad \rho + \sigma = \omega$$
$$(\mu, \nu, \rho, \sigma \text{ entiers positifs ou nuls}),$$

desquelles il faut écarter les deux combinaisons

$$\begin{array}{llll} \mu = \omega + 1 - \theta, & \nu = 0, & \rho = \omega, & \sigma = 0; \\ \mu = 0, & \nu = \omega + 1 - \theta, & \rho = 0, & \sigma = \omega \end{array}$$

qui ne conduisent pas à proprement parler à des fonctions hypergéométriques de deux variables;

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

en effet, on a

$$F\left(\begin{array}{c|ccc|}\mu & \alpha_1 & \dots & \alpha_\mu \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ \rho & \gamma_1 & \dots & \gamma_\rho \\ 0 & \dots & \dots & \dots\end{array}, x, y\right) = F\left(\begin{matrix}\alpha_1 & \dots & \alpha_\mu \\ \gamma_1 & \dots & \gamma_\rho\end{matrix}, x+y\right),$$

$$F\left(\begin{array}{c|ccc|}0 & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \nu & \beta_1, \beta'_1 & \dots & \beta_\nu, \beta'_\nu \\ 0 & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \sigma & \delta_1, \delta'_1 & \dots & \delta_\sigma, \delta'_\sigma\end{array}, x, y\right) = F\left(\begin{matrix}\beta_1 & \dots & \beta_\nu \\ \delta_1 & \dots & \delta_\sigma\end{matrix}, x\right) F\left(\begin{matrix}\beta'_1 & \dots & \beta'_\nu \\ \delta'_1 & \dots & \delta'_\sigma\end{matrix}, y\right).$$

Ces deux cas introduisent donc simplement des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur à une variable.

De la formule (30), on déduit en particulier que le nombre des fonctions complètes d'ordre ω est

$$N_{\omega,0} = \omega(\omega+3)$$

et celui des fonctions de la classe la plus élevée

$$N_{\omega,\omega+1} = \omega - 1.$$

Par conséquent on a constamment

$$\omega - 1 \leqq N_{\omega,\theta} \leqq \omega(\omega+3).$$

Par exemple, le nombre des fonctions complètes d'ordre 1 est

$$N_{1,0} = 4.$$

On aperçoit immédiatement que ces quatre fonctions s'identifient avec les fonctions de P. Appell :

$$F\left(\begin{array}{c|c|}1 & \alpha \\ 1 & \beta, \beta' \\ 1 & \gamma \\ 0 & \dots\end{array}, x, y\right) = F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y);$$

$$F\left(\begin{array}{c|c|}1 & \alpha \\ 1 & \beta, \beta' \\ 0 & \dots \\ 1 & \delta, \delta'\end{array}, x, y\right) = F_2(\alpha, \beta, \beta, \delta, \delta', x, y);$$

$$F\left(\begin{array}{c|cc|}0 & \dots\dots & \dots\dots \\ 2 & \beta_1, \beta'_1 & \beta_2, \beta'_2 \\ 1 & \gamma & \dots\dots \\ 0 & \dots\dots & \dots\dots\end{array}, x, y\right) = F_3(\beta_1, \beta'_1, \beta_2, \beta'_2, \gamma, x, y);$$

$$F\left(\begin{array}{c|c|}2 & \alpha_1, \alpha_2 \\ 0 & \dots\dots \\ 0 & \dots\dots \\ 1 & \delta, \delta'\end{array}, x, y\right) = F_4(\alpha_1, \alpha_2, \delta, \delta', x, y).$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Le Tableau suivant fournit tous *les types de fonctions d'ordre* 2 :

Classe $\theta = 0$ (fonctions complètes). $N_{2,0} = 10$.

Type.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
μ.....	3	3	2	2	2	1	1	1	0	0
ν.....	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3
ρ.....	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1
σ.....	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1

	Classe $\theta = 1$. $N_{2,1} = 7$.							Classe $\theta = 2$. $N_{2,2} = 4$.				Classe $\theta = 3$. $N_{2,3} = 1$.
Type.	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	1
μ.....	2	2	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0
ν.....	0	0	1	1	1	2	2	0	0	1	1	0
ρ.....	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1	1
σ.....	1	2	0	1	2	0	1	1	2	0	1	1

L'étude des fonctions d'ordre ω et de classe quelconque se ramène à celles des fonctions complètes du même ordre, grâce à la proposition suivante :

Étant donnée une fonction d'ordre ω et de classe θ, on peut trouver $\theta + 1$ fonctions complètes du même ordre ω dont elle se déduit par confluence.

Désignons, en effet, par μ, ν, ρ, σ les indices caractéristiques de la fonction donnée :

$$\rho + \sigma = \omega, \qquad \mu + \nu = \omega + 1 - \theta, \qquad \theta \geqq 0.$$

Soient μ' et ν' deux entiers positifs ou nuls tels que

$$\mu' + \nu' = \theta,$$

les valeurs acceptables de μ' et ν' sont au nombre de $\theta + 1$. Il est clair que les indices $\mu + \mu'$, $\nu + \nu'$, ρ, σ seront caractéristiques d'une fonction complète d'ordre ω, puisque

$$\rho + \sigma = \omega, \qquad (\mu + \mu') + (\nu + \nu') = \omega + 1.$$

Supposons que, dans cette fonction complète, les μ premières constantes α, les 2ν premières constantes β, β' et toutes les constantes γ, δ, δ' aient les mêmes valeurs que dans la fonction donnée; en outre pour celles qui restent posons

$$\alpha_i = \varepsilon^{-1} \qquad (i = \mu + 1, \ldots, \mu + \mu'),$$
$$\beta_i = \beta'_i = \varepsilon^{-1} \qquad (i = \nu + 1, \ldots, \nu + \nu'),$$

et remplaçons x et y par $\varepsilon^{\theta} x$ et $\varepsilon^{\theta} y$; puis faisons tendre ε vers zéro; la limite de la fonction complète est évidemment la fonction donnée

$$\lim_{\varepsilon=0} F\left(\begin{array}{c|cccccc|} \mu + \mu' & \alpha_1 & \ldots & \alpha_\mu & \varepsilon^{-1} & \ldots & \\ \nu + \nu' & \beta_1, \beta'_1 & \ldots & \beta_\nu, \beta'_\nu & \varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-1} & \ldots & \\ \rho & \gamma_1 & \ldots & \gamma_\rho & & & \\ \sigma & \delta_1, \delta'_1 & \ldots & \delta_\sigma, \delta'_\sigma & & & \end{array} \Bigg| \varepsilon^{\theta} x, \varepsilon^{\theta} y\right) = F\left(\begin{array}{c|ccc|} \mu & \alpha_1 & \ldots & \alpha_\mu \\ \nu & \beta_1, \beta'_1 & \ldots & \beta_\nu, \beta'_\nu \\ \rho & \gamma_1 & \ldots & \gamma_\rho \\ \sigma & \delta_1, \delta'_1 & \ldots & \delta_\sigma, \delta'_\sigma \end{array} \Bigg| x, y\right)$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

puisque l'on a :

$$\lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{1}{\varepsilon},\, m+n\right)^{\mu'}\left(\frac{1}{\varepsilon},\, m\right)^{\nu'}\left(\frac{1}{\varepsilon},\, n\right)^{\nu'}\varepsilon^{m+n\theta}=1.$$

D'une manière analogue, on établit la proposition plus générale :

Étant donnée une fonction d'ordre ω et de classe θ, il existe $\theta-\theta'+1$ fonctions de même ordre θ et de classe θ' inférieure à θ dont on peut la déduire par confluence.

Ces généralités étant posées, voici quelques propriétés élémentaires des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur :

1° Une fonction hypergéométrique se réduit à un polynome en x et y, lorsque l'un des éléments α est égal à un entier négatif ou lorsque l'un des éléments β et l'un des éléments β' sont égaux à des entiers négatifs :

2° La dérivée partielle

$$\frac{\partial^{p+q}\mathrm{F}}{\partial x^p\,\partial y^q}\left(\begin{array}{c|ccc|}\mu & \alpha_1 & \dots & \alpha_\mu \\ \nu & \beta_1,\ \beta'_1 & \dots & \beta_\nu,\ \beta'_\nu \\ \rho & \gamma_1 & \dots & \gamma_\rho \\ \sigma & \delta_1,\ \delta'_1 & \dots & \delta_\sigma,\ \delta'_\sigma\end{array}\Bigg|\, x,\, y\right)$$

a pour expression

$$\frac{\prod_{i=1}^{i=\mu}(\alpha_i,\, p+q)\prod_{i=1}^{i=\nu}(\beta_i,\, p)(\beta'_i,\, q)}{\prod_{i=1}^{i=\rho}(\gamma_i,\, p+q)\prod_{i=1}^{i=\sigma}(\delta_i,\, p)(\delta'_i,\, q)}\,\mathrm{F}\left(\begin{array}{c|ccc|}\mu & \alpha_1+p+q & \dots & \alpha_\mu+p+q \\ \nu & \beta_1+p,\ \beta'_1+q & \dots & \beta_\nu+p,\ \beta'_\nu+q \\ \rho & \gamma_1+p+q & \dots & \gamma_\rho+p+q \\ \sigma & \delta_1+p,\ \delta'_1+q & \dots & \delta_\sigma+p,\ \delta'_\sigma+q\end{array}\Bigg|\, x,\, y\right).$$

3° Une fonction hypergéométrique d'ordre ω et de classe θ se met sous la forme d'une série simple ordonnée selon les puissances de x (ou de y) dont les éléments sont des fonctions hypergéométriques de y (ou de x) précisément d'ordre ω et de classe θ.

En effet, en ordonnant la série (29) selon les puissances de x, on voit immédiatement que F est égale à la série simple

$$(31)\qquad \sum_{m=0}^{m=+\infty}\frac{\prod_{i=1}^{i=\mu}(\alpha_i,\, m)\prod_{i=1}^{i=\nu}(\beta_i,\, m)}{\prod_{i=1}^{i=\rho}(\gamma_i,\, m)\prod_{i=1}^{i=\sigma}(\delta_i,\, m)}\,\mathrm{F}\left(\begin{array}{cccccc}\alpha_1+m & \dots & \alpha_\mu+m & \beta'_1 & \dots & \beta'_\nu \\ \gamma_1+m & \dots & \gamma_\rho+m & \delta'_1 & \dots & \delta'_\sigma\end{array}\Bigg|\, y\right)\frac{x^m}{(1,\, m)}.$$

D'après les définitions du paragraphe XLVI, les fonctions hypergéométriques de y, qui figurent dans cette série, ont pour ordre $\rho+\sigma$ et pour classe $\rho+\sigma+1-(\mu+\nu)$, c'est-à-dire précisément l'ordre ω et la classe θ de la fonction hypergéométrique de deux variables.

Par exemple les séries simples qui représentent les fonctions complètes d'ordre 2 ont comme éléments des fonctions de Clausen, de même que celles qui représentent les fonctions de P. Appell ont comme éléments des fonctions de Gauss (15 à 18-II).

4° Les fonctions hypergéométriques sont représentables par des intégrales multiples qui

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

permettent de les définir en dehors du domaine de convergence de la série double (29); voici quelques exemples de ces expressions.

La fonction complète d'ordre ω

$$F\left(\begin{array}{c|ccc|}\omega & \alpha_1 & \dots & \alpha_\omega \\ 1 & \beta, \beta' & & \\ \omega & \gamma_1 & \dots & \gamma_\omega \\ 0 & \dots & & \end{array}\, x, y\right)$$

est égale à l'intégrale ω — uple

$$(32)\qquad C\int_0^1 \dots \int_0^1 \left[\prod_{i=1}^{i=\omega} u_i^{\alpha_i-1}(1-u_i)^{\gamma_i-\alpha_i-1}\right](1-u_1\dots u_\omega x)^{-\beta}(1-u_1\dots u_\omega y)^{-\beta'}\,du_1\dots du_\omega,$$

$$C = \frac{\Gamma(\gamma_1)\dots\Gamma(\gamma_\omega)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\gamma_1-\alpha_1)\dots\Gamma(\alpha_\omega)\Gamma(\gamma_\omega-\alpha_\omega)}$$

qui pour $\omega = 1$ se confond avec l'expression (4-VI) de F_1.

La fonction complète d'ordre ω

$$F\left(\begin{array}{c|ccc|}1 & \alpha & & \\ \omega & \beta_1, \beta'_1 & \dots & \beta_\omega, \beta'_\omega \\ 0 & \dots & & \\ \omega & \delta_1, \delta'_1 & \dots & \delta_\omega, \delta'_\omega \end{array}\, x, y\right)$$

est égale à l'intégrale 2ω — uple

$$C\int_0^1 \dots \int_0^1 \left[\prod_{i=1}^{i=\omega} u_i^{\beta_i-1}v_i^{\beta'_i-1}(1-u_i)^{\delta_i-\beta_i-1}(1-v_i)^{\delta'_i-\beta'_i-1}\right]$$
$$\times(1-u_1\dots u_\omega x-v_1\dots v_\omega y)^{-\alpha}\,du_1\dots du_\omega\,dv_1\dots dv_\omega;$$

$$C = \frac{\Gamma(\delta_1)\Gamma(\delta'_1)\dots}{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\delta_1-\beta_1)\Gamma(\beta'_1)\Gamma(\delta'_1-\beta'_1)\dots}$$

qui pour $\omega = 1$ se réduit à l'expression (2-VI) de F_2.

Enfin la fonction complète d'ordre ω

$$F\left(\begin{array}{c|ccc|}0 & \dots & & \\ \omega+1 & \beta_1, \beta'_1 & \dots & \beta_{\omega+1}, \beta'_{\omega+1} \\ \omega & \gamma_1 & \dots & \gamma_\omega \\ 0 & \dots & & \end{array}\, x, y\right)$$

est égale à l'intégrale 2ω — uple

$$C\int\dots\int\left[\prod_{i=1}^{i=\omega} u_i^{\beta_i-1}v_i^{\beta'_i-1}(1-u_i-v_i)^{\gamma_i-\beta_i-\beta'_i-1}\right](1-u_1\dots u_\omega x)^{-\beta_{\omega+1}}(1-v_1\dots v_\omega y)^{-\beta'_{\omega+1}}\,du_1\dots dv_\omega,$$

$$C = \frac{\Gamma(\gamma_1)\dots}{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta'_1)\Gamma(\gamma_1-\beta_1-\beta'_1)\dots}$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

étendue au domaine

$$u_i \geqq 0, \qquad v_i \geqq 0, \qquad 1 - u_i - v_i \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \omega)$$

qui pour $\omega = 1$ se confond avec l'expression (3-VI) de F_3.

D'ailleurs d'une manière générale une fonction complète d'ordre ω est représentable par une intégrale complexe double tirée de la formule (14)

$$(33)\quad \begin{cases} CF = \dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int_{-i\infty}^{+i\infty}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \psi(s,t)\,\Gamma(-s)\,\Gamma(-t)\,(-x)^s(-y)^t\,ds\,dt, \\[2ex] C = \dfrac{\prod_{j=1}^{j=\mu}\Gamma(\alpha_j)\prod_{j=1}^{j=\nu}\Gamma(\beta_j)\Gamma(\beta'_j)}{\prod_{j=1}^{j=\rho}\Gamma(\gamma_j)\prod_{j=1}^{j=\sigma}\Gamma(\delta_j)\Gamma(\delta'_j)}; \qquad \psi(s,t) = \dfrac{\prod_{j=1}^{j=\mu}\Gamma(\alpha_j+s+t)\prod_{j=1}^{j=\nu}\Gamma(\beta_j+s)\Gamma(\beta'_j+t)}{\prod_{j=1}^{j=\rho}\Gamma(\gamma_j+s+t)\prod_{j=1}^{j=\sigma}\Gamma(\delta_j+s)\Gamma(\delta'_j+t)} \end{cases}$$

5° Des relations précédentes se déduisent des formules de réduction et de transformation; pour éviter un exposé fastidieux donnons-en un seul exemple simple.

Dans (32) faisons $y = x$; en nous reportant à (13), nous voyons que

$$F\left(\begin{array}{c|ccc|c} \omega & \alpha_1 & \ldots & \alpha_\omega & \\ 1 & \beta, \beta' & & & x, x \\ \omega & \gamma_1 & \ldots & \gamma_\omega & \\ 0 & \ldots & & & \end{array}\right) = F\left(\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \ldots & \alpha_\omega \\ \gamma_1 & \ldots & \gamma_\omega \end{array} \beta + \beta', x\right).$$

C'est la généralisation de la formule (25-V) relative à F_1.

XLIX. — Les systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur.

Les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur forment une classe particulière parmi les fonctions hypergéométriques les plus générales à deux variables définies au paragraphe XLVII; par conséquent la proposition établie pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles vérifiées par ces dernières fonctions leur est applicable.

Les polynomes P, Q, R, S *relatifs à une fonction hypergéométrique d'ordre* ω *sont donnés par les formules* (28); *en appliquant la méthode générale du paragraphe XLVII, il est donc possible d'écrire immédiatement un système de deux équations linéaires aux dérivées partielles vérifiées par cette fonction.*

Les polynomes P et Q sont de degré $\mu + \nu \leqq \omega + 1$; les polynomes R et S de degré $\rho + \sigma + 1 = \omega + 1$; en outre, R et S contiennent respectivement $m + 1$ et $n + 1$ en facteur; c'est donc les formules simplifiées (21) et (21') qu'il convient d'appliquer.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Une fonction hypergéométrique d'ordre ω vérifie donc le système de deux équations aux dérivées partielles d'ordre $\omega + 1$

$$(34)\qquad \sum_{j+k=0}^{j+k=\omega+1} (\rho_{j,k} - \alpha_{j,k}x)x^j y^k p_{j,k} = 0.$$

$$(34')\qquad \sum_{j+k=0}^{j+k=\omega+1} (\sigma_{j,k} - \beta_{j,k}y)x^j y^k p_{j,k} = 0.$$

Ces équations sont respectivement divisibles par x et par y.

Les coefficients $\alpha_{j,k}$, $\beta_{j,k}$, $\rho_{j,k}$, $\sigma_{j,k}$ se déterminent à partir des polynomes P, Q, R, S par le procédé indiqué au paragraphe XLVII.

On a ainsi pour les coefficients de P :

$$\alpha_{0,0} = P(0, 0) = \prod_{i=1}^{i=\mu} \alpha_i \prod_{i=1}^{i=\nu} \beta_i,$$

$$\alpha_{1,0} = P(1, 0) - P(0, 0) = \prod_{i=1}^{i=\mu} (\alpha_i + 1) \prod_{i=1}^{i=\nu} (\beta_i + 1) - \prod_{i=1}^{i=\mu} \alpha_i \prod_{i=1}^{i=\nu} \beta_i,$$

.....

$$(35)\qquad (1, j)(1, k)\alpha_{j,k} = \sum_{r=0,\, s=0}^{r=j,\, s=k} \frac{(-j, r)(-k, s)}{(1, r)(1, s)} \left[\prod_{i=1}^{i=\mu} (\alpha_i + j + k - r - s) \prod_{i=1}^{i=\nu} (\beta_i + j - r) \right].$$

Le développement de $P(m, n)$ ne contient pas de terme de degré supérieur à $\mu + \nu$; donc

$$\alpha_{j,k} = 0 \qquad (j + k > \mu + \nu).$$

En particulier, pour $j + k = \mu + \nu$, on voit facilement que

$$\alpha_{\mu+\nu-h,h} = \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-h+1)}{1.2\ldots h} \qquad (0 \leq h \leq \mu).$$

De même pour les coefficients de R

$$\rho_{0,0} = \rho_{0,1} = \rho_{0,2} = \ldots = 0.$$

$$(36)\qquad (1, j)(1, k)\rho_{j,k} = \sum_{r=0,\, s=0}^{r=j,\, s=k} \frac{(-j, r)(-k, s)}{(1, r)(1, s)} \left[(j - r) \prod_{i=1}^{i=\rho} (\gamma_i - 1 + j + k - r - s) \prod_{i=1}^{i=\sigma} (\delta_i - 1 + j - r) \right].$$

Le développement de $R(m, n)$ ne contient pas de terme de degré supérieur à

$$\rho + \sigma + 1 = \omega + 1;$$

donc

$$\rho_{j,k} = 0 \qquad (j + k > \omega + 1).$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

En particulier pour $j + k = \omega + 1$, on a

$$\rho_{\omega+1-h,h} = \frac{(\omega-\sigma)\ldots(\omega-\sigma-h+1)}{1.2\ldots h} \qquad (0 \leq h \leq \omega - \sigma).$$

Quant aux coefficients $\beta_{j,k}$ et $\sigma_{j,k}$, ils se déduisent par symétrie de $\alpha_{j,k}$ et $\rho_{j,k}$.

Exemples :

1° $$F = F_2(\alpha, \beta, \beta', \delta, \delta', x, y)$$

(fonction complète d'ordre 1)

$$P(m, n) = (\alpha + m + n)(\beta + m), \qquad Q(m, n) = (\alpha + m + n)(\beta' + n),$$
$$R(m, n) = (m + 1)(\delta + m), \qquad S(m, n) = (n + 1)(\delta' + n)$$
$$(\mu = 1, \nu = 1, \rho = 0, \sigma = 1, \omega = 1, \theta = 0).$$

On déduit de la formule (35)

$$\begin{cases} \alpha_{0,0} = \alpha\beta, \\ \alpha_{1,0} = (\alpha+1)(\beta+1) - \alpha\beta = \alpha + \beta + 1, \\ \alpha_{0,1} = (\alpha+1)\beta - \alpha\beta = \beta, \\ \alpha_{2,0} = \frac{1}{2}[(\alpha+2)(\beta+2) - 2(\alpha+1)(\beta+1) + \alpha\beta] = 1, \\ \alpha_{1,1} = (\alpha+2)(\beta+1) - (\alpha+1)(\beta+1) - (\alpha+1)\beta + \alpha\beta = 1, \\ \alpha_{0,2} = \frac{1}{2}[(\alpha+2)\beta - 2(\alpha+1)\beta + \alpha\beta] = 0. \end{cases}$$

De même, on déduit de la formule (36)

$$\begin{cases} \rho_{0,0} = \rho_{0,1} = \rho_{0,2} = 0, \\ \rho_{1,0} = \delta, \\ \rho_{1,1} = \delta - \delta = 0, \\ \rho_{2,0} = \frac{1}{2}[2(\delta+1) - 2\delta] = 1. \end{cases}$$

En portant ces valeurs dans l'équation (34), elle devient après l'avoir divisée par x

$$x(1-x)p_{2,0} - xyp_{1,1} + [\delta - (\alpha+\beta+1)x]p_{1,0} - \beta y p_{0,1} - \alpha\beta\, p_{0,0} = 0,$$

d'où par symétrie

$$y(1-y)p_{0,2} - xyp_{1,1} + [\delta' - (\alpha+\beta'+1)y]p_{0,1} - \beta' x p_{1,0} - \alpha\beta' p_{0,0} = 0.$$

Ces deux équations sont bien identiques à celles de la fonction F_2 (XI), en y remplaçant γ et γ' par δ et δ' pour nous conformer à nos notations générales.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

2°
$$F = F\left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & \cdots\cdots & & & \\ 3 & \beta_1, \beta'_1 & \beta_2, \beta'_2 & \beta_3, \beta'_3 & \\ 1 & \gamma & & & x, y \\ 1 & \delta, \delta' & & & \end{array}\right)$$

(fonction complète d'ordre 2 et du type 10)

$$P(m, n) = (\beta_1 + m)(\beta_2 + m)(\beta_3 + m); \qquad Q(m, n) = (\beta'_1 + n)(\beta'_2 + n)(\beta'_3 + n);$$
$$R(m, n) = (m+1)(\gamma + m + n)(\delta + m); \qquad S(m, n) = (n+1)(\gamma + m + n)(\delta' + n);$$

$$\begin{cases} \alpha_{0,1} = \alpha_{1,1} = \alpha_{0,2} = \alpha_{2,1} = \alpha_{1,2} = \alpha_{0,3} = 0, \\ \alpha_{0,0} = \beta_1 \beta_2 \beta_3, \\ \alpha_{1,0} = (\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1)(\beta_3 + 1) - \beta_1 \beta_2 \beta_3 = 1 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_1 \beta_2 + \beta_2 \beta_3 + \beta_3 \beta_1, \\ \alpha_{2,0} = \frac{1}{2}[(\beta_1 + 2)(\beta_2 + 2)(\beta_3 + 2) - 2(\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1)(\beta_3 + 1) + \beta_1 \beta_2 \beta_3] \\ \qquad = 3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \\ \alpha_{3,0} = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_{0,0} = \rho_{0,1} = \rho_{0,2} = \rho_{0,3} = 0, \\ \rho_{1,0} = \gamma\delta, \\ \rho_{2,0} = \frac{1}{2}[2(\gamma + 1)(\delta + 1) - 2\gamma\delta] = \gamma + \delta + 1, \\ \rho_{1,1} = (\gamma + 1)\delta - \gamma\delta = \delta, \\ \rho_{3,0} = 1, \\ \rho_{2,1} = 1, \\ \rho_{1,2} = 0. \end{cases}$$

D'où le système de deux équations aux dérivées partielles du troisième ordre vérifiées par F

$$\begin{aligned} x^2(1-x)p_{3,0} + xy\,p_{2,1} + [\gamma + \delta + 1 - (3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3)x]x\,p_{2,0} + \delta y\,p_{1,1} \\ + [\gamma\delta - (1 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_3 + \beta_3\beta_1)x]p_{1,0} - \beta_1\beta_2\beta_3 p_{0,0} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^2(1-y)p_{0,3} + xy\,p_{1,2} + [\gamma + \delta' + 1 - (3 + \beta'_1 + \beta'_2 + \beta'_3)y]y\,p_{0,2} + \delta' x\,p_{1,1} \\ + [\gamma\delta' - (1 + \beta'_1 + \beta'_2 + \beta'_3 + \beta'_1\beta'_2 + \beta'_2\beta'_3 + \beta'_3\beta'_1)y]p_{0,1} - \beta'_1\beta'_2\beta'_3 p_{0,0} = 0. \end{aligned}$$

Ce système est l'un de ceux (au nombre de 10) qui généralisent l'équation de Clausen (11), comme les quatre systèmes de P. Appell généralisent l'équation de Gauss.

3°
$$F = F\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & \cdots\cdots & \\ 0 & \cdots\cdots & \\ 1 & \gamma & x, y \\ 1 & \delta, \delta' & \end{array}\right)$$

(fonction d'ordre 2, de classe 3). Cette fonction se déduit par confluence de la précédente en y faisant tous les β et les β' égaux à ε^{-1} et en remplaçant x et y par $\varepsilon^3 x$, $\varepsilon^3 y$, puis en faisant tendre ε vers zéro.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

En effectuant le passage à la limite dans le système précédent, on obtient les équations du troisième ordre vérifiées par cette fonction

$$x^2 p_{3,0} + xy\, p_{2,1} + (\gamma + \delta + 1) x\, p_{2,0} + \delta\, y\, p_{1,1} + \gamma\delta\, p_{1,0} - p_{0,0} = 0,$$
$$y^2 p_{0,3} + xy\, p_{1,2} + (\gamma + \delta' + 1) y\, p_{0,2} + \delta' x\, p_{1,1} + \gamma\delta' p_{0,1} - p_{0,0} = 0.$$

4°
$$F = F\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & \alpha & \\ 0 & \cdots\cdots & \\ 0 & \cdots\cdots & \\ 2 & \delta_1, \delta'_1 & \delta_2, \delta'_2 \end{array} \Bigg| \; x, y\right)$$

(fonction d'ordre 2 et de classe 2). Le système obtenu est le suivant :

$$(37) \qquad \begin{cases} x^2 p_{3,0} + (\delta_1 + \delta_2 + 1) x\, p_{2,0} + (\delta_1 \delta_2 - x) p_{1,0} - y\, p_{0,1} - \alpha\, p_{0,0} = 0, \\ y^2 p_{0,3} + (\delta'_1 + \delta'_2 + 1) y\, p_{0,2} + (\delta'_1 \delta'_2 - y) p_{0,1} - x\, p_{1,0} - \alpha\, p_{0,0} = 0. \end{cases}$$

L. — Intégration des systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur [1].

Nous venons de montrer que toute fonction hypergéométrique d'ordre ω, à deux variables x et y, vérifie un système de deux équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre $\omega + 1$

$$(34) \qquad \sum_{j+k=0}^{j+k=\omega+1} (\rho_{j,k} - \alpha_{j,k} x) x^j y^k p_{j,k} = 0,$$

$$(34') \qquad \sum_{j+k=0}^{j+k=\omega+1} (\sigma_{j,k} - \beta_{j,k} y) x^j y^k p_{j,k} = 0.$$

En se reportant aux expressions données pour les coefficients, on voit que l'on a toujours

$$\rho_{\omega+1,0} = 1 \qquad \text{et} \qquad \sigma_{0,\omega+1} = 1,$$

de telle sorte que les dérivées $p_{\omega+1,0}$ et $p_{0,\omega+1}$ figurent effectivement la première dans l'équation (34), la seconde dans (34'). Donc, en résolvant par rapport à ces deux dérivées, le système peut se mettre sous la forme équivalente

$$(38) \qquad p_{\omega+1,0} = a_{\omega,1} p_{\omega,1} + \ldots + a_{1,\omega} p_{1,\omega} + \sum_{r+s=0}^{r+s=\omega} a_{r,s} p_{r,s},$$

$$(38') \qquad p_{0,\omega+1} = b_{\omega,1} p_{\omega,1} + \ldots + b_{1,\omega} p_{1,\omega} + \sum_{r+s=0}^{r+s=\omega} b_{r,s} p_{r,s},$$

les coefficients a et b étant des fonctions rationnelles de x et y.

---

[1] J. Kampé de Fériet, *Sur l'intégrale générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur* (*Comptes rendus*, t. CLXXIII, 1921, p. 900).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Nous allons démontrer une propriété générale des systèmes de cette forme, en ne faisant aucune restriction sur les coefficients a et b supposés seulement tels que les deux équations (38) *et* (38′) *soient compatibles* (condition que nous exprimerons effectivement plus bas).

Introduisons d'abord quelques définitions.

Soient $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(\omega+1)^2}$, $(\omega+1)^2$ intégrales particulières du système proposé; nous dirons qu'elles constituent un *système fondamental d'intégrales* si le déterminant formé avec ces fonctions et leurs dérivées $p_{j,k}$ jusqu'à $j \leqq \omega$, $k \leqq \omega$

$$\begin{vmatrix} p_{0,0}^{(1)} & p_{0,0}^{(2)} & \cdots & p_{0,0}^{(\omega+1)^2} \\ p_{1,0}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{\omega,\omega}^{(1)} & \cdots & \cdots & p_{\omega,\omega}^{(\omega+1)^2} \end{vmatrix}$$

n'est pas identiquement nul

En outre, nous désignerons par $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_\omega$ les déterminants suivants formés avec les coefficients a et b :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -a_{1,\omega} \\ -b_{\omega,1} & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1 - a_{1,\omega} b_{\omega,1}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -a_{1,\omega} & -a_{2,\omega-1} \\ -a_{\omega,1} & 1 & 0 & -a_{1,\omega} \\ -b_{\omega,1} & 0 & 1 & -b_{1,\omega} \\ -b_{\omega-1,2} & -b_{\omega,1} & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \Delta_1^2 - (a_{2,\omega-1} + a_{1,\omega} b_{1,\omega})(b_{\omega-1,2} + b_{\omega,1} a_{\omega,1}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

la loi de formation est évidente.

Théorème I. — *Si le système proposé est tel qu'aucun des* ω *déterminants* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_\omega$ *ne soit identiquement nul, il est possible, — en partant des équations* (38) *et* (38′) *et de toutes celles que l'on en déduit par dérivation, — d'exprimer d'une et d'une seule manière toutes les dérivées* $p_{j,k}$ *d'une intégrale* $z(x, y)$ *de ce système en fonction de ses* $(\omega+1)^2$ *premières dérivées*

$$(39) \qquad \begin{cases} p_{0,0}, & p_{1,0}, & \cdots, & p_{\omega,0}, \\ p_{0,1}, & p_{1,1}, & \cdots, & p_{\omega,1}, \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots \\ p_{0,\omega}, & p_{1,\omega}, & \cdots, & p_{\omega,\omega}. \end{cases}$$

En effet, les équations (38) et (38′) elles-mêmes expriment d'abord $p_{\omega+1,0}$ et $p_{0,\omega+1}$ en fonction d'une partie des dérivées du tableau (39)

$$(40) \qquad \begin{cases} p_{\omega+1,0} = F_{0,0}(p_{j,k}) \\ p_{0,\omega+1} = \Phi_{0,0}(p_{j,k}) \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leqq j + k \leqq \omega + 1, \\ 0 \leqq j \leqq \omega, \quad 0 \leqq k \leqq \omega. \end{cases}$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Dérivons l'équation (38) par rapport à y et (38′) par rapport à x; remarquons que

$$\frac{\partial}{\partial y}(p_{\omega+1,0}) = p_{\omega+1,1}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x}(p_{0,\omega+1}) = p_{1,\omega+1};$$

remplaçons dans les seconds membres $p_{\omega+1,0}$ et $p_{0,\omega+1}$ par les valeurs (40) et faisons passer dans les premiers membres les termes $a_{1,\omega}\, p_{1,\omega+1}$ et $b_{\omega,1}\, p_{\omega+1,1}$; nous obtenons

$$\begin{aligned} p_{\omega+1,1} \quad - a_{1,\omega} p_{1,\omega+1} &= f_{0,1}(p_{j,k}), \\ - b_{\omega,1} p_{\omega+1,1} + \quad p_{1,\omega+1} &= \varphi_{1,0}(p_{j,k}). \end{aligned}$$

Le déterminant de ces deux équations du premier degré en $p_{\omega+1,1}$ et $p_{1,\omega+1}$ étant précisément Δ_1 que nous supposons différent de zéro, nous pouvons les résoudre, ce qui nous donne

$$(41) \qquad \begin{cases} p_{\omega+1,1} = F_{0,1}(p_{j,k}) \\ p_{1,\omega+1} = \Phi_{1,0}(p_{j,k}) \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leqq j + k \leqq \omega + 2, \\ 0 \leqq j \leqq \omega, \quad 0 \leqq k \leqq \omega. \end{cases}$$

Ceci fait, dérivons (38) une fois par rapport à x et (38′) une fois par rapport à y; puis dans les seconds membres remplaçons $p_{\omega+1,0}$, $p_{0,\omega+1}$, $p_{\omega+1,1}$, $p_{1,\omega+1}$ par les valeurs (40) et (41); nous obtenons directement

$$(42) \qquad \begin{cases} p_{\omega+2,0} = F_{1,0}(p_{j,k}) \\ p_{0,\omega+2} = \Phi_{0,1}(p_{j,k}) \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leqq j + k \leqq \omega + 2, \\ 0 \leqq j \leqq \omega, \quad 0 \leqq k \leqq \omega. \end{cases}$$

Ensuite dérivons :

α. L'équation (38) deux fois par rapport à y;
β. L'équation (38) une fois par rapport à x et une fois par rapport à y;
γ. L'équation (38′) une fois par rapport à x et une fois par rapport à y;
δ. L'équation (38′) deux fois par rapport à x.

Dans ces quatre équations, remplaçons $p_{\omega+1,0}$, $p_{0,\omega+1}$, $p_{\omega+2,0}$, $p_{\omega+1,1}$, $p_{1,\omega+1}$, $p_{0,\omega+2}$ par leurs valeurs (40), (41) et (42); en faisant passer dans le premier membre les inconnues, elles s'écrivent

$$\begin{aligned} p_{\omega+1,2} - a_{1,\omega}\, p_{1,\omega+2} - a_{2,\omega-1}\, p_{2,\omega+1} &= f_{0,2}(p_{j,k}), \\ - a_{\omega,1} \quad p_{\omega+1,2} + \quad p_{\omega+2,1} - a_{1,\omega} \quad p_{2,\omega+1} &= f_{1,1}(p_{j,k}), \\ - b_{\omega,1} \quad p_{\omega+1,2} + \quad p_{1,\omega+2} - b_{1,\omega} \quad p_{2,\omega+1} &= \varphi_{1,1}(p_{j,k}), \\ - b_{\omega-1,2}\, p_{\omega+1,2} - b_{\omega,1}\, p_{\omega+2,1} + \quad p_{2,\omega+1} &= \varphi_{2,0}(p_{j,k}). \end{aligned}$$

Le déterminant de ces quatre équations étant Δ_2, différent de zéro par hypothèse, en les résolvant nous en tirons

$$(43) \qquad \begin{cases} p_{\omega+1,2} = F_{0,2}(p_{j,k}) \\ p_{\omega+2,1} = F_{1,1}(p_{j,k}) \\ p_{1,\omega+2} = \Phi_{1,1}(p_{j,k}) \\ p_{2,\omega+1} = \Phi_{2,0}(p_{j,k}) \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leqq j + k \leqq \omega + 3, \\ 0 \leqq j \leqq \omega, \quad 0 \leqq k \leqq \omega. \end{cases}$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Ceci fait, dérivons (38) deux fois par rapport à x et (38′) deux fois par rapport à y; puis dans les seconds membres remplaçons $p_{\omega+1,0}$, $p_{0,\omega+1}$, $p_{\omega+2,0}$, $p_{\omega+1,1}$, $p_{1,\omega+1}$, $p_{0,\omega+2}$, $p_{\omega+1,2}$, $p_{\omega+2,1}$, $p_{1,\omega+2}$, $p_{2,\omega+1}$ par leurs valeurs (40), (41), (42) et (43), nous obtenons

$$(44)\qquad \begin{cases} p_{\omega+3,0} = F_{2,0}(p_{j,k}) \\ p_{0,\omega+3} = \Phi_{0,2}(p_{j,k}) \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leqq j + k \leqq \omega + 3, \\ 0 \leqq j \leqq \omega, \quad 0 \leqq k \leqq \omega. \end{cases}$$

Ensuite, on peut recommencer le même cycle de calculs pour déterminer les dérivées

$$p_{\omega+1,3},\quad p_{\omega+2,2},\quad p_{\omega+3,1},\quad p_{\omega+4,0},\quad p_{0,\omega+4},\quad p_{1,\omega+3},\quad p_{2,\omega+2},\quad p_{3,\omega+1}.$$

D'une manière générale, construisons le tableau à double entrée de toutes les dérivées de la fonction $z(x, y)$

$$\begin{array}{cccccc|c}
p_{0,0} & p_{1,0} & p_{2,0} & \cdots\cdots & p_{\omega,0} & & p_{\omega+1,0} \quad p_{\omega+2,0} \\
p_{0,1} & p_{1,1} & \cdots & \cdots\cdots & p_{\omega,1} & & p_{\omega+1,1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & p_{\omega,2} & & \cdots\cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\
p_{0,\omega} & p_{1,\omega} & p_{2,\omega} & \cdots\cdots & p_{\omega,\omega} & & p_{\omega+1,\omega} \\
\hline
p_{0,\omega+1} & p_{1,\omega+1} & \cdots & \cdots\cdots & p_{\omega,\omega+1} & & p_{\omega+1,\omega+1} \\
p_{0,\omega+2} & \cdots\cdots & & & & &
\end{array}$$

les $(\omega + 1)^2$ dérivées données formant la partie encadrée du tableau.

Les calculs précédents démontrent qu'une dérivée située en dehors du tableau encadré s'exprime au moyen des dérivées de ce tableau situées sur la diagonale passant par cette dérivée et à gauche de cette diagonale. [Ce résultat est mis en évidence pour les dérivées $p_{\omega+2,0}$, $p_{\omega+1,1}$, $p_{1,\omega+1}$, $p_{0,\omega+2}$ par les formules (41) et (42).]

Aucune difficulté ne se présente quand on calcule par le mécanisme précédent la dérivée $p_{j,k}$, tant qu'on n'a pas simultanément $j \geqq \omega + 1$ et $k \geqq \omega + 1$, mais pour la dérivée $p_{\omega+1,\omega+1}$ un fait nouveau se produit : on peut l'obtenir par dérivation de deux manières différentes. Car

$$p_{\omega+1,\omega+1} = \frac{\partial^{\omega+1}}{\partial y^{\omega+1}}(p_{\omega+1,0})$$

et

$$p_{\omega+1,\omega+1} = \frac{\partial^{\omega+1}}{\partial x^{\omega+1}}(p_{0,\omega+1}).$$

En exprimant que les deux méthodes conduisent au même résultat, on écrit *la condition de compatibilité des équations* (38) *et* (38′)

$$(45)\qquad \frac{\partial^{\omega+1}}{\partial y^{\omega+1}}(p_{\omega+1,0}) = \frac{\partial^{\omega+1}}{\partial x^{\omega+1}}(p_{0,\omega+1}).$$

Voici comment doit s'interpréter cette équation; il faut d'abord y remplacer $p_{\omega+1,0}$ et $p_{0,\omega+1}$ par leurs valeurs (40); effectuer les dérivations; puis remplacer toutes les dérivées

$$p_{j,k} \qquad (0 \leqq j + k \leqq 2\omega + 2;\ 0 \leqq j \leqq 2\omega + 1;\ 0 \leqq k \leqq 2\omega + 1)$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

par leurs expressions en fonction des dérivées du tableau (39). La relation obtenue doit alors être identiquement vérifiée quelles que soient les valeurs des dérivées du tableau (39).

Si le système est tel que les coefficients a et b vérifient la condition de compatibilité (45), on peut exprimer d'une et d'une seule manière une dérivée quelconque $p_{j,k}$ en fonction des dérivées du tableau (39).

THÉORÈME II. — *Soit un point x_0, y_0 où les coefficients a et b sont des fonctions holomorphes de x et y et où aucun des déterminants $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_\omega$ ne s'annule; il existe une et une seule intégrale du système proposé, holomorphe au point x_0, y_0 et prenant en x_0, y_0 ainsi que ses dérivées p_{jk} jusqu'à $j \leq \omega$, $k \leq \omega$ un système de $(\omega + 1)^2$ valeurs données à l'avance.*

En effet, il résulte du théorème précédent qu'on peut exprimer d'une et d'une seule manière les valeurs des dérivées $p_{j,k}^{(0)}$ au point x_0, y_0 en fonction des $(\omega + 1)^2$ constantes données, qui constituent simplement la valeur prise par le tableau (39) au point x_0, y_0.

Donc le développement

$$z(x, y) = \sum_{j+k=0}^{j+k=\infty} p_{j,k}^{(0)} \frac{(x - x_0)^j}{(1, j)} \frac{(y - y_0)^k}{(1, k)} \tag{46}$$

est déterminé d'une manière univoque par la donnée des $(\omega + 1)^2$ constantes; il résulte des calculs précédents que la série (46) vérifie formellement le système proposé; sa convergence dans le domaine du point x_0, y_0 se démontre par la méthode des fonctions majorantes, en remarquant que l'on obtient une série majorante pour (46) en remplaçant dans le système proposé les coefficients a et b par une limite supérieure de leur module dans le domaine du point x_0, y_0.

THÉORÈME III. — *Étant données $(\omega + 1)^2$ intégrales particulières du système proposé formant un système fondamental, toute intégrale du système est une combinaison linéaire à coefficients constants de ces intégrales particulières.*

En effet, une intégrale $z(x, y)$ est déterminée, d'après le théorème II, par la connaissance des $(\omega + 1)^2$ valeurs $p_{j,k}^{(0)}$ prises au point x_0, y_0 par ses dérivées $p_{j,k}$ $(0 \leq j \leq \omega, 0 \leq k \leq \omega)$. Soit alors un système fondamental de $(\omega + 1)^2$ intégrales particulières $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(\omega+1)^2}$. Considérons la fonction

$$Z(x, y) = C_1 z^{(1)} + C_2 z^{(2)} + \ldots + C_{(\omega+1)^2} z^{(\omega+1)^2}$$

qui contient $(\omega + 1)^2$ constantes; posons

$$P_{j,k} = C_1 p_{j,k}^{(1)} + \ldots + C_{(\omega+1)^2} p_{j,k}^{(\omega+1)^2}.$$

Les $(\omega + 1)^2$ équations du premier degré en $C_1, C_2, \ldots$

$$P_{j,k} = p_{j,k}^{(0)} \qquad (0 \leq j \leq \omega, 0 \leq k \leq \omega)$$

déterminent d'une manière univoque les constantes C, car le déterminant de ces constantes est différent de zéro, puisque, par hypothèse, les intégrales $z^{(1)}, \ldots$ forment un système fondamental.

Donc on peut déterminer les constantes C de manière que les $(\omega + 1)^2$ premières dérivées de $Z(x, y)$ aient les mêmes valeurs que celles de l'intégrale donnée $z(x, y)$ au point x_0, y_0.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Par conséquent, on a

$$z(x, y) = Z(x, y).$$

Il résulte de ce théorème que lorsque l'on connaît $(\omega + 1)^2$ intégrales particulières du système formant un système fondamental, on obtient l'intégrale générale en faisant une combinaison linéaire à coefficients constants de ces intégrales particulières.

Les théorèmes I, II, III contiennent comme cas particulier, lorsque $\omega = 1$, les résultats établis au paragraphe XII pour les systèmes du second ordre

$$p_{2,0} = a_{1,1} p_{1,1} + a_{1,0} p_{1,0} + a_{0,1} p_{0,1} + a_{0,0} p_{0,0},$$
$$p_{0,2} = b_{1,1} p_{1,1} + b_{1,0} p_{1,0} + b_{0,1} p_{0,1} + b_{0,0} p_{0,0},$$

lorsque le déterminant $\Delta_1 = 1 - a_{1,1} b_{1,1}$ est différent de zéro.

Appliquons ces généralités à un exemple concret ; soit la fonction d'ordre 2 et de classe 2

$$F = F\left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & \alpha & & \\ 0 & \cdots\cdots & & x, y \\ 0 & \cdots\cdots & & \\ 2 & \delta_1, \delta'_1 & \delta_2, \delta'_2 & \end{array}\right)$$

que nous désignerons pour abréger par $\Phi(\alpha, \delta_1, \delta'_1, \delta_2, \delta'_2, x, y)$; nous avons vu qu'elle vérifie le système du troisième ordre

$$(37) \qquad \begin{cases} x^2 p_{3,0} + (\delta_1 + \delta_2 + 1) x p_{2,0} + (\delta_1 \delta_2 - x) p_{1,0} - y p_{0,1} - \alpha p_{0,0} = 0, \\ y^2 p_{0,3} + (\delta'_1 + \delta'_2 + 1) y p_{0,2} + (\delta'_1 \delta'_2 - y) p_{0,1} - x p_{1,0} - \alpha p_{0,0} = 0. \end{cases}$$

Ce système se résout immédiatement par rapport à $p_{3,0}$ et $p_{0,3}$; ainsi mis sous la forme (38), on voit que

$$\Delta_1 = 1, \qquad \Delta_2 = 1.$$

Nous sommes donc dans un cas où les théorèmes I, II, III s'appliquent; nous pouvons nous donner arbitrairement les neuf dérivées d'une intégrale du système

$$\begin{matrix} p_{0,0} & p_{1,0} & p_{2,0} \\ p_{0,1} & p_{1,1} & p_{2,1} \\ p_{0,2} & p_{1,2} & p_{2,2} \end{matrix}$$

toutes les autres s'en déduisent au moyen des équations (37) et de celles qu'on en tire par dérivation.

Par conséquent l'intégrale générale dépend linéairement de neuf intégrales particulières indépendantes. Pour déterminer ces intégrales faisons la substitution

$$(47) \qquad z = x^\lambda y^\mu z'.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Le système (37) se transforme en

$$(48)\quad \begin{aligned} & x^2 p'_{3,0} + (3\lambda + \delta_1 + \delta_2 + 1) x p'_{2,0} \\ & + [3\lambda(\lambda-1) + 2\lambda(\delta_1+\delta_2+1) + \delta_1\delta_2 - x] p'_{1,0} - y p'_{0,1} \\ & + [\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + \lambda(\lambda-1)(\delta_1+\delta_2+1) + \lambda\delta_1\delta_2 - (\lambda+\mu+\alpha)x] \frac{1}{x} p'_{0,0} = 0, \end{aligned}$$

$$(48')\quad \begin{aligned} & y^2 p'_{0,3} + (3\mu + \delta'_1 + \delta'_2 + 1) y p'_{0,2} \\ & + [3\mu(\mu-1) + 2\mu(\delta'_1+\delta'_2+1) + \delta'_1\delta'_2 - y] p'_{0,1} - x p'_{1,0} \\ & + [\mu(\mu-1)(\mu-2) + \mu(\mu-1)(\delta'_1+\delta'_2+1) + \mu\delta'_1\delta'_2 - (\lambda+\mu+\alpha)y] \frac{1}{y} p'_{0,0} = 0. \end{aligned}$$

Ce système se ramène à la forme (37) lorsque

$$\lambda[(\lambda-1)(\lambda-2) + (\lambda-1)(\delta_1+\delta_2+1) + \delta_1\delta_2] = 0,$$
$$\mu[(\mu-1)(\mu-2) + (\mu-1)(\delta'_1+\delta'_2+1) + \delta'_1\delta'_2] = 0.$$

Chacune de ces équations admet trois racines

$$\lambda = 0, \qquad \lambda = 1-\delta_1, \qquad \lambda = 1-\delta_2,$$
$$\mu = 0, \qquad \mu = 1-\delta'_1, \qquad \mu = 1-\delta'_2,$$

ce qui donne les neuf combinaisons :

λ	0	$1-\delta_1$	0	$1-\delta_2$	0	$1-\delta_1$	$1-\delta_1$	$1-\delta_2$	$1-\delta_2$
μ	0	0	$1-\delta'_1$	0	$1-\delta'_2$	$1-\delta'_1$	$1-\delta'_2$	$1-\delta'_1$	$1-\delta'_2$,

Faisons, par exemple, $\lambda = 1-\delta_1$, $\mu = 0$; les équations (48) et (48') deviennent

$$x^2 p'_{3,0} + (2-\delta_1+\delta_2+1-\delta_1+1) x p'_{2,0} + [(2-\delta_1)(\delta_2+1-\delta_1) - x] p'_{1,0} - y p'_{0,1} - (\alpha+1-\delta_1) p'_{0,0} = 0,$$
$$y^2 p'_{0,3} + (\delta'_1+\delta'_2+1) y p'_{0,2} + (\delta'_1\delta'_2 - y) p'_{0,1} - x p'_{1,0} - (\alpha+1-\delta_1) p'_{0,0} = 0.$$

On voit de suite que ce système se déduit simplement du système (37) en y remplaçant α, δ_1, δ_2 par $\alpha+1-\delta_1$, $2-\delta_1$, $\delta_2+1-\delta_1$; par conséquent il admet l'intégrale particulière

$$z' = \Phi(\alpha+1-\delta_1,\ 2-\delta_1,\ \delta'_1,\ \delta_2+1-\delta_1,\ \delta'_2,\ x,\ y)$$

à laquelle, d'après (47), correspond pour (37) l'intégrale

$$z = x^{1-\delta_1}\Phi(\alpha+1-\delta_1,\ 2-\delta_1,\ \delta'_1,\ \delta_2+1-\delta_1,\ \delta'_2,\ x,\ y).$$

Par la répétition de calculs analogues nous obtenons ainsi le tableau des neuf intégrales

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

particulières indépendantes du système (37) :

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \Phi(\alpha, \delta_1, \delta'_1, \delta_2, \delta'_2, x, y),\\
z_2 &= x^{1-\delta_1}\Phi(\alpha+1-\delta_1, 2-\delta_1, \delta'_1, \delta_2+1-\delta_1, \delta'_2, x, y),\\
z_3 &= y^{1-\delta'_1}\Phi(\alpha+1-\delta'_1, \delta_1, 2-\delta'_1, \delta_2, \delta'_2+1-\delta'_1, x, y),\\
z_4 &= x^{1-\delta_2}\Phi(\alpha+1-\delta_2, \delta_1+1-\delta_2, \delta'_1, 2-\delta_2, \delta'_2, x, y),\\
z_5 &= y^{1-\delta'_2}\Phi(\alpha+1-\delta'_2, \delta_1, \delta'_1+1-\delta'_2, \delta_2, 2-\delta'_2, x, y),\\
z_6 &= x^{1-\delta_1}y^{1-\delta'_1}\Phi(\alpha+2-\delta_1-\delta'_1, 2-\delta_1, 2-\delta'_1, \delta_2+1-\delta_1, \delta'_2+1-\delta'_1, x, y),\\
z_7 &= x^{1-\delta_1}y^{1-\delta'_2}\Phi(\alpha+2-\delta_1-\delta'_2, 2-\delta_1, \delta'_1+1-\delta'_2, \delta_2+1-\delta_1, 2-\delta'_2, x, y),\\
z_8 &= x^{1-\delta_2}y^{1-\delta'_1}\Phi(\alpha+2-\delta_2-\delta'_1, \delta_1+1-\delta_2, 2-\delta'_1, 2-\delta_2, \delta'_2+1-\delta'_1, x, y),\\
z_9 &= x^{1-\delta_2}y^{1-\delta'_2}\Phi(\alpha+2-\delta_2-\delta'_2, \delta_1+1-\delta_2, \delta'_1+1-\delta'_2, 2-\delta_2, 2-\delta'_2, x, y).
\end{aligned}
$$

Bien entendu ces intégrales ne sont indépendantes que si aucun des éléments δ_1, δ'_1, δ_2, δ_2 n'est un entier.

Les résultats énoncés dans les théorèmes I, II, III ne sont valables que si tous les déterminants Δ_1, $\Delta_2, \ldots, \Delta_\omega$ *sont différents de zéro; si un seul d'entre eux est identiquement nul le nombre des intégrales indépendantes du système proposé est inférieur à* $(\omega+1)^2$.

Nous avons déjà vu (XIV) un exemple de ce fait pour les systèmes du second ordre

$$
\begin{aligned}
p_{2,0} &= a_{1,1}p_{1,1} + a_{1,0}p_{1,0} + a_{0,1}p_{0,1} + a_{0,0}p_{0,0},\\
p_{0,2} &= b_{1,1}p_{1,1} + b_{1,0}p_{1,0} + b_{0,1}p_{0,1} + b_{0,0}p_{0,0};
\end{aligned}
$$

lorsque le déterminant $\Delta_1 = 1 - a_{1,1}b_{1,1}$ est identiquement nul, le nombre des intégrales indépendantes s'abaisse à trois; c'est en particulier le cas pour le système de la fonction F_1.

Les circonstances qui se présentent pour le système le plus général d'ordre $(\omega+1)$ sont variées et les hypothèses que l'on peut faire très nombreuses. Pour construire une théorie générale, il faudrait d'abord examiner le cas où un seulement des ω déterminants $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_\omega$ est nul, ce qui fournit ω cas particuliers; puis le cas où deux d'entre eux sont nuls, ce qui fournit $\frac{\omega(\omega-1)}{2}$ cas particuliers, ..., puis finalement le cas où ils sont tous nuls : ce qui donne, au total, $2^\omega - 1$ cas distincts; en y joignant le cas, déjà étudié, où aucun des déterminants n'est nul, on voit qu'*il y a* 2^ω *types différents de systèmes d'ordre* $\omega+1$.

Mais ce n'est pas tout, dans chacun de ces cas particuliers on peut encore se trouver en présence de circonstances très diverses.

Supposons pour fixer les idées que dans le système

$$(38)\qquad p_{\omega+1,0} = a_{\omega,1}p_{\omega,1} + \ldots + a_{1,\omega}p_{1,\omega} + \sum_{r+s=0}^{r+s=\omega} a_{r,s}p_{r,s},$$

$$(38')\qquad p_{0,\omega+1} = b_{\omega,1}p_{\omega,1} + \ldots + b_{1,\omega}p_{1,\omega} + \sum_{r+s=0}^{r+s=\omega} b_{r,s}p_{r,s},$$

le déterminant

$$\Delta_1 = 1 - a_{1,\omega}b_{\omega,1}$$

soit seul identiquement nul.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Si, pour appliquer la méthode générale, on dérive ces deux équations respectivement par rapport à y et x, les deux équations qu'on en déduit

$$\left.\begin{aligned} p_{\omega+1,1} - a_{1,\omega} p_{1,\omega+1} &= f_{0,1}(p_{j,k}) \\ -b_{\omega,1} p_{\omega+1,1} + \quad p_{1,\omega+1} &= \varphi_{1,0}(p_{j,k}) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &0 \leq j + k \leq \omega + 2, \\ &0 \leq j \leq \omega, \quad 0 \leq k \leq \omega \end{aligned}$$

ne permettent plus de calculer $p_{\omega+1,1}$ et $p_{1,\omega+1}$ leur déterminant étant nul. En éliminant $p_{\omega+1,1}$ et $p_{1,\omega+1}$, l'on en tire

$$b_{\omega,1} f_{0,1}(p_{j,k}) + \varphi_{1,0}(p_{j,k}) = 0. \tag{49}$$

Toute solution du système proposé doit vérifier cette équation; or cette relation ne contient que des dérivées $p_{j,k}$ figurant au tableau (39); *donc parmi ces* $(\omega + 1)^2$ *dérivées, il y en a au moins une qui ne peut être choisie arbitrairement.*

En outre, parmi les équations déduites par dérivation de (49), il peut encore en exister une ou plusieurs qui ne contiennent que des dérivées figurant au tableau (39); le nombre des dérivées à choisir arbitrairement (et par conséquent le nombre des intégrales indépendantes) est abaissé d'autant d'unités.

De même supposons que Δ_2 soit seul identiquement nul; les équations en $p_{\omega+1,1}$ et $p_{1,\omega+1}$ se résolvent comme dans le cas général; mais les équations

$$\left.\begin{aligned} p_{\omega+1,2} - a_{1,\omega} p_{1,\omega+2} - a_{2,\omega-1} p_{2,\omega+1} &= f_{0,2}(p_{j,k}) \\ -a_{\omega,1} \quad p_{\omega+1,2} + \quad p_{\omega+2,1} - a_{1,\omega} \quad p_{2,\omega+1} &= f_{1,1}(p_{j,k}) \\ -b_{\omega,1} \quad p_{\omega+1,2} + \quad p_{1,\omega+2} - b_{1,\omega} \quad p_{2,\omega+1} &= \varphi_{1,1}(p_{j,k}) \\ -b_{\omega-1,2} p_{\omega+1,2} - b_{\omega,1} p_{\omega+2,1} + \quad p_{2,\omega+1} &= \varphi_{2,0}(p_{j,k}) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &0 \leq j + k \leq \omega + 3, \\ &0 \leq j \leq \omega, \quad 0 \leq k \leq \omega \end{aligned}$$

ne peuvent plus se résoudre; en éliminant $p_{\omega+1,2}$, $p_{\omega+2,1}$, $p_{1,\omega+2}$, $p_{2,\omega+1}$, on en tire une relation

$$A f_{0,2}(p_{j,k}) + B f_{1,1}(p_{j,k}) + C \varphi_{1,1}(p_{j,k}) + D \varphi_{2,0}(p_{j,k}) = 0 \tag{50}$$

qui doit être vérifiée par toute solution du système proposé. Cette équation ne contient que des dérivées figurant au tableau (39); par conséquent il y en a une d'entre elles qui se trouve ainsi déterminée en fonction des autres et ne saurait être choisie arbitrairement. Mais en dérivant la relation (50), il se peut fort bien qu'une ou plusieurs des relations obtenues ne contiennent encore que des dérivées du tableau (39); le nombre de celles qui peuvent être choisies arbitrairement se trouve donc diminué d'autant d'unités qu'il y a de nouvelles relations indépendantes.

Un exemple concret aidera à saisir ces généralités.

Considérons la fonction d'ordre 2 et de classe 3

$$F\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & \cdots & \\ 0 & \cdots & \\ 1 & \gamma & x, y \\ 1 & \delta, \delta' & \end{array}\right).$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Elle vérifie le système du troisième ordre

$$(51)\qquad x^2 p_{3,0} + xy p_{2,1} + (\gamma + \delta + 1) x p_{2,0} + \delta y p_{1,1} + \gamma\delta p_{1,0} - p_{0,0} = 0,$$

$$(51')\qquad y^2 p_{0,3} + xy p_{1,2} + (\gamma + \delta' + 1) y p_{0,2} + \delta' x p_{1,1} + \gamma\delta' p_{0,1} - p_{0,0} = 0.$$

En le mettant sous la forme générale (38)

$$p_{3,0} = a_{2,1} p_{2,1} + a_{1,2} p_{1,2} + \sum_{r+s=0}^{r+s=2} a_{r,s} p_{r,s},$$

$$p_{0,3} = b_{2,1} p_{2,1} + b_{1,2} p_{1,2} + \sum_{r+s=0}^{r+s=2} b_{r,s} p_{r,s},$$

on voit que

$$a_{2,1} = -\frac{y}{x}; \qquad a_{1,2} = 0; \qquad b_{2,1} = 0; \qquad b_{1,2} = -\frac{x}{y}.$$

Donc

$$\Delta_1 = 1 - a_{1,2} b_{2,1} = 1,$$

$$\Delta_2 = \Delta_1^2 - (a_{2,1} + a_{1,2} b_{1,2})(b_{1,2} + a_{2,1} b_{2,1}) = 0.$$

Le système (51) *appartient donc au cas exceptionnel où le déterminant* Δ_2 *est seul identiquement nul;* il résulte des généralités que nous venons d'exposer que dans le tableau des neuf dérivées

$$(52)\qquad \begin{cases} p_{0,0}, & p_{1,0}, & p_{2,0}, \\ p_{0,1}, & p_{1,1}, & p_{2,1}, \\ p_{0,2}, & p_{1,2}, & p_{2,2}, \end{cases}$$

qui pour un système du troisième ordre peuvent en général être choisies arbitrairement, il y en aura au moins une qui sera déterminée en fonction des autres.

Suivons la méthode générale; dérivons une première fois les équations (51) et (51′) par rapport à y et à x respectivement, il vient

$$(53)\qquad x^2 p_{3,1} + xy p_{2,2} + (\gamma + \delta + 2) x p_{2,1} + \delta y p_{1,2} + (\gamma + 1)\delta p_{1,1} - p_{0,1} = 0,$$

$$(53')\qquad y^2 p_{1,3} + xy p_{2,2} + (\gamma + \delta' + 2) y p_{1,2} + \delta' x p_{2,1} + (\gamma + 1)\delta' p_{1,1} - p_{1,0} = 0.$$

Ces équations donnent immédiatement $p_{3,1}$ et $p_{1,3}$ en fonction des dérivées du tableau (52). Répétons la même opération, il vient

$$(54)\qquad x^2 p_{3,2} + xy p_{2,3} + (\gamma + \delta + 3) x p_{2,2} + \delta y p_{1,3} + (\gamma + 2)\delta p_{1,2} - p_{0,2} = 0,$$

$$(54')\qquad y^2 p_{2,3} + xy p_{3,2} + (\gamma + \delta' + 3) y p_{2,2} + \delta' x p_{3,1} + (\gamma + 2)\delta' p_{2,1} - p_{2,0} = 0.$$

Dans ces équations, nous pourrions remplacer $p_{3,1}$ et $p_{1,3}$ par leurs valeurs tirées de (53) et (53′); dans le cas général elles nous permettraient de calculer $p_{3,2}$ et $p_{2,3}$ en fonction des dérivées du tableau (52); mais ici, à cause de $\Delta_2 = 0$, ce calcul est impossible; car $p_{3,2}$ et $p_{2,3}$ s'éliminent entre les équations (54) et (54′). Cette élimination donne

$$(\delta - \delta') xy p_{2,2} + \delta y^2 p_{1,3} - \delta' x^2 p_{3,1} + (\gamma + 2)\delta y p_{1,2} - (\gamma + 2)\delta' x p_{2,1} - y p_{0,2} + x p_{2,0} = 0.$$

Puis, si dans cette relation nous remplaçons $x^2 p_{3,1}$ et $y^2 p_{1,3}$ par leurs valeurs (53) et (53′),

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

elle se réduit à

$$(55)\qquad x p_{2,0} - y p_{0,2} + \delta p_{1,0} - \delta' p_{0,1} = 0.$$

Toute solution du système proposé (51) *doit donc vérifier également l'équation aux dérivées partielles* (55), *qui est une conséquence nécessaire des équations* (51) *et* (51'). *Cette équation constitue une première relation entre quatre des neuf dérivées du tableau* (52).

Ceci étant, dérivons l'équation (55) par rapport à x et par rapport à y

$$(56)\qquad x p_{3,0} - y p_{1,2} + (\delta + 1) p_{2,0} - \delta' p_{1,1} = 0,$$

$$(56')\qquad x p_{2,1} - y p_{0,3} + \delta p_{1,1} - (\delta' + 1) p_{0,2} = 0.$$

Entre (56) et (51) d'une part, entre (56') et (51') d'autre part, éliminons $p_{3,0}$ et $p_{0,3}$, nous obtenons

$$(57)\qquad xy p_{2,1} + xy p_{1,2} + \gamma x p_{2,0} + (\delta y + \delta' x) p_{1,1} + \gamma \delta p_{1,0} - p_{0,0} = 0.$$

$$(57')\qquad xy p_{1,2} + xy p_{2,1} + \gamma y p_{0,2} + (\delta' x - \delta y) p_{1,1} + \gamma \delta' p_{0,1} - p_{0,0} = 0.$$

Ces deux équations ne sont pas indépendantes, car si on les retranche l'une de l'autre, on retrouve l'équation (55)

$$\gamma [x p_{2,0} - y p_{0,2} + \delta p_{1,0} - \delta' p_{0,1}] = 0.$$

En conservant l'une d'entre elles, (57) *par exemple, nous avons une seconde relation entre les dérivées du tableau* (52).

Dérivons encore l'équation (55) une fois par rapport à x et une fois par rapport à y

$$(58)\qquad x p_{3,1} - y p_{1,3} + (\delta + 1) p_{2,1} - (\delta' + 1) p_{1,2} = 0.$$

Multiplions cette relation par xy et remplaçons $x^2 p_{3,1}$ et $y^2 p_{1,3}$ par leurs valeurs (53) et (53'), elle devient

$$(59)\qquad \begin{aligned}(x - y) xy p_{2,2} + [\delta' x - (\gamma + 1) y] x p_{2,1} - [\delta y - (\gamma + 1) x] y p_{1,2} \\ + (\gamma + 1)(\delta' x - \delta y) p_{1,1} - x p_{1,0} + y p_{0,1} = 0,\end{aligned}$$

ce qui nous donne une troisième relation entre les dérivées du tableau (52).

En continuant à dériver l'équation (55) et à éliminer du résultat les dérivées $p_{j,k}$ (où j ou k est supérieur ou égal à 3) en se servant des équations dérivées de (51) et (51'), on n'obtient rien de nouveau: toutes ces relations se réduisent à (55), (57) ou (59). Nous pouvons donc conclure que *toute solution du système*

$$x^2 p_{3,0} + xy p_{2,1} + (\gamma + \delta + 1) x p_{2,0} + \delta y p_{1,1} + \gamma \delta p_{1,0} - p_{0,0} = 0.$$

$$y^2 p_{0,3} + xy p_{1,2} + (\gamma + \delta' + 1) y p_{0,2} + \delta' x p_{1,1} + \gamma \delta' p_{0,1} - p_{0,0} = 0$$

vérifie nécessairement les trois équations

$$x p_{2,0} - y p_{0,2} + \delta p_{1,0} - \delta' p_{0,1} = 0,$$

$$xy p_{2,1} + xy p_{1,2} + \gamma x p_{2,0} + (\delta y + \delta' x) p_{1,1} + \gamma \delta p_{1,0} - p_{0,0} = 0.$$

$$\begin{aligned}(x - y) xy p_{2,2} + [\delta' x - (\gamma + 1) y] x p_{2,1} - [\delta y - (\gamma + 1) x] y p_{1,2} \\ + (\gamma + 1)(\delta' x - \delta y) p_{1,1} - x p_{1,0} + y p_{0,1} = 0.\end{aligned}$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Les neuf dérivées

$$\begin{matrix} p_{0,0}, & p_{1,0}, & p_{2,0}, \\ p_{0,1}, & p_{1,1}, & p_{2,1}, \\ p_{0,2}, & p_{1,2}, & p_{2,2}, \end{matrix}$$

étant liées par ces trois relations, on n'en peut choisir arbitrairement que six. Le nombre des intégrales indépendantes du système s'abaisse donc à six.

Pour donner un autre exemple des circonstances qui se présentent dans l'étude des systèmes exceptionnels, considérons la fonction d'ordre 2 et de classe 2

$$F\left(\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \ldots \\ \beta, \beta' \\ \gamma, \gamma' \\ \ldots \end{matrix}\middle|\, x, y\right).$$

Elle vérifie le système du troisième ordre

$$(60)\quad x^2 p_{3,0} + 2xy p_{2,1} + y^2 p_{1,2} + (\gamma+\gamma'+1) x p_{2,0} + (\gamma+\gamma'+1) y p_{1,1} + (\gamma\gamma' - x) p_{1,0} - \beta p_{0,0} = 0,$$

$$(60')\quad y^2 p_{0,3} + 2xy p_{1,2} + x^2 p_{2,1} + (\gamma+\gamma'+1) y p_{0,2} + (\gamma+\gamma'+1) x p_{1,1} + (\gamma\gamma' - y) p_{0,1} - \beta' p_{0,0} = 0.$$

En le mettant sous la forme générale (38), on a

$$a_{2,1} = -2\frac{y}{x}, \qquad a_{1,2} = -\frac{y^2}{x^2}; \qquad b_{2,1} = -\frac{x^2}{y^2}, \qquad b_{1,2} = -2\frac{x}{y};$$

d'où

$$\Delta_1 = 1 - a_{1,2} b_{2,1} = 0,$$
$$\Delta_2 = \Delta_1^2 - (a_{2,1} + a_{1,2} b_{1,2})(b_{1,2} + a_{2,1} b_{2,1}) = 0.$$

Pour le système proposé, les deux déterminants Δ_1 et Δ_2 sont donc identiquement nuls.

Dérivons (60), par rapport à y et (60′) par rapport à x

$$(61)\quad x^2 p_{3,1} + 2xy p_{2,2} + y^2 p_{1,3} + (\gamma+\gamma'+3) x p_{2,1} + (\gamma+\gamma'+3) y p_{1,2} + [(\gamma+1)(\gamma'+1) - x] p_{1,1} - \beta p_{0,1} = 0,$$

$$(61')\quad y^2 p_{1,3} + 2xy p_{2,2} + x^2 p_{3,1} + (\gamma+\gamma'+3) y p_{1,2} + (\gamma+\gamma'+3) x p_{2,1} + [(\gamma+1)(\gamma'+1) - y] p_{1,1} - \beta' p_{1,0} = 0.$$

Contrairement au cas général, il n'est pas possible de déduire $p_{3,1}$ et $p_{1,3}$ de ces équations, le déterminant de ces inconnues étant Δ_1. En retranchant (61) de (61′), il vient la relation

$$(62)\quad (x - y) p_{1,1} - \beta' p_{1,0} + \beta p_{0,1} = 0.$$

Toute solution du système (60) *doit vérifier cette équation* [1].

---

[1] On reconnaît que (62) est identique à l'équation (12-XIV) vérifiée par la fonction

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y).$$

Ceci est d'accord avec le résultat exposé dans la remarque de la page 53 donnant la série entière la plus générale vérifiant l'équation (12-XIV) ; en effet cette fonction hypergéométrique d'ordre 2 se déduit de la formule générale de la page 53 en y faisant

$$\psi(m+n) = \frac{1}{(\gamma, m+n)(\gamma', m+n)}.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Puis dérivons (60) deux fois par rapport à y d'une part et d'autre part (60′) une fois par rapport à x et une fois par rapport à y

$$(63)\quad x^2 p_{3,2} + 2xy\,p_{2,3} + y^2 p_{1,4} + (\gamma+\gamma'+5)x\,p_{2,2} + (\gamma+\gamma'+5)y\,p_{1,3} + [(\gamma+2)(\gamma'+2) - x]\,p_{1,2} - \beta\,p_{0,2} = 0.$$

$$(63')\quad y^2 p_{1,4} + 2xy\,p_{2,3} + x^2 p_{3,2} + (\gamma+\gamma'+5)y\,p_{1,3} + (\gamma+\gamma'+5)x\,p_{2,2} - [(\gamma+2)(\gamma'+2) - y]\,p_{1,2} - (\beta'+1)\,p_{1,1} = 0.$$

Dérivons de même (60) une fois par rapport à x et une fois par rapport à y et d'autre part (60′) deux fois par rapport à x

$$(64)\quad x^2 p_{4,1} + 2xy\,p_{3,2} + y^2 p_{2,3} + (\gamma+\gamma'+5)x\,p_{3,1} - (\gamma+\gamma'+5)y\,p_{2,2} - [(\gamma+2)(\gamma'+2) - x]\,p_{2,1} - (\beta+1)\,p_{1,1} = 0,$$

$$(64')\quad y^2 p_{2,3} + 2xy\,p_{3,2} + x^2 p_{4,1} + (\gamma+\gamma'+5)y\,p_{2,2} + (\gamma+\gamma'+5)x\,p_{3,1} + [(\gamma+2)(\gamma'+2) - y]\,p_{2,1} - \beta'\,p_{2,0} = 0.$$

Dans le cas général, ces quatre dernières équations permettent de déterminer $p_{4,1}$, $p_{3,2}$, $p_{2,3}$, $p_{1,4}$; ici il n'en est rien parce que le déterminant Δ_2 est identiquement nul; en retranchant (63) de (63′) et (64) de (64′), il vient

$$(65)\qquad (x-y)\,p_{1,2} - (\beta'+1)\,p_{1,1} + \beta\,p_{0,2} = 0,$$

$$(66)\qquad (x-y)\,p_{2,1} - \beta'\,p_{2,0} + (\beta+1)\,p_{1,1} = 0.$$

Il est clair que ces relations se déduisent de (62) en la dérivant respectivement par rapport à y et par rapport à x.

L'équation obtenue en dérivant (62) une fois par rapport à x et une fois par rapport à y

$$(67)\qquad (x-y)\,p_{2,2} - (\beta'+1)\,p_{2,1} + (\beta+1)\,p_{1,2} = 0$$

ne contient encore que des dérivées du tableau (52).

Pour conclure, nous voyons que *toute solution du système*

$$x^2 p_{3,0} + 2xy\,p_{2,1} + y^2 p_{1,2} + (\gamma+\gamma'+1)x\,p_{2,0} + (\gamma+\gamma'+1)y\,p_{1,1} + (\gamma\gamma' - x)\,p_{1,0} - \beta\,p_{0,0} = 0,$$

$$y^2 p_{0,3} + 2xy\,p_{1,2} + x^2 p_{2,1} + (\gamma+\gamma'+1)y\,p_{0,2} + (\gamma+\gamma'+1)x\,p_{1,1} + (\gamma\gamma' - y)\,p_{0,1} - \beta'\,p_{0,0} = 0$$

vérifie nécessairement les quatre équations

$$(x-y)\,p_{1,1} - \beta'\,p_{1,0} + \beta\,p_{0,1} = 0,$$

$$(x-y)\,p_{1,2} - (\beta'+1)\,p_{1,1} + \beta\,p_{0,2} = 0,$$

$$(x-y)\,p_{2,1} - \beta'\,p_{2,0} + (\beta+1)\,p_{1,1} = 0,$$

$$(x-y)\,p_{2,2} - (\beta'+1)\,p_{2,1} + (\beta+1)\,p_{1,2} = 0.$$

Les neuf dérivées

$$\begin{matrix} p_{0,0}, & p_{1,0}, & p_{2,0}, \\ p_{0,1}, & p_{1,1}, & p_{2,1}, \\ p_{0,2}, & p_{1,2}, & p_{2,2}, \end{matrix}$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

étant liées par ces quatre relations, on n'en peut choisir arbitrairement que cinq. Le nombre des intégrales indépendantes du système s'abaisse donc à cinq.

Règle générale pour déterminer les équations supplémentaires vérifiées par une fonction hypergéométrique d'ordre ω [1].

Les coefficients $a_{m,n}$ du développement (16) d'une fonction hypergéométrique d'ordre ω vérifient les deux équations de récurrence

$$(17)\qquad R(m, n)a_{m+1,n} - P(m, n)a_{m,n} = 0,$$

$$(17')\qquad S(m, n)a_{m,n+1} - Q(m, n)a_{m,n} = 0,$$

les polynomes P, Q, R, S étant donnés par les formules (28). Au paragraphe XLIX, en appliquant la méthode générale du paragraphe XLVII, nous avons déduit de (17) et (17') les équations aux dérivées partielles (38) et (38'), vérifiées par la fonction. Or les exemples précédents montrent que, dans certains cas, on peut tirer de (38) et (38'), par dérivation et élimination, des équations ne contenant que des dérivées du tableau

$$(39)\qquad \| p_{j,k} \| \qquad (0 \leqq j \leqq \omega,\ 0 \leqq k \leqq \omega);$$

le nombre des intégrales indépendantes est alors inférieur à $(\omega + 1)^2$.

Nous allons établir *une règle générale permettant de prévoir* a priori, *dès que l'on connaît les polynomes* P, Q, R, S (sans passer par les opérations de dérivation et d'élimination), *l'existence de relations entre les* $(\omega + 1)^2$ *dérivées du tableau* (39) *et de former ces équations supplémentaires aux dérivées partielles* [conséquences nécessaires de (38) et (38')] *vérifiées par la fonction.*

Soient H (m, n) et K (m, n) deux polynomes arbitraires, *sans facteur commun;* l'équation aux différences finies

$$(68)\qquad A(m, n)a_{m+1,n} + B(m, n)a_{m,n+1} + C(m, n)a_{m,n} = 0,$$

où

$$A = HR, \qquad B = KS, \qquad C = -(HP + KQ),$$

est une conséquence nécessaire de (17) et (17').

D'après (28) on a

$$(69)\qquad \left\{\begin{aligned} A &= H(m, n)(m-1)\prod_{i=1}^{i=\rho}(\gamma_i + m + n)\prod_{i=1}^{i=\sigma}(\delta_i + m),\\ B &= K(m, n)(n+1)\prod_{i=1}^{i=\rho}(\gamma_i + m + n)\prod_{i=1}^{i=\sigma}(\delta'_i + n),\\ C &= -\prod_{i=1}^{i=\mu}(\alpha_i + m + n)\left[H(m, n)\prod_{i=1}^{i=\nu}(\beta_i + m) + K(m, n)\prod_{i=1}^{i=\nu}(\beta'_i + n)\right]. \end{aligned}\right.$$

---

[1] J. Kampé de Fériet, *Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur* (*Comptes rendus*, t. **177**, 1923, p. 546).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Par la méthode de la fin du paragraphe XLVII (p. 147), il est aisé de déduire, de l'équation aux différences finies (68), une équation aux dérivées partielles vérifiée par la fonction, conséquence nécessaire des équations aux dérivées partielles (38) et (38'). Il suffit d'appliquer les calculs qui permettent de passer de l'équation générale aux différences finies (24) à l'équation aux dérivées partielles (26) ou (27).

Déterminons donc les coefficients des développements des polynomes :

$$A(m-1, n) = \sum_{j,k} A_{j,k}\, m(m-1)\ldots(m-j+1)\, n(n-1)\ldots(n-k+1),$$

$$B(m, n-1) = \sum_{j,k} B_{j,k}\, m(m-1)\ldots(m-j+1)\, n(n-1)\ldots(n-k+1),$$

$$C(m, n) = \sum_{j,k} C_{j,k}\, m(m-1)\ldots(m-j+1)\, n(n-1)\ldots(n-k+1).$$

Comme A et B contiennent respectivement en facteur $(m+1)$ et $(n+1)$, on a $A_{\omega,k} = 0$ et $B_{j,\omega} = 0$ et l'on peut appliquer la formule simplifiée (27) qui donne l'équation

$$(70) \qquad \sum_{j,k} (A_{j,k}y + B_{j,k}x + C_{j,k}xy)\, x^j y^k p_{j,k} = 0.$$

En général, cette équation [combinaison arbitraire des équations déduites par dérivation de (38) et (38')] ne présente pas d'intérêt, car elle contient des dérivées ne figurant pas au tableau (39); en effet, — h et k désignant les degrés de H et K, — A possède un terme en $m^{\rho+\sigma+h+1} = m^{\omega+h+1}$ et B un terme en $n^{\rho+\sigma+k+1} = n^{\omega+k+1}$; l'équation (70) contient donc les dérivées $p_{\omega+h+1,0}$ et $p_{0,\omega+k+1}$, qui manifestement ne figurent pas au tableau (39).

Néanmoins l'équation (68) peut conduire à une relation du type voulu de la manière suivante. Supposons que les polynomes A, B, C admettent *un facteur commun* G, tel qu'en posant

$$A(m, n) = G(m, n)A'(m, n), \qquad B(m, n) = G(m, n)B'(m, n), \qquad C(m, n) = G(m, n)C'(m, n),$$

les polynomes A', B', C' ne possèdent plus que des termes en $m^j n^k$ tels que $0 \leqq j \leqq \omega$, $0 \leqq k \leqq \omega$. Considérons l'équation

$$(71) \qquad A'(m, n)\, a_{m+1,n} + B'(m, n)\, a_{m,n+1} + C'(m, n)\, a_{m,n} = 0$$

déduite de (68) en la divisant par le facteur commun G; *l'équation aux dérivées partielles*

$$(72) \qquad \sum_{j,k} (A'_{j,k}y + B'_{j,k}x + C'_{j,k}xy)\, x^j y^k p_{j,k} = 0,$$

qui correspond à l'équation simplifiée (71), *ne contient plus que des dérivées du tableau* (39).

La question est donc ramenée à la recherche des facteurs communs des polynomes A, B, C. Pour diviser A, G doit diviser H ou R; montrons qu'il divise nécessairement R; en effet, supposons que G divise H; il doit aussi diviser KS et HP + KQ, c'est-à-dire KS et KQ; comme H et K n'ont pas de facteur commun, G devrait donc diviser S et Q; or ceci est contraire aux

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

données, puisque S et Q sont sans facteur commun; donc G divise R. Un raisonnement symétrique, partant de B, montre que G divise S.

Pour qu'il existe un facteur G *commun à* A, B, C, *il est nécessaire que les polynomes donnés* R *et* S *possèdent un facteur commun.*

Or, d'après (28), il est clair que R et S n'admettent comme facteur commun que le polynome de degré ρ

$$J(m, n) = \prod_{i=1}^{i=\rho} (\gamma_i + m + n).$$

Par conséquent si $\rho = 0$, ce facteur se réduit à 1 (sans intérêt dans cette recherche); *donc quels que soient les polynomes arbitraires* H *et* K, *il n'existe pas de facteur* G *commun à* A, B, C; *on sait* a priori *que, pour la fonction hypergéométrique correspondante, il n'existera pas d'équation entre les dérivées du tableau* (39).

Tel est, pour l'ordre 1, le cas des fonctions F_2 et F_4 [1]; pour l'ordre 2 (d'après le tableau de la page 152) celui des fonctions complètes des types 2, 5, 8; des fonctions de classe 1, des types 2 et 5; de la fonction de classe 2, du type 2 [2].

Supposons $\rho \geq 1$: R et S admettent comme facteur commun le polynome J; il faudra examiner si l'on peut choisir les polynomes H et K de manière qu'il existe un facteur G commun à J et à C, c'est-à-dire à J et à

$$H(m, n) \prod_{i=1}^{i=\nu} (\beta_i + m) + K(m, n) \prod_{i=1}^{i=\nu} (\beta'_i + n);$$

puis il faudra vérifier, après la division par G, si les polynomes A′, B′, C′ ne possèdent plus que des termes du degré voulu.

Étudions en détail la combinaison la plus simple qui consiste à poser

$$H = \prod_{i=1}^{i=\nu} (\beta'_i + n), \qquad K = -\prod_{i=1}^{i=\nu} (\beta_i + m).$$

L'équation simplifiée (71) s'écrit alors

$$(73) \qquad (m+1) \prod_{i=1}^{i=\sigma} (\delta_i + m) \prod_{i=1}^{i=\nu} (\beta'_i + n) a_{m+1,n} - (n+1) \prod_{i=1}^{i=\sigma} (\delta'_i + n) \prod_{i=1}^{i=\nu} (\beta_i + m) a_{m,n+1} = 0.$$

Le coefficient de $a_{m+1,n}$ contient un terme en $m^{\sigma+1} n^{\nu}$ et celui de $a_{m,n+1}$ un terme en $m^{\nu} n^{\sigma+1}$; pour qu'on se trouve dans les conditions convenables il faut et il suffit que

$$\sigma + 1 = \nu \qquad \text{et} \qquad \nu = \sigma$$

---

[1] Résultat conforme à celui du paragraphe XIII.

[2] Nous avons donné effectivement page 166, les neuf intégrales indépendantes du système de cette fonction.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

ou

$$\rho+\sigma+1=\omega+1\leqq\rho+\omega \qquad \text{et} \qquad \mu+\nu=\omega+1-\theta\leqq\mu+\omega;$$

d'où

$$\rho\geqq 1 \qquad \text{et} \qquad \mu\geqq 1-\theta.$$

Pour toute fonction hypergéométrique telle que $\rho\geqq 1$, $\mu\geqq 1-\theta$, *l'équation* (73) *conduit à une équation aux dérivées partielles du type cherché.*

Pour le 1er ordre, la fonction F_1 est seule dans ce cas; l'équation supplémentaire qui se déduit de (73) est l'équation (12-XIV).

Sur les 22 fonctions d'ordre 2, il y en a 14 qui se rangent dans cette catégorie.

4 du *type* 1 :

$\nu=0,\ \rho=1,\ \sigma=1;$ classe $\theta=0:\mu=3;$ $\theta=1:\mu=2;$ $\theta=2:\mu=1;$ $\theta=3:\mu=0$ (1).

$$(m+1)(\delta+m)a_{m+1,n}-(n+1)(\delta'+n)a_{m,n+1}=0,$$
$$xp_{2,0}-yp_{0,2}+\delta p_{1,0}-\delta' p_{0,1}=0.$$

3 du *type* 3 :

$\nu=1,\ \rho=2,\ \sigma=0;$ classe $\theta=0:\mu=2;$ $\theta=1:\mu=1;$ $\theta=2:\mu=0$ (2).

$$(m+1)(\beta'+n)a_{m+1,n}-(n+1)(\beta+m)a_{m,n+1}=0,$$
$$(x-y)p_{1,1}-\beta' p_{1,0}+\beta p_{0,1}=0.$$

3 du *type* 4 :

$\nu=1,\ \rho=1,\ \sigma=1;$ classe $\theta=0:\mu=2;$ $\theta=1:\mu=1;$ $\theta=2:\mu=0.$

$$(m+1)(\delta+m)(\beta'+n)a_{m+1,n}-(n+1)(\delta'+n)(\beta+m)a_{m,n+1}=0,$$
$$xyp_{2,1}-xyp_{1,2}+\beta' xp_{2,0}-\beta yp_{0,2}+(\delta y-\delta' x)p_{1,1}+\delta\beta' p_{1,0}-\delta'\beta p_{0,1}=0.$$

2 du *type* 6 :

$\nu=2,\ \rho=2,\ \sigma=0;$ classe $\theta=0:\mu=1;$ $\theta=1:\mu=0.$

$$(m+1)(\beta'_1+n)(\beta'_2+n)a_{m+1,n}-(n+1)(\beta_1+m)(\beta_2+m)a_{m,n+1}=0,$$
$$x^2p_{2,1}-y^2p_{1,2}+[(1+\beta_1+\beta_2)x-(1+\beta'_1+\beta'_2)y]p_{1,1}-\beta'_1\beta'_2p_{1,0}+\beta_1\beta_2p_{0,1}=0.$$

2 du *type* 7 :

$\nu=2,\ \rho=1,\ \sigma=1;$ classe $\theta=0:\mu=1;$ $\theta=1:\mu=0.$

$$(m+1)(\delta+m)(\beta'_1+n)(\beta'_2+n)a_{m+1,n}-(n+1)(\delta'+n)(\beta_1+m)(\beta_2+m)a_{m,n+1}=0,$$
$$\begin{aligned}xy(x-y)p_{2,2}&+[\delta' x-(1+\beta'_1+\beta'_2)y]xp_{2,1}-[\delta y-(1+\beta_1+\beta_2)x]yp_{1,2}\\&+[\delta'(1+\beta_1+\beta_2)x-\delta(1+\beta'_1+\beta'_2)y]p_{1,1}\\&-\beta'_1\beta'_2xp_{2,0}+\beta_1\beta_2yp_{0,2}-\delta\beta'_1\beta'_2p_{1,0}+\delta'\beta_1\beta_2p_{0,1}=0\ (3).\end{aligned}$$

---

(1) Fonction étudiée à la page 167; l'équation supplémentaire se confond avec (55).

(2) Fonction étudiée à la page 170; l'équation supplémentaire se confond avec (62).

(3) Pour chacune de ces cinq équations supplémentaires, on peut déterminer [comme nous l'avons fait dans

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Ce choix de H, K n'est pas le seul possible; contentons-nous d'étudier encore le suivant [1]

$$H = (\gamma_1 + n)\prod_{i=1}^{i=\nu}(\beta'_i + n), \qquad K = m\prod_{i=1}^{i=\nu}(\beta_i + m).$$

On trouve facilement que A′ possède des termes en $m^{\rho+\sigma} n^{\nu+1}, \ldots, m^{\sigma+1} n^{\rho+\nu}$; B′ en $m^{\rho+\nu} n^{\sigma+1}, \ldots, m^{\nu+1} n^{\rho+\sigma}$; C′ en $m^{\mu+\nu} n^{\nu}, \ldots, m^{\nu} n^{\mu+\nu}$. Pour être dans les conditions voulues il faut et il suffit que

$$\sigma + 1 \leqq \omega, \qquad \mu + \nu \leqq \omega, \qquad \rho + \nu \leqq \omega, \qquad \nu + 1 \leqq \omega$$

ou

$$\rho + \sigma + 1 = \omega + 1 \leqq \rho + \omega; \qquad \omega + 1 - \theta \leqq \omega; \qquad \rho + \omega + 1 - \theta \leqq \mu + \omega; \qquad \omega + 2 - \theta \leqq \mu + \omega;$$

d'où

$$\rho \geqq 1; \qquad \theta \geqq 1; \qquad \mu \geqq \rho + 1 - \theta; \qquad \mu \geqq 2 - \theta.$$

Pour toute fonction hypergéométrique telle que $\rho \geqq 1$, $\theta \geqq 1$, $\mu \geqq \rho + 1 - \theta$ *cette combinaison conduit à une équation aux dérivées partielles du type cherché.*

Tel est le cas, pour l'ordre 2, des fonctions de classe 1 du type 1 et 4; de classe 2, du type 1 et 4; de classe 3, du type 1. Par exemple, pour cette dernière fonction (étudiée à la page 167) on obtient l'équation simplifiée

$$(m+1)(\delta + m)(\gamma + n)a_{m+1,n} + (n+1)(\delta' + n)m\,a_{m,n+1} - a_{m,n} = 0,$$

qui donne l'équation supplémentaire

$$xy\,p_{2,1} + xy\,p_{1,2} + \gamma x\,p_{2,0} + (\delta y + \delta' x)p_{1,1} + \gamma\delta\,p_{1,0} - p_{0,0} = 0$$

qui se confond avec l'équation (57).

---

la remarque de la page 53 pour l'équation supplémentaire (12-XIV) de F_1] la série entière $\Sigma a_{m,n} x^m y^n$ la plus générale qui la vérifie. Par exemple, pour la cinquième on trouve

$$a_{m,n} = \frac{(\beta_1, m)(\beta'_1, n)(\beta_2, m)(\beta'_2, n)}{(\delta, m)(\delta', n)(1, m)(1, n)}\,\psi(m+n),$$

la fonction $\psi(m+n)$ étant arbitraire.

[1] On obtient naturellement ρ combinaisons en remplaçant successivement γ_1 par $\gamma_2, \ldots, \gamma_\rho$.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

DEUXIÈME PARTIE.

LES

FONCTIONS HYPERSPHÉRIQUES

ET

LES POLYNOMES D'HERMITE

CHAPITRE I.

L'ÉQUATION DE LAPLACE ET LES FONCTIONS HARMONIQUES.

LI. — Le paramètre différentiel $\Delta^2 F$ de Laplace et les paramètres $\Delta^{2j} F$.

Étant donnée une fonction réelle de q variables réelles $F(z_1, \ldots, z_q)$, on est conduit dans plusieurs importantes théories de l'Analyse à considérer l'expression

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 F}{\partial z_q^2}$$

qui est définie pour toutes les valeurs des variables pour lesquelles la fonction F possède des dérivées secondes. On représente habituellement cette expression par le symbole

$$\Delta^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 F}{\partial z_q^2}, \tag{1}$$

auquel on a attaché le nom de Laplace, parce que cet illustre analyste a été le premier à lui faire jouer un rôle dans ses recherches sur l'attraction newtonienne des sphéroïdes et sur la figure d'équilibre des planètes [1]. Laplace, il est vrai, n'a jamais envisagé que le cas de trois variables ($q = 3$); c'est G. Green [2], semble-t-il, qui a considéré le premier l'expression $\Delta^2 F$ pour une fonction d'un nombre quelconque de variables.

Si l'on considère (comme nous le ferons constamment) *les q variables réelles $z_1, \ldots, z_q$ comme les coordonnées rectangulaires d'un point de l'espace à q dimensions, on peut donner de* $\Delta^2 F$

(1) P.-S. Laplace, *Mécanique céleste*, t. II.

(2) G. Green, *On the determination of the attractions of ellipsoïds of variable densities* (*Trans. Cambr. philos. Soc.*, t. V, 1832-1834, p. 395).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

(ainsi que nous le démontrerons plus loin) *une définition complètement indépendante du choix des axes de coordonnées.* Cette propriété d'invariance de $\Delta^2 F$ par rapport à un changement d'axes lui a fait donner, d'après Lamé [1], le nom de *paramètre différentiel du second ordre de la fonction* F; *le paramètre différentiel du premier ordre étant l'expression*

$$\Delta_1 F = \left(\frac{\partial F}{\partial z_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial z_q}\right)^2$$

qui intervient fréquemment dans les formules relatives à $\Delta^2 F$.

L'expression $\Delta^2 F$ étant elle-même une fonction de $z_1, \ldots, z_q$, si cette fonction possède des dérivées secondes, on peut calculer l'expression

$$\Delta^2[\Delta^2 F] = \frac{\partial^2[\Delta^2 F]}{\partial z_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2[\Delta^2 F]}{\partial z_q^2},$$

on la désigne par le symbole $\Delta^4 F$; d'une manière générale, on définit le symbole $\Delta^{2j} F$ par la formule de récurrence

$$\Delta^{2j} F = \Delta^2[\Delta^{2j-2} F].$$

L'expression de $\Delta^{2j} F$ s'obtient aisément, en employant la méthode symbolique connue qui consiste à représenter la dérivée $\frac{\partial^{m_1+\ldots+m_q} F}{\partial z_1^{m_1} \ldots \partial z_q^{m_q}}$ par le produit $\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{m_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial z_q}\right)^{m_q} F$.

En effet, on a

$$\Delta^2 F = \left[\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial}{\partial z_q}\right)^2\right] F,$$

d'où l'on tire immédiatement

$$\Delta^{2j} F = \left[\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial}{\partial z_q}\right)^2\right]^j F;$$

ce qui donne en développant

$$(2) \qquad \Delta^{2j} F = \sum \frac{(1, j)}{(1, j_1) \ldots (1, j_q)} \frac{\partial^{2j} F}{\partial z_1^{2j_1} \ldots \partial z_q^{2j_q}},$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs positives ou nulles des entiers $j_1, \ldots, j_q$ vérifiant la condition

$$j_1 + \ldots + j_q = j.$$

LII. — Expression des paramètres différentiels $\Delta_1 F$ et $\Delta^2 F$ dans un système de coordonnées curvilignes quelconques.

Pour fixer la position d'un point de l'espace à q dimensions il y a souvent intérêt à se donner, au lieu de ses coordonnées rectangulaires $z_1, \ldots, z_q$, *un système de coordonnées curvilignes* $u_1, \ldots, u_q$ liées aux précédentes par les relations

$$z_k = \varphi_k(u_1, \ldots, u_q) \qquad (k = 1, 2, \ldots, q).$$

[1] G. Lamé, *Traité des coordonnées curvilignes.*

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Nous allons rechercher ce que deviennent $\Delta_1 F$ et $\Delta^2 F$ quand on exprime F en fonction de ces nouvelles variables; nous obtiendrons ces expressions en généralisant une méthode employée par Jacobi [1] dans le cas d'un système de coordonnées curvilignes triple orthogonal.

Nous partons du théorème fondamental du Calcul des variations (démontré dans tous les traités d'Analyse) [2] : si dans l'intégrale

$$I = \int_A^q \Phi\left(z_1, \ldots, z_q, F, \frac{\partial F}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial z_q}\right) dz_1 \ldots dz_q$$

on donne à la fonction F une variation δF s'annulant sur la frontière du domaine A, la variation de l'intégrale a pour valeur

$$\delta I = \int_A^q \left[\frac{\partial \Phi}{\partial F} - \sum_{j=1}^{j=q} \frac{\partial}{\partial z_j}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \frac{\partial F}{\partial z_j}}\right)\right] \delta F \, dz_1 \ldots dz_q,$$

le symbole $\frac{\partial \Phi}{\partial \frac{\partial F}{\partial z_j}}$ désignant la dérivée partielle de la fonction Φ par rapport à $\frac{\partial F}{\partial z_j}$ envisagée comme une variable indépendante.

Considérons alors l'intégrale

$$I = \frac{1}{2} \int_A^q \Delta_1 F \, dz_1 \ldots dz_q.$$

D'après l'expression du paramètre différentiel du premier ordre $\Delta_1 F$, il est clair que

$$\frac{1}{2} \frac{\partial(\Delta_1 F)}{\partial \frac{\partial F}{\partial z_j}} = \frac{\partial F}{\partial z_j},$$

donc

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{j=q} \frac{\partial}{\partial z_j}\left[\frac{\partial(\Delta_1 F)}{\partial \frac{\partial F}{\partial z_j}}\right] = \sum_{j=1}^{j=q} \frac{\partial^2 F}{\partial z_j^2} = \Delta^2 F.$$

Par conséquent la variation de l'intégrale I a pour valeur

$$\delta I = -\int_A^q \Delta^2 F \, \delta F \, dz_1 \ldots dz_q.$$

Faisons dans les deux intégrales I et δI le changement de variables

$$z_k = \varphi_k(u_1, \ldots, u_q) \qquad (k = 1, 2, \ldots, q);$$

désignons par $\overline{\Delta_1 F}$ et $\overline{\Delta^2 F}$ ce que deviennent les paramètres différentiels $\Delta_1 F$ et $\Delta^2 F$ avec

---

[1] C.-G.-J. Jacobi, *Journ. reine und angew. Math.*, t. XXXVI, 1848, p. 117.

[2] *Voir* par exemple C. Jordan, *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, t. III, où se trouve notamment reproduit (p. 545) le calcul de Jacobi relatif au cas d'un système triple orthogonal.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

ce nouveau système de variables et par D le jacobien $\frac{D(z_1, \ldots, z_q)}{D(u_1, \ldots, u_q)}$.

Nous aurons

$$(3) \qquad I = \frac{1}{2} \int_{A_1}^{q} \overline{\Delta_1 F}\, D\, du_1 \ldots du_q,$$

$$(3') \qquad \delta I = -\int_{A_1}^{q} \overline{\Delta^2 F}\, \delta F\, D\, du_1 \ldots du_q,$$

A_1 désignant le domaine de variation des variables $u_1, \ldots, u_q$ correspondant au domaine A des coordonnées $z_1, \ldots, z_q$.

Or si l'on applique à l'intégrale I, sous sa nouvelle forme (3), la formule fondamentale du Calcul des variations, on obtient immédiatement cette expression de la variation δI

$$(4) \qquad \delta I = -\frac{1}{2} \int_{A_1}^{q} \sum_{j=1}^{j=q} \frac{\partial}{\partial u_j} \left[\frac{\partial (D \overline{\Delta_1 F})}{\partial \frac{\partial F}{\partial u_j}} \right] \delta F\, du_1 \ldots du_q.$$

Nous avons ainsi deux expressions (3′) et (4) de la variation δI dans le système des variables $u_1, \ldots, u_q$; ces deux expressions doivent être identiques quel que soit le domaine A_1 qui demeure arbitraire; il en résulte, par l'application d'un principe classique, que les fonctions contenues sous le signe somme dans les formules (3′) et (4) doivent être égales; ce qui donne

$$\overline{\Delta^2 F} = \frac{1}{2D} \sum_{j=1}^{j=q} \frac{\partial}{\partial u_j} \left[\frac{\partial (D \overline{\Delta_1 F})}{\partial \frac{\partial F}{\partial u_j}} \right].$$

Cette relation ramène la recherche de l'expression de $\overline{\Delta^2 F}$ à celle de $\overline{\Delta_1 F}$, qui s'obtient immédiatement. En effet

$$\Delta_1 F = \sum_{j=1}^{j=q} \left(\frac{\partial F}{\partial z_j} \right)^2, \qquad \text{d'où} \qquad \overline{\Delta_1 F} = \sum_{j=1}^{j=q} \left(\frac{\partial F}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial z_j} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial u_q} \frac{\partial u_q}{\partial z_j} \right)^2.$$

Posons donc

$$E_{j,k} = \frac{\partial u_j}{\partial z_1} \frac{\partial u_k}{\partial z_1} + \ldots + \frac{\partial u_j}{\partial z_q} \frac{\partial u_k}{\partial z_q} \qquad (E_{j,k} = E_{k,j}).$$

Nous obtenons l'*expression du premier paramètre différentiel*

$$(5) \qquad \overline{\Delta_1 F} = \sum_{j=1}^{j=q} \sum_{k=1}^{k=q} E_{j,k} \frac{\partial F}{\partial u_j} \frac{\partial F}{\partial u_k}.$$

De cette expression nous tirons

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (D \overline{\Delta_1 F})}{\partial \frac{\partial F}{\partial u_j}} = D \sum_{k=1}^{k=q} E_{j,k} \frac{\partial F}{\partial u_k}.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

D'où l'*expression du second paramètre différentiel* dans un système quelconque de coordonnées curvilignes

$$(5') \qquad \overline{\Delta^2 F} = \frac{1}{D}\sum_{j=1}^{j=q}\frac{\partial}{\partial u_j}\left(D\sum_{k=1}^{k=q}E_{j,k}\frac{\partial F}{\partial u_k}\right).$$

Les formules (5) et (5') résolvent le problème posé.

On peut leur donner une autre forme lorsque l'on connaît l'*expression de l'élément d'arc* (distance de deux points infiniment voisins de coordonnées $z_1, \ldots, z_q$ et $z_1 + dz_1, \ldots, z_q + dz_q$) dans le système de coordonnées curvilignes considéré

$$ds^2 = dz_1^2 + \ldots + dz_q^2 = \sum_{j=1}^{j=q}\sum_{k=1}^{k=q} H_{j,k}\, du_j\, du_k,$$

où

$$H_{j,k} = \frac{\partial z_1}{\partial u_j}\frac{\partial z_1}{\partial u_k} + \ldots + \frac{\partial z_q}{\partial u_j}\frac{\partial z_q}{\partial u_k} \qquad (H_{j,k} = H_{k,j}).$$

En effet, en désignant par H le déterminant symétrique d'ordre n formé avec les quantités $H_{j,k}$ et par $D_{j,k}$ le mineur relatif à $H_{j,k}$ dans le développement de H

$$D_{j,k} = \frac{\partial H}{\partial H_{j,k}} \qquad (D_{j,k} = D_{k,j}),$$

on établit [1] facilement que le jacobien D et les coefficients $E_{j,k}$ ont pour valeur

$$D = \sqrt{H}, \qquad E_{j,k} = \frac{D_{j,k}}{H}.$$

D'où une nouvelle forme des expressions de $\overline{\Delta_1 F}$ *et* $\overline{\Delta^2 F}$ *ne dépendant plus que des quantités figurant dans l'expression de l'élément d'arc*

$$(6) \qquad \overline{\Delta_1 F} = \sum_{j=1}^{j=q}\sum_{k=1}^{k=q}\frac{D_{j,k}}{H}\frac{\partial F}{\partial u_j}\frac{\partial F}{\partial u_k},$$

$$(6') \qquad \overline{\Delta^2 F} = \frac{1}{\sqrt{H}}\sum_{j=1}^{j=q}\frac{\partial}{\partial u_j}\left(\frac{1}{\sqrt{H}}\sum_{k=1}^{k=q}D_{j,k}\frac{\partial F}{\partial u_k}\right).$$

Si dans cette dernière formule on effectue les dérivations, la dérivée seconde $\frac{\partial^2 F}{\partial u_j\, \partial u_k}$ a pour coefficient l'expression $\frac{D_{j,k}}{H}$; quant au coefficient de la dérivée première $\frac{\partial F}{\partial u_k}$:

$$\frac{1}{\sqrt{H}}\sum_{j=1}^{j=q}\frac{\partial}{\partial u_j}\left(\frac{D_{j,k}}{\sqrt{H}}\right)$$

---

[1] Pour la démonstration, *voir* E. Beltrami, *Sulla teorica generale dei parametri differenziali* (*Mem. della Acad. delle Scienze dell'Ist. di Bologna*, 2e série, t. VIII, p. 549).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

il s'exprime d'une manière élégante au moyen des symboles à trois indices définis par Christoffel [1].

Cas particulier : le système de coordonnées curvilignes est orthogonal.

Lorsque les q surfaces

$$u_1 = C_1, \quad u_2 = C_2, \quad \ldots, \quad u_k = C_k,$$

passant par un point quelconque se coupent orthogonalement, on dit que le système de coordonnées est orthogonal; ce fait s'exprime par les conditions

$$H_{j,k} = 0 \quad (j \neq k).$$

Comme on doit avoir $H_{j,j} > 0$, posons $H_{j,j} = h_j^2$; d'où

$$H = h_1^2 \ldots h_q^2,$$

$$D_{j,k} = 0 \quad (j \neq k), \qquad D_{j,j} = \frac{h_1^2 \ldots h_q^2}{h_j^2}.$$

On tire de (6) et (6') dans ce cas particulier

$$\overline{\Delta_1 F} = \sum_{j=1}^{j=q} \frac{1}{h_j^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u_j}\right)^2, \tag{7}$$

$$\overline{\Delta^2 F} = \frac{1}{h_1 \ldots h_q} \sum_{j=1}^{j=q} \frac{\partial}{\partial u_j} \left(\frac{h_1 \ldots h_q}{h_j^2} \frac{\partial F}{\partial u_j}\right). \tag{7'}$$

Application : les paramètres différentiels $\Delta_1 F$ et $\Delta^2 F$ ne changent pas de forme lorsque l'on effectue sur les variables une substitution orthogonale.

En effet, posons

$$z_j = a_j + \alpha_{1,j} u_1 + \ldots + \alpha_{q,j} u_q \quad (j = 1, 2, \ldots, q), \tag{8}$$

les constantes α étant liées par les relations

$$\sum_{j=1}^{j=q} \alpha_{k,j}^2 = 1, \qquad \sum_{j=1}^{j=q} \alpha_{k,j} \alpha_{m,j} = 0 \quad (k \neq m), \tag{8'}$$

d'où

$$ds^2 = dz_1^2 + \ldots + dz_q^2 = du_1^2 + \ldots + du_q^2.$$

En appliquant les formules (7) et (7'), nous obtenons

$$\overline{\Delta_1 F} = \left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial u_q}\right)^2, \qquad \overline{\Delta^2 F} = \frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 F}{\partial u_q^2}, \tag{9}$$

donc les paramètres différentiels conservent la même forme avec les variables u qu'avec les variables z. Comme les formules (8) définissent un changement d'axes de coordonnées dans l'espace à q dimensions, *on voit qu'un tel changement n'altère pas la forme de $\Delta_1 F$ et $\Delta^2 F$*, qui se trouvent ainsi être indépendants du système d'axes choisi.

---

[1] CHRISTOFFEL. *Ueber der Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades* (*Jour. reine und angew. Math.*, t. LXX, 1869, p. 46).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Remarque. - Étant données deux fonctions $F(z_1, \ldots, z_q)$ et $\Phi(z_1, \ldots, z_q)$, on peut définir un nouveau paramètre différentiel du premier ordre par la formule

$$\Delta(F, \Phi) = \frac{\partial F}{\partial z_1}\frac{\partial \Phi}{\partial z_1} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial z_q}\frac{\partial \Phi}{\partial z_q}.$$

On a évidemment

$$\Delta(F, \Phi) = \Delta(\Phi, F).$$

Le paramètre différentiel $\Delta_1 F$ en est un cas particulier

$$\Delta_1 F = \Delta(F, F).$$

Ce paramètre $\Delta(F, \Phi)$, qui intervient dans plusieurs formules importantes relatives à $\Delta_1 F$ et $\Delta^2 F$, a pour expression dans un système de coordonnées curvilignes

$$\overline{\Delta(F, \Phi)} = \sum_{j=1}^{j=q} \sum_{k=1}^{k=q} E_{j,k} \frac{\partial F}{\partial u_j}\frac{\partial \Phi}{\partial u_k}$$

$$= \sum_{j=1}^{j=q} \sum_{k=1}^{k=q} \frac{D_{j,k}}{H} \frac{\partial F}{\partial u_j}\frac{\partial \Phi}{\partial u_k}.$$

En particulier si le système de coordonnées est orthogonal

$$\overline{\Delta(F, \Phi)} = \sum_{j=1}^{j=q} \frac{1}{h_j^2} \frac{\partial F}{\partial u_j}\frac{\partial \Phi}{\partial u_j}.$$

On en déduit, comme pour $\Delta_1 F$ et $\Delta^2 F$, que $\Delta(F, \Phi)$ n'est pas altéré par une substitution orthogonale; il est donc aussi indépendant du système d'axes choisi.

LIII. — L'équation de Laplace.

On dit qu'une fonction $F(z_1, \ldots, z_q)$, qui vérifie l'équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre

$$\Delta^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 F}{\partial z_q^2} = 0, \tag{10}$$

est une *solution de l'équation de Laplace.* L'étude de cette équation aux dérivées partielles, la plus simple des équations du type elliptique (ou à caractéristiques imaginaires), a fait l'objet d'un très grand nombre de travaux, surtout dans le cas de deux ou trois variables. Nous nous proposons seulement de résumer ici les plus simples des résultats acquis, sur lesquels nous aurons à nous appuyer dans la suite.

Parmi toutes les solutions de l'équation de Laplace, il en est une qui joue un rôle fondamental; c'est celle qui dans le cas de $q = 2$ (plan) ou de $q = 3$ (espace) est connue sous le nom de *potentiel logarithmique* ou de *potentiel newtonien* d'une masse attirante punctiforme.

Soit r la distance du point $P(z_1, \ldots, z_q)$ à l'origine O des axes

$$r^2 = z_1^2 + \ldots + z_q^2,$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

cherchons s'il existe une fonction de r seulement

$$F = F(r)$$

qui vérifie l'équation de Laplace. Comme

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z_k^2} = \frac{d^2 F}{dr^2}\frac{z_k^2}{r^2} + \frac{dF}{dr}\left(\frac{1}{r} - \frac{z_k^2}{r^3}\right),$$

nous obtenons l'équation

$$\Delta^2 F = \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{dF}{dr}\frac{q-1}{r} = 0,$$

dont la solution générale est, si $q \neq 2$, *le potentiel dans l'espace à q dimensions*

$$F = a\frac{1}{r^{q-2}} + b \tag{11}$$

et, si $q = 2$ (espace plan), le potentiel logarithmique

$$F = a \operatorname{Log}\frac{1}{r} + b. \tag{11'}$$

Le potentiel dans l'espace à q dimensions $F = \frac{1}{r^{q-2}}$ donne naissance à une infinité d'autres solutions de l'équation de Laplace, grâce aux remarques suivantes d'un usage constant :

1° *Si F est une solution de l'équation de Laplace, il en est de même de ses dérivées partielles d'un ordre quelconque.*

Il suffit pour le prouver de partir de l'identité

$$\Delta^2\left[\frac{\partial^{m_1+\ldots+m_q} F}{\partial z_1^{m_1}\ldots\partial z_q^{m_q}}\right] = \frac{\partial^{m_1+\ldots+m_q}}{\partial z_1^{m_1}\ldots\partial z_q^{m_q}}[\Delta^2 F]$$

qui exprime simplement le fait que, dans une dérivée partielle, on peut intervertir l'ordre des dérivations.

Donc toutes les dérivées partielles du potentiel

$$\frac{\partial^{m_1+\ldots+m_q}}{\partial z_1^{m_1}\ldots\partial z_q^{m_q}}\left(\frac{1}{r^{q-2}}\right)$$

sont des solutions de l'équation de Laplace.

2° *Si $F(z_1, \ldots, z_q)$ est une solution de l'équation de Laplace, il en est de même de $F(u_1, \ldots, u_q)$, les variables u étant définies en fonction des variables z par une substitution orthogonale*

$$u_j = a_j + \alpha_{1,j} z_1 + \ldots + \alpha_{q,j} z_q \qquad (j = 1, 2, \ldots, q), \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{j=q} \alpha_{kj}^2 = 1, \qquad \sum_{j=1}^{j=q} \alpha_{kj}\alpha_{mj} = 0 \qquad (k \neq m). \tag{8'}$$

En effet, d'après la formule (9), on a

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 F}{\partial u_q^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 F}{\partial z_q^2} = 0.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Comme première application de cette remarque, on obtient la solution presque évidente

$$[(z_1 - a_1)^2 + \ldots + (z_q - a_q)^2]^{-\frac{q-2}{2}}$$

qui se déduit du potentiel $\frac{1}{r^{q-2}}$ par la substitution de $z_j - a_j$ à z_j; elle est un peu plus générale puisqu'il y figure la distance du point P $(z_1, \ldots, z_q)$ au point *arbitraire* A $(a_1, \ldots, a_q)$ au lieu de la distance r du point P à l'origine O des axes.

La même remarque permet d'établir la proposition suivante, moins immédiate:

La fonction

$$F = (u_1^2 + \ldots + u_k^2)^{-\frac{k-2}{2}} \qquad (2 < k \leq q),$$

où $u_1, \ldots, u_k$ désignent les distances du point P$(z_1, \ldots, z_q)$ *à k hyperplans rectangulaires* (¹) *donnés, est une solution de l'équation de Laplace.*

En effet la fonction F vérifie évidemment, par rapport aux variables $u_1, \ldots, u_q$, l'équation

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 F}{\partial u_q^2} = 0,$$

car d'une part

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_{k+1}^2} = \ldots = \frac{\partial^2 F}{\partial u_q^2} = 0,$$

et d'autre part

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 F}{\partial u_k^2} = 0,$$

puisqu'on peut considérer F comme le potentiel (11) dans un espace à k dimensions où les coordonnées rectangulaires seraient $u_1 \ldots, u_k$.

Donc si nous effectuons sur les u la substitution orthogonale

$$(8) \qquad u_j = a_j + \alpha_{1,j} z_1 + \ldots + \alpha_{q,j} z_q \qquad (j = 1, 2, \ldots, q),$$

d'après notre remarque la fonction F vérifiera par rapport aux nouvelles variables z, l'équation de Laplace $\Delta^2 F = 0$.

(¹) Rappelons qu'un hyperplan (multiplicité ou variété linéaire à $q-1$ dimensions) étant le lieu des points dont les coordonnées vérifient une équation linéaire

$$A_1 z_1 + \ldots + A_q z_q - B = 0,$$

la distance δ d'un point P$(z_1, \ldots, z_q)$ à cet hyperplan a pour expression

$$\delta = \frac{A_1 z_1 + \ldots + A_q z_q - B}{\sqrt{A_1^2 + \ldots + A_q^2}};$$

en outre l'on dit que deux hyperplans définis par les équations

$$A_1 z_1 + \ldots + A_q z_q - B = 0,$$

et

$$A'_1 z_1 + \ldots + A'_q z_q - B' = 0$$

sont rectangulaires lorsque l'on a

$$A_1 A'_1 + \ldots + A_q A'_q = 0.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Ceci étant, soient k hyperplans rectangulaires définis par les équations

$$A_1^j z_1 + \ldots + A_q^j z_q + B^j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Comme on doit avoir, pour exprimer leur orthogonalité deux à deux,

$$A_1^i A_1^j + \ldots + A_q^i A_q^j = 0 \qquad (i \neq j) \qquad \begin{matrix}(i = 1, 2, \ldots, k),\\ (j = 1, 2, \ldots, k),\end{matrix}$$

nous voyons que dans la substitution orthogonale (8), nous pouvons choisir les coefficients α des k premières équations de transformation, de telle manière qu'elles s'écrivent

$$u_j = \frac{A_1^j z_1 + \ldots + A_q^j z_q + B^j}{\sqrt{A_1^{j\,2} + \ldots + A_q^{j\,2}}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Les k premières équations de la substitution orthogonale étant ainsi choisies, il est clair que les quantités : $u_1, \ldots, u_k$ qui figurent dans la solution

$$F = (u_1^2 + \ldots + u_k^2)^{-\frac{k-2}{2}}$$

sont précisément les distances du point $P(z_1, \ldots, z_q)$ aux k hyperplans rectangulaires

$$A_1^j z_1 + \ldots + A_q^j z_q + B^j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

ce qui démontre le résultat énoncé.

En particulier partons des hyperplans

$$\begin{matrix} a_1 z_1 + \ldots + a_h z_h + 1 = 0 \qquad (h \leq q), \\ z_{h+1} = 0, \qquad \ldots \qquad z_q = 0 \end{matrix}$$

qui sont au nombre de $k = q - h + 1$ et sont évidemment rectangulaires ; nous en déduisons la solution suivante de l'équation de Laplace

$$F = [(a_1 z_1 + \ldots + a_h z_h + 1)^2 + (a_1^2 + \ldots + a_h^2)(z_{h+1}^2 + \ldots + z_q^2)]^{-\frac{q-h-1}{2}}$$

qui a été donnée sous cette forme par P. Appell (1) et *qui jouera, parallèlement au potentiel*

$$(z_1^2 + \ldots + z_q^2)^{-\frac{q-2}{2}},$$

un rôle important dans notre étude.

Dans le cas où $k = 2$, la proposition générale reste vraie à condition de partir de la fonction

$$F = \mathrm{Log}(u_1^2 + u_2^2);$$

(1) P. Appell, *Les polynomes $U_{m,n}$ d'Hermite et leurs analogues rattachés aux fonctions sphériques dans l'hyperespace* (*Comptes rendus*, t. CLVI, 1913, p. 1589).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

en particulier si nous considérons les deux hyperplans rectangulaires

$$a_1 z_1 + \ldots + a_{q-1} z_{q-1} - 1 = 0,$$
$$z_q = 0,$$

nous obtenons une nouvelle solution de l'équation de Laplace

$$F = \operatorname{Log}[(a_1 z_1 + \ldots + a_{q-1} z_{q-1} - 1)^2 + (a_1^2 + \ldots + a_{q-1}^2) z_q^2].$$

3° La remarque suivante, découverte par Lord Kelvin [1] dans le cas de trois variables, conduit encore à des solutions nouvelles :

Si $F(z_1, \ldots, z_q)$ *est une solution de l'équation de Laplace, il en est de même de la fonction*

$$\frac{1}{r^{q-2}} F\left(k^2 \frac{z_1}{r^2}, \ldots, k^2 \frac{z_q}{r^2}\right).$$

k désignant une constante arbitraire.

En effet, effectuons le changement de variables

$$z_1 = k^2 \frac{u_1}{\rho^2}, \quad \ldots, \quad z_q = k^2 \frac{u_q}{\rho^2}, \quad \rho^2 = u_1^2 + \ldots + u_q^2; \tag{12}$$

les nouvelles variables $u_1, \ldots, u_q$ admettent une interprétation très simple : ce sont les coordonnées rectangulaires du point Q, *inverse* du point $P(z_1, \ldots, z_q)$ par rapport à l'hypersphère

$$z_1^2 + \ldots + z_q^2 = k^2.$$

L'élément d'arc se calcule aisément dans ce système de coordonnées

$$ds^2 = \frac{k^4}{\rho^4}(du_1^2 + \ldots + du_q^2);$$

le système est donc orthogonal.

La formule générale (7'), où il suffit de faire $h_j = \frac{k^2}{\rho^2}$, donne

$$\overline{\Delta^2 F} = \frac{\rho^{2q}}{k^{2q}} \left[\sum_{j=1}^{q} \frac{\partial}{\partial u_j}\left(\frac{k^{2q-4}}{\rho^{2q-4}} \frac{\partial F}{\partial u_j}\right)\right].$$

Or

$$\frac{1}{\rho^{2q-4}} \frac{\partial F}{\partial u_j} = \frac{1}{\rho^{q-2}}\left[\frac{\partial}{\partial u_j}\left(\frac{F}{\rho^{q-2}}\right) - F \frac{\partial}{\partial u_j}\left(\frac{1}{\rho^{q-2}}\right)\right],$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial u_j}\left(\frac{1}{\rho^{2q-4}} \frac{\partial F}{\partial u_j}\right) = \frac{1}{\rho^{q-2}} \frac{\partial^2}{\partial u_j^2}\left(\frac{F}{\rho^{q-2}}\right) - \frac{F}{\rho^{q-2}} \frac{\partial^2}{\partial u_j^2}\left(\frac{1}{\rho^{q-2}}\right).$$

Donc,

$$\overline{\Delta^2 F} = \frac{\rho^{q+2}}{k^4}\left[\sum_{j=1}^{q} \frac{\partial^2}{\partial u_j^2}\left(\frac{F}{\rho^{q-2}}\right) - F \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial^2}{\partial u_j^2}\left(\frac{1}{\rho^{q-2}}\right)\right].$$

---

[1] Lord KELVIN, *Journal de Mathématiques* (*Liouville*), t. XII, 1re série, 1847, p. 256.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Mais $\frac{1}{\rho^{q-2}}$ étant le potentiel (11) dans un espace de coordonnées rectangulaires $u_1, \ldots, u_q$

$$\sum_{j=1}^{j=q} \frac{\partial^2}{\partial u_j^2}\left(\frac{1}{\rho^{q-2}}\right) = 0.$$

D'où finalement l'expression de $\Delta^2 F$ dans le système de variables (12)

$$\overline{\Delta^2 F} = \frac{\rho^{q+2}}{k^4} \sum_{j=1}^{j=q} \frac{\partial^2}{\partial u_j^2}\left(\frac{F}{\rho^{q-2}}\right).$$

Cette expression légitime la proposition; on en conclut, en effet, que si la fonction $F(z_1, \ldots, z_q)$ vérifie, par rapport aux variables z, l'équation de Laplace

$$\Delta^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 F}{\partial z_q^2} = 0,$$

la fonction

$$\Phi(u_1, \ldots, u_q) = \frac{1}{\rho^{q-2}} F\left(k^2 \frac{u_1}{\rho^2}, \ldots, k^2 \frac{u_q}{\rho^2}\right)$$

vérifie, par rapport aux variables u, l'équation

$$\frac{k^4}{\rho^{q+2}} \overline{\Delta^2 F} \equiv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_q^2} = 0.$$

En remplaçant simplement dans la fonction Φ les lettres u_k par les lettres z_k, on voit que la fonction

(13) $$\Phi(z_1, \ldots, z_q) = \frac{1}{r^{q-2}} F\left(k^2 \frac{z_1}{r^2}, \ldots, k^2 \frac{z_q}{r^2}\right)$$

est bien une solution de l'équation de Laplace.

4° Soit $f(u)$ une fonction arbitraire assujettie seulement à posséder une dérivée seconde $f''(u)$; considérons la fonction

$$F(z_1, \ldots, z_q) = f(a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_q z_q),$$

$a_1, \ldots, a_q$ désignant des constantes; on a évidemment

$$\Delta^2 F = (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_q^2) f''(a_1 z_1 + \ldots + a_q z_q).$$

Si l'on choisit les constantes $a_1, \ldots, a_q$ de manière qu'elles vérifient la relation

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_q^2 = 0$$

(ce qui nécessite qu'une, au moins, de ces constantes soit imaginaire) la fonction $F(z_1, \ldots, z_q)$ est, quelle que soit la fonction $f(u)$, solution de l'équation de Laplace.

En particulier, prenons $f(u) = u^\nu$ (ν désignant un entier positif); nous en déduisons que *le polynome homogène et de degré ν*

$$F(z_1, \ldots, z_q) = (a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_q z_q)^\nu$$

dont les coefficients sont des nombres complexes dépendant de $q - 1$ constantes arbitraires *vérifie l'équation de Laplace.*

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Remarques. — 1° Les deux transformations que nous avons considérées : la première consistant en une substitution orthogonale portant sur les variables

$$[z_j, a_j + \alpha_{1j} z_1 + \ldots + \alpha_{qj} z_q],$$

la deuxième comprenant à la fois une inversion portant sur les variables

$$\left[z_j, k^2 \frac{z_j}{r^2}\right]$$

et un changement de fonction

$$\left[F, \frac{1}{r^{q-2}} F\right]$$

sont, avec toutes celles que l'on déduit de leur combinaison d'une manière quelconque, les seules transformations qui n'altèrent pas la forme de l'équation de Laplace [1].

2° Les procédés, permettant de déduire, d'une solution connue de l'équation de Laplace, une infinité d'autres solutions, sont loin d'être limités à ceux que nous avons exposés dans ce paragraphe. Par exemple, on peut construire de nouvelles solutions obtenues par intégration à partir du potentiel $\frac{1}{r^{q-2}}$; ces solutions sont représentées par l'intégrale k-uple de la fonction de $a_1, a_2, \ldots, a_q$:

$$\frac{\mu(a_1, \ldots, a_q)\, d\sigma_k}{[(z_1 - a_1)^2 + \ldots + (z_q - a_q)^2]^{\frac{q-2}{2}}}$$

lorsque l'on fait décrire au point $(a_1, \ldots, a_q)$ une multiplicité arbitraire à k dimensions de l'espace à q dimensions $(1 \leqq k \leqq q)$, d'élément infinitésimal $d\sigma_k$ — la fonction $\mu(a_1, \ldots, a_q)$ pouvant d'ailleurs être choisie arbitrairement.

Les solutions de ce type sont la généralisation des potentiels newtoniens d'un volume, d'une surface ou d'une ligne de densité μ, dans le cas de l'espace ordinaire $(q = 3)$.

Mais, en général, au lieu de chercher à construire artificiellement de nouvelles solutions à partir d'une solution connue, on se propose plutôt de déterminer des solutions vérifiant un certain nombre de conditions restrictives, que la nature des problèmes analytiques conduit naturellement à leur imposer *a priori*. Le problème de Dirichlet, nous offrira plus loin un exemple typique des problèmes de cette nature.

LIV. — Les formules de Green.

Les formules de Green, qui sont d'un usage constant dans l'étude des propriétés des solutions de l'équation de Laplace, permettent de transformer une intégrale étendue à un domaine à q dimensions en une intégrale étendue au domaine fermé à $q - 1$ dimensions qui sert de frontière au précédent.

Soit donc D un domaine à q dimensions, limité par la multiplicité fermée à $q - 1$ dimensions L (surface); nous désignerons par

$$dz = dz_1 \ldots dz_q$$

---

[1] *Cf.* pour le cas de $q = 3$. P. Painlevé, *Mémoires des Facultés de Lille*, t. I, 1889.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

l'élément de volume de D, par $d\sigma$ l'élément d'aire de la surface L et par $(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ les cosinus directeurs de la normale extérieure ν en un point de L; si la frontière L est définie par l'équation

$$f(z_1, \ldots, z_q) = 0,$$

les points du domaine intérieur D vérifiant d'autre part l'inégalité

$$f(z_1, \ldots, z_q) < 0,$$

les cosinus directeurs de la normale extérieure à L ont pour expression

$$\alpha_k = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial z_k}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z_q}\right)^2}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, q)$$

le radical étant pris avec sa détermination positive; on a en outre

$$+\alpha_1\, d\sigma = dz_2 \ldots dz_q, \qquad \ldots \qquad +\alpha_q\, d\sigma = dz_1 \ldots dz_{q-1}.$$

Si nous considérons alors q fonctions,

$$P_1(z_1, \ldots, z_q), \quad \ldots \quad P_q(z_1, \ldots, z_q)$$

continues à l'intérieur du domaine D, ainsi que les dérivées $\frac{\partial P_1}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial P_q}{\partial z_q}$, la *première formule de Green* s'exprime ainsi :

$$(1) \qquad \int_D^q \left(\frac{\partial P_1}{\partial z_1} + \ldots + \frac{\partial P_q}{\partial z_q}\right) dz = \int_L^{q-1} (\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_q P_q)\, d\sigma.$$

Pour établir ce résultat il suffit de remarquer que, dans l'une des intégrales dont la somme compose le premier membre, par exemple

$$\int_D^q \frac{\partial P_1}{\partial z_1}\, dz,$$

on peut effectuer l'intégration par rapport à la variable z_1

$$\int^{q-1} \left[\int \frac{\partial P_1}{\partial z_1}\, dz_1\right] dz_2 \ldots dz_q = \int^{q-1} [P_1^2 - P_1^1 + P_1^4 - P_1^3 + \ldots + P_1^{2k} - P_1^{2k-1}]\, dz_2 \ldots dz_q,$$

où P_1^j désigne la valeur prise par la fonction P_1 au $j^{\text{ième}}$ point de rencontre d'une parallèle à l'axe Oz_1 avec la surface L, ces points de rencontre étant numérotés dans le sens des z_1 croissants et étant nécessairement en nombre pair. Aux points de rencontre d'ordre pair, l'angle de la normale extérieure avec Oz_1 étant aigu, on a

$$dz_2 \ldots dz_q = +\alpha_1\, d\sigma;$$

au contraire aux points d'ordre impair, l'angle étant obtus

$$dz_2 \ldots dz_q = -\alpha_1\, d\sigma;$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

d'où

$$\int_D^q \frac{\partial P_1}{\partial z_1} dz = \int_{L_1}^{q-1} \alpha_1 P_1 \, d\sigma + \int_{L_2}^{q-1} \alpha_1 P_1 \, d\sigma + \ldots + \int_{L_{2k}}^{q-1} \alpha_1 P_1 \, d\sigma,$$

$L_1, \ldots, L_{2k}$ désignant les $2k$ fractions de la multiplicité L où l'angle de la normale ν avec Oz est alternativement obtus et aigu. L'ensemble des multiplicités $L_1, \ldots, L_{2k}$ étant équivalent à la multiplicité totale L, on peut écrire plus simplement

$$\int_D^q \frac{\partial P_1}{\partial z_1} dz = \int_L^{q-1} \alpha_1 P_1 \, d\sigma,$$

ce qui démontre la première formule de Green.

Appliquons cette formule au cas où les q fonctions P sont les dérivées partielles d'une même fonction F

$$P_1 = \frac{\partial F}{\partial z_1}, \qquad \ldots, \qquad P_q = \frac{\partial F}{\partial z_q},$$

qui doit par conséquent être continue ainsi que ses dérivées partielles jusqu'au second ordre à l'intérieur du domaine D considéré.

Dans ce cas

$$\frac{\partial P_1}{\partial z_1} + \ldots + \frac{\partial P_q}{\partial z_q} = \Delta^2 F ;$$

quant à l'expression

$$\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_q P_q = \alpha_1 \frac{\partial F}{\partial z_1} + \ldots + \alpha_q \frac{\partial F}{\partial z_q},$$

on la désigne sous le nom de *dérivée de la fonction* F, *prise en un point de la surface* L, *selon la normale extérieure* ν *à cette surface* (1) et nous la représenterons par le symbole $\frac{dF}{d\nu}$.

La formule de Green conduit donc au résultat suivant :

$$\int_D^q \Delta^2 F \, dz = \int_L^{q-1} \frac{dF}{d\nu} \, d\sigma, \tag{15}$$

qui joue un rôle important dans l'étude des solutions de l'équation de Laplace.

Appliquons encore la formule de Green au cas où les fonctions P sont de la forme

$$P_1 = \Phi \frac{\partial F}{\partial z_1}, \qquad \ldots, \qquad P_q = \Phi \frac{\partial F}{\partial z_q},$$

---

(1) D'une manière générale, étant donnés un point $P(z_1, \ldots, z_q)$ et une demi-droite D de cosinus directeurs $(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ issue de P, on désigne l'expression $\alpha_1 \frac{\partial F}{\partial z_1} + \ldots + \alpha_q \frac{\partial F}{\partial z_q}$ sous le nom de *dérivée de la fonction* F au point P selon la demi-droite D.

Si P′ désigne un point de D, c'est la limite du rapport

$$\frac{F(P') - F(P)}{PP'}$$

quand P′ tend vers P en restant sur D.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

les fonctions F et Φ étant continues ainsi que leurs dérivées partielles jusqu'au second ordre à l'intérieur de D.

D'une part,

$$\frac{\partial P_1}{\partial z_1} + \ldots + \frac{\partial P_q}{\partial z_q} = \Phi \Delta^2 F + \Delta(F, \Phi);$$

d'autre part,

$$\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_q P_q = \Phi \frac{dF}{d\nu};$$

par conséquent nous obtenons la formule

$$(16) \qquad \int_D^q \Phi \Delta^2 F \, d\tau + \int_D^q \Delta(F, \Phi) \, d\tau = \int_L^{q-1} \Phi \frac{dF}{d\nu} \, d\sigma,$$

qui contient comme cas particulier la formule (15) en y faisant $\Phi = 1$.

En renversant les rôles des fonctions F et Φ, nous pouvons écrire, par symétrie,

$$\int_D^q F \Delta^2 \Phi \, d\tau + \int_D^q \Delta(F, \Phi) \, d\tau = \int_L^{q-1} F \frac{d\Phi}{d\nu} \, d\sigma.$$

Nous tirons, par simple soustraction, de ces deux formules

$$(17) \qquad \int_D^q (\Phi \Delta^2 F - F \Delta^2 \Phi) \, d\tau = \int_L^{q-1} \left(\Phi \frac{dF}{d\nu} - F \frac{d\Phi}{d\nu} \right) d\sigma,$$

ce résultat constitue la *deuxième formule de Green.*

LV. — Fonctions harmoniques. — Problème de Dirichlet.

On dit qu'une fonction $F(z_1, \ldots, z_q)$ *est harmonique dans un domaine borné* D, *si elle est régulière en tout point de ce domaine, c'est-à-dire continue ainsi que ses dérivées partielles jusqu'au second ordre et si elle vérifie en tout point de ce domaine l'équation de Laplace*

$$\Delta^2 F = 0.$$

Lorsque le domaine D n'est pas borné, on impose en outre à la fonction F la condition que le produit $r^{q-2} F$ tende vers une limite finie quand r augmente indéfiniment; par exemple, le potentiel $F = \frac{1}{r^{q-2}}$ est harmonique dans tout domaine, même non borné, ne contenant pas l'origine.

Nous allons exposer rapidement les propriétés essentielles des fonctions harmoniques.

Si $F_1, \ldots, F_n$ sont des fonctions harmoniques dans un domaine D, $C_1, \ldots, C_n$ des constantes, la fonction $F = C_1 F_1 + \ldots + C_n F_n$ est harmonique dans D.

Si nous appliquons la formule (15) à une fonction F harmonique dans le domaine D, nous voyons que

$$(18) \qquad \int_L^{q-1} \frac{dF}{d\nu} \, d\sigma = 0.$$

Cette propriété caractérise les fonctions harmoniques, en ce sens qu'une fonction F telle que

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

cette relation soit vérifiée, quelle que soit la multiplicité L intérieure au domaine D est nécessairement harmonique dans ce domaine.

On en déduit qu'*une fonction harmonique dans un domaine ne peut avoir ni maximum ni minimum à l'intérieur de ce domaine.*

Supposons, en effet, que la fonction F soit maxima en un point P intérieur à D; considérons une hypersphère Σ de centre P, entièrement contenue à l'intérieur de D, et de rayon assez petit pour que F soit décroissante quand on s'éloigne de P, en restant à l'intérieur de Σ; on devra avoir en tout point de Σ

$$\frac{dF}{d\nu} < 0.$$

D'autre part,

$$\int_{\Sigma}^{q-1} \frac{dF}{d\nu}\, d\sigma = 0;$$

ces deux conditions sont manifestement incompatibles.

Appliquons la formule (16) en y supposant $\Phi = F$, F étant une fonction harmonique dans le domaine D; nous obtenons, puisque $\Delta(F, F) = \Delta_1 F$

$$\int_{D}^{q} \Delta_1 F\, d\tau = \int_{L}^{q-1} F \frac{dF}{d\nu}\, d\sigma.$$

On en déduit qu'*une fonction harmonique dans un domaine* D, *nulle sur la frontière* L *de ce domaine, est nécessairement nulle en tout point de* D. En effet, l'hypothèse faite sur F entraîne

$$\int_{D}^{q} \Delta_1 F\, d\tau = 0,$$

ce qui exige qu'en tout point de D, $\Delta_1 F = 0$, d'où nécessairement

$$\frac{\partial F}{\partial z_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial z_q} = 0.$$

La fonction F est donc constante dans D et elle ne peut prendre que la valeur zéro, à cause des hypothèses faites sur sa continuité.

Deux fonctions harmoniques dans un domaine D, *prenant les mêmes valeurs sur la frontière* L *de ce domaine, sont égales en tout point de* D.

En effet, leur différence étant une fonction harmonique dans D et s'annulant sur la frontière L a pour valeur zéro en tout point de D.

Il existe donc *au plus une* fonction, harmonique dans un domaine, prenant sur la frontière de ce domaine une suite continue de valeurs donnée à l'avance; *mais en existe-t-il effectivement une?*

La réponse à cette question est affirmative et constitue le *principe de Dirichlet. Il existe toujours une et une seule fonction harmonique dans un domaine et prenant sur la frontière de ce domaine une suite continue de valeurs donnée à l'avance.* La détermination effective de cette fonction harmonique constitue le *problème de Dirichlet.*

Depuis le Mémoire célèbre [1], où Riemann a donné du principe de Dirichlet une démonstra-

[1] B. Riemann, *Œuvres mathématiques* (trad. Laugel), p. 37 (*Dissertation inaugurale*).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

tion presque intuitive, mais sujette à des critiques qui ont été d'abord formulées par Weierstrass [1], la démonstration du principe de Dirichlet a fait (surtout dans le cas de $q = 2$ ou $q = 3$) l'objet d'un très grand nombre de travaux mathématiques (de H. Schwarz, Carl Neumann, Poincaré, etc.) dont l'exposé nous entraînerait entièrement hors de notre sujet. La méthode de Carl Neumann, notamment, d'abord établie pour $q = 3$, a été étendue au cas de q quelconque par M. Riquier, dans sa Thèse [2], à laquelle nous nous contentons de renvoyer pour l'exposé de la question. La plupart de ces méthodes démontrent le principe de Dirichlet en donnant un moyen (tout au moins théorique) de former la solution du problème de Dirichlet; nous nous bornerons à traiter plus loin le cas où le domaine est limité par une hypersphère.

La seconde formule de Green, appliquée à deux fonctions F et Φ harmoniques dans un domaine D', ayant pour frontière L', montre que l'on doit avoir

$$\int_{L'}^{q-1}\left(\Phi\frac{dF}{d\nu} - F\frac{d\Phi}{d\nu}\right)d\sigma = 0. \tag{19}$$

Il suffit pour le prouver de faire $\Delta^2 F = \Delta^2 \Phi = 0$ dans la relation (17).

On déduit de cette formule une conséquence importante : *lorsque l'on connaît en tout point* P *de la frontière* L *d'un domaine* D *les valeurs prises par la fonction harmonique* F *et par sa dérivée selon la normale extérieure à* L, *la valeur de* F *en un point* M *intérieur à* D *est donnée par la formule*

$$\frac{4\pi^{\frac{q}{2}}}{\Gamma\left(\frac{q}{2}-1\right)}F(M) = \int_{L}^{q-1}\left(\frac{1}{\rho^{q-2}}\frac{dF}{d\nu} - F\frac{d\frac{1}{\rho^{q-2}}}{d\nu}\right)d\sigma, \tag{20}$$

où $\rho = \overline{MP}$ désigne la distance du point M, intérieur à D, au point P qui décrit L.

Soit, en effet, Σ une hypersphère ayant pour centre M et de rayon très petit ε; considérons la portion D' du domaine D, intérieure à L et extérieure à Σ; appliquons la formule (19) aux fonctions F et $\Phi = \frac{1}{\rho^{q-2}}$ qui sont évidemment harmoniques dans le domaine D'; nous obtenons

$$\int_{\Sigma}^{q-1}\left(\frac{1}{\rho^{q-2}}\frac{dF}{d\nu} - F\frac{d\frac{1}{\rho^{q-2}}}{d\nu}\right)d\sigma + \int_{L}^{q-1}\left(\frac{1}{\rho^{q-2}}\frac{dF}{d\nu} - F\frac{d\frac{1}{\rho^{q-2}}}{d\nu}\right)d\sigma = 0,$$

car la frontière L' de D' se compose ici de L et de Σ. Les dérivées $\frac{d}{d\nu}$ étant prises selon la normale extérieure à D', sur Σ cette normale coïncide avec le rayon de Σ dirigé vers le centre M, donc sur Σ

$$\frac{dF}{d\nu} = -\frac{dF}{d\rho}, \qquad \frac{d\frac{1}{\rho^{q-2}}}{d\nu} = \frac{q-2}{\rho^{q-1}}.$$

---

[1] K. Weierstrass, *Mathematische Werke*, t. II, p. 49.

[2] C. Riquier, *Extension à l'hyperespace de la méthode de M. Carl Neumann*. Thèse, Paris, 1886.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Par conséquent

$$\int_{\Sigma}^{q-1}\left(\frac{1}{\rho^{q-2}}\frac{dF}{d\rho}+\frac{q-2}{\rho^{q-1}}F\right)d\sigma=\int_{L}^{q-1}\left(\frac{1}{\rho^{q-2}}\frac{dF}{d\nu}-F\frac{d\frac{1}{\rho^{q-2}}}{d\nu}\right)d\sigma$$

ou, puisque sur Σ, $\rho=\varepsilon$

$$\frac{1}{\varepsilon^{q-2}}\int_{\Sigma}^{q-1}\frac{dF}{d\rho}d\sigma+\frac{q-2}{\varepsilon^{q-1}}\int_{\Sigma}^{q-1}F\,d\sigma=\int_{L}^{q-1}\left(\frac{1}{\rho^{q-2}}\frac{dF}{d\nu}-F\frac{d\frac{1}{\rho^{q-2}}}{d\nu}\right)d\sigma. \tag{21}$$

Ceci étant, l'aire de l'hypersphère Σ a pour valeur [1]

$$\int_{\Sigma}^{q-1}d\sigma=\frac{2\pi^{\frac{q}{2}}}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}\varepsilon^{q-1}.$$

Il en résulte immédiatement que, si ε tend vers zéro :

l'intégrale $\frac{1}{\varepsilon^{q-2}}\int_{\Sigma}^{q-1}\frac{dF}{d\rho}d\sigma$ tend vers zéro;

l'intégrale $\frac{q-2}{\varepsilon^{q-1}}\int_{\Sigma}^{q-1}F\,d\sigma$ tend vers $(q-2)\frac{2\pi^{\frac{q}{2}}}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}F(M)$.

Donc, si l'on fait tendre ε vers zéro dans la formule (21), on obtient, à la limite, le résultat annoncé qui détermine la fonction harmonique F en tout point M de D, quand on connaît les valeurs prises par F et par $\frac{dF}{d\nu}$ sur la frontière L.

Appliquons-le notamment au cas où le domaine D a pour frontière une hypersphère Σ de centre M et de rayon R.

Sur la frontière Σ

$$\frac{1}{\rho^{q-2}}=\frac{1}{R^{q-2}}\qquad\text{et}\qquad-\frac{d\frac{1}{\rho^{q-2}}}{d\nu}=\frac{q-2}{R^{q-1}}.$$

D'où

$$\frac{4\pi^{\frac{q}{2}}}{\Gamma\left(\frac{q}{2}-1\right)}F(M)=\frac{1}{R^{q-2}}\int_{\Sigma}^{q-1}\frac{dF}{d\nu}d\sigma+\frac{q-2}{R^{q-1}}\int_{\Sigma}^{q-1}F\,d\sigma.$$

Or, F étant harmonique dans Σ, on a, d'après (18),

$$\int_{\Sigma}^{q-1}\frac{dF}{d\nu}d\sigma=0.$$

---

[1] Pour le calcul de l'aire d'une hypersphère, *voir* plus loin p. 203.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Donc dans ce cas particulier

$$(22)\qquad \frac{2\pi^{\frac{q}{2}}}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} F(M) = \frac{1}{R^{q-1}} \int_{\Sigma}^{q-1} F\, d\sigma.$$

Cette formule, qui donne la valeur de la fonction harmonique F au centre M de l'hypersphère Σ en fonction de ses valeurs sur Σ, est connue sous le nom de *formule de la moyenne*. Voici pourquoi : on appelle *valeur moyenne d'une fonction* F *sur une hypersphère* Σ le quotient de l'intégrale

$$\int_{\Sigma}^{q-1} F\, d\sigma$$

par l'aire de Σ

$$\int_{\Sigma}^{q-1} d\sigma = \frac{2\pi^{\frac{q}{2}}}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} R^{q-1}.$$

La formule (22) exprime donc simplement que la valeur d'une fonction harmonique au centre d'une hypersphère est égale à la valeur moyenne de cette fonction sur l'hypersphère.

LVI. — Fonction de Green. Solution du problème de Dirichlet pour l'hypersphère.

Pour déterminer une fonction harmonique à l'intérieur d'un domaine par la formule (20), il faut connaître les valeurs prises sur la frontière de ce domaine, non seulement par la fonction F, mais encore par sa dérivée $\frac{dF}{dv}$; cette formule ne fournit donc pas la solution du problème de Dirichlet; nous allons montrer comment on peut obtenir cette solution, lorsque l'on connaît pour le domaine considéré *une fonction* G, désignée sous le nom de *fonction de Green*, et dont la définition est la suivante :

1° *Sur la frontière* L *du domaine* D *considéré, la fonction* G *prend la valeur zéro;*

2° *En tout point* P $(z_1, \ldots, z_q)$ *intérieur au domaine* D *la fonction est harmonique, sauf cependant au point* M $(a_1, \ldots, a_q)$, *où elle devient infinie de telle façon que la différence*

$$G(P, M) - \frac{1}{\rho^{q-2}}$$

reste finie quand P *tend vers* M

[ρ *désignant la distance* MP : $\rho^2 = (z_1 - a_1)^2 + \ldots + (z_q - a_q)^2$].

Il résulte de cette définition même que la fonction

$$G - \frac{1}{\rho^{q-2}}$$

est harmonique dans le domaine D; appliquons à cette fonction et à la fonction F, harmonique dans D, que nous cherchons à déterminer, la formule (19)

$$0 = \int_{L}^{q-1} \left[\left(G - \frac{1}{\rho^{q-2}}\right)\frac{dF}{dv} - F\frac{d}{dv}\left(G - \frac{1}{\rho^{q-2}}\right)\right] d\sigma$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

ou, puisque sur L, par définition $G = 0$

$$0 = \int_L^{q-1} \left[-\frac{1}{\rho^{q-2}} \frac{dF}{dv} - F \frac{d}{dv}\left(G - \frac{1}{\rho^{q-2}}\right) \right] d\sigma.$$

Or la formule (20) donne, d'autre part,

$$\frac{4\pi^{\frac{q}{2}}}{\Gamma\left(\frac{q}{2}-1\right)} F(M) = \int_L^{q-1} \left[\frac{1}{\rho^{q-2}} \frac{dF}{dv} - F \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{\rho^{q-2}}\right) \right] d\sigma.$$

D'où en ajoutant membre à membre ces deux relations

$$(23) \qquad \frac{4\pi^{\frac{q}{2}}}{\Gamma\left(\frac{q}{2}-1\right)} F(M) = -\int_L^{q-1} F \frac{dG}{dv} d\sigma.$$

La fonction de Green pour le domaine considéré étant supposée déterminée une fois pour toutes, cette formule donne la solution du problème de Dirichlet pour ce domaine.

Le problème de Dirichlet est donc ramené à la détermination de la fonction de Green. *On sait notamment déterminer la fonction de Green pour un domaine limité par une hypersphère;* soit, en effet, l'hypersphère Σ de centre O et de rayon R

$$z_1^2 + \ldots + z_q^2 = R^2.$$

Considérons un point $M(a_1, \ldots, a_q)$ intérieur à Σ, de telle sorte qu'en posant

$$a_1^2 + \ldots + a_q^2 = a^2, \qquad (a = \overline{OM})$$

on ait la condition

$$a < R;$$

introduisons le point $M'(a'_1, \ldots, a'_q)$ inverse de M par rapport à Σ, c'est-à-dire tel que

$$a'_j = R^2 \frac{a_j}{a^2} \qquad (j = 1, 2, \ldots, q).$$

Désignons par ρ et ρ' les distances du point variable $P(z_1, \ldots, z_q)$ aux deux points M et M'

$$\rho^2 = (z_1 - a_1)^2 + \ldots + (z_q - a_q)^2 \qquad (\rho = MP),$$
$$\rho'^2 = (z_1 - a'_1)^2 + \ldots + (z_q - a'_q)^2 \qquad (\rho' = M'P)$$

ou

$$\rho^2 = r^2 - 2ar\cos\gamma + a^2,$$
$$\rho'^2 = r^2 - 2\frac{R^2}{a} r\cos\gamma + \frac{R^4}{a^2},$$

r étant la distance $\overline{OP}$

$$r^2 = z_1^2 + \ldots + z_q^2$$

et γ l'angle $\widehat{MOP}$

$$ar\cos\gamma = a_1 z_1 + \ldots + a_q z_q.$$

Ceci étant posé, la fonction de Green pour l'hypersphère Σ a pour valeur

$$(24) \qquad G(P, M) = \frac{1}{\rho^{q-2}} - \left(\frac{R}{a}\right)^{q-2} \frac{1}{\rho'^{q-2}}.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

En effet, la fonction $G = \frac{1}{\rho'^{q-2}}$ est harmonique à l'intérieur de Σ, puisque $\frac{1}{\rho'^{q-2}}$ vérifie l'équation de Laplace et que sa seule singularité M′ est extérieure à Σ. Puis quand le point P vient sur Σ

$$r = R,$$

d'où

$$\rho^2 = R^2 - 2aR\cos\gamma + a^2,$$

et

$$\rho'^2 = R^2 - 2\frac{R^3}{a}\cos\gamma + \frac{R^4}{a^2} = \frac{R^2}{a^2}[R^2 - 2aR\cos\gamma + a^2];$$

donc

$$\rho' = \frac{R}{a}\rho.$$

On a donc bien $G = 0$, sur l'hypersphère Σ.

La fonction de Green G une fois connue, pour résoudre le problème de Dirichlet pour l'hypersphère Σ, par la formule (23), il faut calculer $\frac{dG}{dv}$ en tout point de Σ; or la normale extérieure à Σ coïncide avec le rayon dans le sens de r croissant

$$\frac{dG}{dv} = \left(\frac{dG}{dr}\right)_{r=R}.$$

D'autre part,

$$(25) \qquad G = [r^2 - 2ar\cos\gamma + a^2]^{-\frac{q-2}{2}} - \left(\frac{R}{a}\right)^{q-2}\left[r^2 - 2\frac{R^2}{a}r\cos\gamma + \frac{R^4}{a^2}\right]^{-\frac{q-2}{2}},$$

d'où

$$-\frac{1}{q-2}\frac{dG}{dr} = (r - a\cos\gamma)[r^2 - 2ar\cos\gamma + a^2]^{-\frac{q}{2}} - \left(\frac{R}{a}\right)^{q-2}\left(r - \frac{R^2}{a}\cos\gamma\right)\left[r^2 - 2\frac{R^2}{a}r\cos\gamma + \frac{R^4}{a^2}\right]^{-\frac{q}{2}};$$

donc sur Σ

$$-\left(\frac{dG}{dr}\right)_{r=R} = \frac{q-2}{R}\,\frac{R^2 - a^2}{[R^2 - 2aR\cos\gamma + a^2]^{\frac{q}{2}}}.$$

Par conséquent la valeur de la fonction harmonique F est donnée au point M $(a_1, \ldots, a_q)$ en fonction de ses valeurs sur Σ par la formule

$$(26) \qquad \frac{2\pi^{\frac{q}{2}}}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}F(M) = \frac{1}{R}\int_{\Sigma}^{q-1} F(P)\,\frac{R^2 - a^2}{[R^2 - 2aR\cos\gamma + a^2]^{\frac{q}{2}}}\,d\sigma.$$

Cette formule qui résout le problème de Dirichlet pour le domaine intérieur à une hypersphère contient comme cas particulier, en faisant $q = 2$, l'*intégrale classique de Poisson*, qui détermine les valeurs d'une fonction harmonique à l'intérieur d'un cercle, en fonction de ses valeurs sur la circonférence limitant le domaine.

En particulier lorsque le point M coïncide avec le centre O de l'hypersphère Σ, on a

$$a^2 = 0.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

d'où

$$(27)\qquad \frac{2\pi^{\frac{q}{2}}}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} F(O) = \frac{1}{R^{q-1}} \int_{\Sigma}^{q-1} F(P)\, d\sigma,$$

nous retrouvons ainsi la formule de la moyenne (22).

Remarquons qu'en introduisant la distance ρ du point fixe M au point P qui décrit Σ, nous pouvons écrire la formule (26)

$$(28)\qquad \frac{2\pi^{\frac{q}{2}}}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} F(M) = \frac{1}{R} \int_{\Sigma}^{q-1} F(P) \frac{R^2 - a^2}{\rho^q}\, d\sigma.$$

Or, quand P décrit Σ, on a constamment

$$R - a \leqq \rho \leqq R + a,$$

d'où, en supposant *la fonction* F *constamment positive sur* Σ,

$$\frac{R-a}{(R+a)^{q-1}} \int_{\Sigma}^{q-1} F(P)\, d\sigma \leqq \int_{\Sigma}^{q-1} F(P) \frac{R^2 - a^2}{\rho^q}\, d\sigma \leqq \frac{R+a}{(R-a)^{q-1}} \int_{\Sigma}^{q-1} F(P)\, d\sigma;$$

en remplaçant les intégrales par leurs valeurs (27) et (28), nous obtenons

$$(29)\qquad \frac{R^{q-2}(R-a)}{(R+a)^{q-1}} F(O) \leqq F(M) < \frac{R^{q-2}(R+a)}{(R-a)^{q-1}} F(O).$$

Ces inégalités limitent la valeur de la fonction harmonique en un point M intérieur à Σ en fonction de sa valeur au centre O. Elles entraînent la conséquence suivante :

Une fonction harmonique dans tout l'espace, et restant constamment positive, se réduit à une constante.

En effet, dans cette hypothèse, les inégalités (29) restent applicables à l'intérieur d'une hypersphère Σ de rayon R arbitrairement grand; or quand R tend vers l'infini, les deux termes

$$\frac{R^{q-2}(R-a)}{(R+a)^{q-1}} F(O) \qquad \text{et} \qquad \frac{R^{q-2}(R+a)}{(R-a)^{q-1}} F(O)$$

tendent tous les deux vers la même limite F(O). Ceci exige donc que l'on ait

$$F(M) = F(O);$$

la fonction harmonique a même valeur en un point M arbitraire qu'à l'origine O.

De cette proposition se déduit le résultat suivant :

Une fonction harmonique dans tout l'espace et restant constamment inférieure à une constante donnée C *se réduit à une constante.*

En effet, puisque par hypothèse on a

$$F(M) \leqq C,$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

il en résulte que la fonction harmonique

$$C - F(M)$$

est toujours positive; elle est donc constante dans tout l'espace et il en est de même, par conséquent, de la fonction harmonique F (M). Cette proposition constitue la généralisation du théorème de Liouville.

Remarquons enfin que la formule (26), qui donne la solution du problème de Dirichlet pour le domaine intérieur à l'hypersphère Σ, permet aussi de *résoudre le même problème pour le domaine extérieur à* Σ, en s'appuyant sur la remarque de Lord Kelvin (p. 187).

Soit, en effet, $F(z_1, \ldots, z_q)$ la solution du problème de Dirichlet pour le domaine intérieur à Σ, obtenue par la formule (26): la solution pour le domaine extérieur est donnée par la fonction

$$\Phi(z_1, \ldots, z_q) = \frac{R^{q-2}}{r^{q-2}} F\left(R^2 \frac{z_1}{r^2}, \ldots, R^2 \frac{z_q}{r^2}\right). \tag{30}$$

En effet, Φ vérifie l'équation de Laplace: elle est régulière à l'extérieur de Σ, puisque à l'infini le produit $r^{q-2}\Phi$ tend vers la limite finie $R^{q-2}F(O)$; enfin sur $\Sigma(r^2 = R^2)$ elle prend évidemment les mêmes valeurs que F.

Par exemple pour la fonction prenant sur Σ la valeur constante *un*, la solution du problème de Dirichlet intérieur est

$$F = 1$$

et la solution du problème extérieur

$$\Phi = \frac{R^{q-2}}{r^{q-2}}.$$

LVII. — Les polynomes harmoniques.

Pour poursuivre l'étude des fonctions harmoniques, dont nous avons seulement indiqué les propriétés les plus simples et les plus générales, on est naturellement conduit à classer méthodiquement ces fonctions au point de vue de la complication de leur structure analytique; il semble donc logique de se poser la question suivante :

Une fonction harmonique peut-elle être un polynome?

La réponse est certainement affirmative, puisque nous avons déjà donné, page 188, l'exemple d'un polynome homogène vérifiant l'équation de Laplace.

L'étude de la classe de fonctions harmoniques constituée par les polynomes harmoniques est la préface naturelle de l'étude des fonctions harmoniques en général, cette étude générale prenant presque toujours comme point de départ l'expression de la fonction donnée en une série de polynomes harmoniques.

Soit donc $P_\mu(z_1, \ldots, z_q)$ un polynome homogène de degré μ; il contient

$$N_1 = \frac{(\mu+1, q-1)}{(1, q-1)} \text{ termes;}$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

l'expression $\Delta^2 P_\mu$ est évidemment un polynome homogène de degré $\mu - 2$ qui contient par conséquent

$$N_2 = \frac{(\mu - 1, q - 1)}{(1, q - 1)} \text{ termes.}$$

Pour que P_μ soit un polynome harmonique, il faut et il suffit que les N_2 coefficients du polynome $\Delta^2 P_\mu$ soient nuls; or ces N_2 coefficients sont des combinaisons linéaires des N_1 coefficients de P_μ.

La condition nécessaire et suffisante pour que P_μ soit harmonique s'exprime donc par N_2 équations linéaires entre les N_1 coefficients de P_μ; il en reste encore N qui peuvent être choisis arbitrairement, en posant

$$N = N_1 - N_2 = \frac{(\mu + 1, q - 1) - (\mu - 1, q - 1)}{(1, q - 1)}$$
$$= \frac{(\mu + 1, q - 3)}{(1, q - 2)}(2\mu + q - 2).$$

En donnant à l'un de ces N coefficients une valeur arbitraire et aux N — 1 autres la valeur zéro, on obtient un polynome harmonique; en répétant cette opération pour chacun des N coefficients arbitraires, on obtient ainsi N polynomes harmoniques, qui ne sont évidemment liés par aucune relation linéaire. D'où :

Il existe

$$N = \frac{(\mu + 1, q - 3)}{(1, q - 2)}(2\mu + q - 2)$$

polynomes harmoniques homogènes d'un degré μ donné, linéairement indépendants.

Pour $q = 2$ et $q = 3$, on a respectivement les résultats connus

$$N = 2 \quad \text{et} \quad N = 2\mu + 1;$$

de plus, pour $q = 2$, les deux polynomes harmoniques homogènes de degré μ sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de

$$(z_1 + i z_2)^\mu.$$

Le but principal des Chapitres qui suivent est la formation effective des N polynomes harmoniques homogènes à q variables d'un degré μ donné, l'étude de leurs principales propriétés et l'établissement des formules permettant de représenter une fonction harmonique donnée sous la forme d'une série de tels polynomes.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

CHAPITRE II.

LES FONCTIONS HYPERSPHÉRIQUES Y_μ.

LVIII. — Définition des coordonnées polaires dans l'hyperespace.

La première idée qui se présente pour étudier les polynomes harmoniques $P_\mu(z_1, \ldots, z_q)$ c'est de généraliser la méthode employée par Laplace dans le cas de $q=3$; elle consiste à remplacer les coordonnées rectangulaires z_1, z_2, z_3 par les coordonnées polaires r, θ, φ

$$z_1 = r\cos\theta, \qquad z_2 = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad z_3 = r\sin\theta\sin\varphi,$$

ce qui permet d'écrire

$$P_\mu(z_1, z_2, z_3) = r^\mu Y_\mu(\theta, \varphi);$$

l'étude du polynome P_μ est ainsi ramenée à celle de la *fonction de Laplace* $Y_\mu(\theta, \varphi)$. Cette fonction Y_μ, que l'on peut définir comme la valeur prise sur la sphère $r^2=1$ par le polynome P_μ, est une *fonction sphérique* (1); on sait effectivement former les $(2\mu+1)$ fonctions sphériques Y_μ d'un degré μ donné, linéairement indépendantes.

Pour étendre la méthode de Laplace à l'hyperespace, nous commencerons par rappeler la définition des coordonnées polaires généralisées; pour des raisons de commodité d'écriture nous poserons désormais

$$q = n+2.$$

Les coordonnées polaires $(r, \theta_1, \ldots, \theta_n, \varphi)$ d'un point de l'espace à $(n+2)$ dimensions sont définies par les formules

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{lll} z_1 & = r\cos\theta_1 & (0 \leq \theta_1 \leq \pi), \\ z_2 & = r\sin\theta_1\cos\theta_2 & (0 \leq \theta_2 \leq \pi), \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots, \\ z_n & = r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\cos\theta_n & (0 \leq \theta_n \leq \pi), \\ z_{n+1} & = r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_n\cos\varphi & \\ z_{n+2} & = r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_n\sin\varphi & (0 \leq \varphi < 2\pi). \end{array}\right.$$

Ce système de coordonnées est orthogonal (p. 182) comme le montre l'expression, facile à calculer, de l'élément d'arc

$$(2)\qquad ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta_1^2 + r^2\sin^2\theta_1\,d\theta_2^2 + \ldots + r^2\sin^2\theta_1\ldots\sin^2\theta_n\,d\varphi^2.$$

(1) D'après l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (édition française), t. II, vol. 5, fasc. 2, p. 155 : « La fonction sphérique générale à deux variables se rencontre pour la première fois dans les travaux de P.-S. Laplace, pourtant le nom même de *fonction sphérique* date de C.-F. Gauss. »

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

L'élément de volume a pour valeur

$$(3)\qquad d\tau = \frac{D(z_1, \ldots, z_{n+2})}{D(r, \theta_1, \ldots, \varphi)}\, dr\, d\theta_1 \ldots d\varphi = r^{n+1} \sin^n\theta_1 \sin^{n-1}\theta_2 \ldots \sin\theta_n\, dr\, d\theta_1 \ldots d\varphi.$$

Désignons par S l'hypersphère de centre O et de rayon 1

$$z_1^2 + \ldots + z_{n+2}^2 = 1 \qquad \text{ou} \qquad r^2 = 1$$

et soit $d\omega$ l'élément d'aire de cette hypersphère, nous pourrons écrire

$$(4)\qquad d\tau = r^{n+1}\, dr\, d\omega,$$

d'où [1]

$$(5)\qquad d\omega = \sin^n\theta_1 \sin^{n-1}\theta_2 \ldots \sin\theta_n\, d\theta_1 \ldots d\theta_n\, d\varphi.$$

Les coordonnées polaires formant un système orthogonal, nous obtiendrons l'expression de $\overline{\Delta^2 F}$ dans ce système en faisant dans la formule (7′ — LII)

$$h_1 = 1, \qquad h_2 = r, \qquad h_3 = r\sin\theta_1, \qquad \ldots, \qquad h_{n+2} = r\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_n,$$

d'où

$$(6)\qquad r^2\,\overline{\Delta^2 F} = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n+1}\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta_1 \ldots \sin^2\theta_n}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}$$
$$+ \sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{\sin^2\theta_1 \ldots \sin^2\theta_{j-1}}\,\frac{1}{\sin^{n-1-j}\theta_j}\,\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{n+1-j}\theta_j\,\frac{\partial F}{\partial\theta_j}\right).$$

Remarquons en passant que, en prenant $\Delta^2 F$ sous cette forme, pour déterminer une solution de l'équation de Laplace qui soit fonction seulement de r, nous avons immédiatement la condition

$$\frac{d}{dr}\left(r^{n+1}\frac{dF}{dr}\right) = 0,$$

d'où (si $n > 0$)

$$F = \frac{a}{r^n} + b,$$

ce qui est bien le résultat déjà trouvé (11 — LIII).

---

[1] On en tire facilement la valeur de l'aire de l'hypersphère S

$$\int_S d\omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta_n\, d\theta_n \ldots \int_0^{\pi} \sin^{n-j+1}\theta_j\, d\theta_j \ldots \int_0^{\pi} \sin^n\theta_1\, d\theta_1.$$

En partant de la formule

$$\int_0^{\pi} \sin^k\theta\, d\theta = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)},$$

on obtient

$$\int_S d\omega = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

LIX. — Définition des fonctions hypersphériques Y_μ.

Si dans le polynome harmonique homogène de degré μ : $P_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2})$, nous remplaçons les coordonnées rectangulaires $z_1, \ldots, z_{n+2}$ par les coordonnées polaires $r, \theta_1, \ldots, \theta_n, \varphi$, nous pourrons évidemment le mettre sous la forme

$$(7) \qquad P_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2}) = r^\mu Y_\mu(\theta_1, \ldots, \theta_n, \varphi).$$

Nous désignerons la fonction $Y_\mu(\theta_1, \ldots, \theta_n, \varphi)$ sous le nom de *fonction hypersphérique; c'est la valeur prise sur l'hypersphère* $S_{r=1}$ *par le polynome harmonique* P_μ.

On peut aussi considérer la fonction Y_μ *comme la valeur prise sur* S *par une fonction*

$$Q_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2}),$$

harmonique à l'extérieur de S, *homogène et de degré* $-(n+\mu)$.

En effet, au polynome harmonique P_μ, la transformation de Lord Kelvin fait correspondre la fonction, harmonique à l'extérieur de S,

$$Q_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2}) = \frac{1}{r^n} P_\mu\left(\frac{z_1}{r^2}, \ldots, \frac{z_{n+2}}{r^2}\right),$$

d'où, à cause de l'homogénéité de P_μ,

$$Q_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2}) = \frac{1}{r^n}\left(\frac{1}{r^2}\right)^\mu P_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2});$$

par conséquent en vertu de (7)

$$(7') \qquad Q_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2}) = \frac{1}{r^{n+\mu}} Y_\mu(\theta_1, \ldots, \theta_n, \varphi).$$

D'après sa définition même la fonction Y_μ est un polynome par rapport aux sinus et aux cosinus des variables $\theta_1, \ldots, \theta_n, \varphi$. Pour former les

$$(8) \qquad N = \frac{(\mu+1, n-1)}{(1, n)}(2\mu+n)$$

fonctions hypersphériques Y_μ linéairement indépendantes d'un degré μ donné, il faut exprimer que le polynome $P_\mu = r^\mu Y_\mu$ vérifie l'équation de Laplace.

D'où en appliquant la formule (6) et en débarrassant $\Delta^2 F$ du facteur commun r^μ, nous obtenons pour la fonction Y_μ l'équation aux dérivées partielles

$$(9) \qquad \mu(\mu+n)Y_\mu + \frac{1}{\sin^2\theta_1 \ldots \sin^2\theta_n}\frac{\partial^2 Y_\mu}{\partial\varphi^2} + \sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{\sin^2\theta_1 \ldots \sin^2\theta_{j-1}} \cdot \frac{1}{\sin^{n+1-j}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{n+1-j}\theta_j \frac{\partial Y_\mu}{\partial\theta_j}\right) = 0.$$

Plusieurs auteurs se sont proposé de déterminer effectivement les fonctions Y_μ en partant

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

de cette équation; mais l'étude des fonctions hypersphériques en coordonnées polaires n'étant pas notre but principal, nous nous contenterons d'indiquer rapidement la méthode suivie par M.-J.-M. Hill et H.-E. Heine, surtout pour permettre de juger par contraste quelle simplification a apportée la substitution aux coordonnées polaires du système que nous emploierons uniquement dans la suite et l'introduction des polynomes d'Hermite.

Partant de ce fait que Y_μ doit être un polynome par rapport aux sinus et cosinus des variables $\theta_1, \ldots, \theta_n, \varphi$, M. Hill [1] cherche à déterminer une solution de l'équation (9) qui soit de la forme

$$(10) \qquad Y_\mu = \sin^{p_1}\theta_1\, \Theta_1(\cos\theta_1) \ldots \sin^{p_n}\theta_n\, \Theta_n(\cos\theta_n) \begin{bmatrix} \cos \\ \sin \end{bmatrix} p_n \varphi,$$

la fonction Y_μ apparaissant ainsi (le dernier terme excepté) comme un produit de n termes de la forme

$$\sin^{p_j}\theta_j\, \Theta_j(\cos\theta_j) \qquad (j = 1, \ldots, n;\ p_j \text{ désigne un entier}),$$

dépendant seulement de l'angle θ_j.

En substituant dans (9) on trouve, toutes réductions faites, que la fonction Θ_j doit vérifier l'équation

$$\sin^2\theta_j \frac{d^2\Theta_j}{d\theta_j^2} + (2p_j + n - j + 1)\sin\theta_j\cos\theta_j \frac{d\Theta_j}{d\theta_j} + (p_{j-1} - p_j)(p_{j-1} + p_j + n - j + 1)\sin^2\theta_j\Theta_j = 0$$

ou en posant

$$\cos\theta_j = \xi_j,$$

$$(1 - \xi_j^2)\frac{d^2\Theta_j}{d\xi_j^2} - (2p_j + n - j + 2)\xi_j \frac{d\Theta_j}{d\xi_j} + (p_{j-1} - p_j)(p_{j-1} + p_j + n - j + 1)\Theta_j = 0.$$

En se basant sur cette équation [2] (qui se ramène aisément à l'équation différentielle de la série hypergéométrique) M. Hill montre que le polynome $\Theta_j(\xi_j)$ s'exprime au moyen des fonctions sphériques d'ordre supérieur qui se rencontrent dans la théorie du potentiel de l'espace à trois dimensions.

D'une manière plus précise Heine [3] est parvenu par une voie analogue à exprimer la fonction Y_μ sous la forme suivante.

Désignons par $V_p^s(x)$ le polynome [4] de degré p en x défini par le développement

$$(11) \qquad (1 - 2ax + a^2)^{-\frac{s}{2}} = \sum_0^{+\infty} a^p V_p^s(x) \qquad (s \text{ entier positif})$$

et posons

$$(12) \qquad P_{p,q}^s(x) = (1 - x^2)^{\frac{q}{2}} \frac{d^q}{dx^q} V_p^s(x) \qquad (q \text{ entier} < p).$$

---

(1) M.-J.-M. Hill, *On functions of more than two variables analogous to Tesseral Harmonics* (*Trans. of the Cambr. philos. Society*, t. XIII, 1883, p. 273).

(2) Dans l'équation relative à $j = 1$, on doit poser $p_0 = \mu$.

(3) H.-E. Heine, *Die speciellen lameschen funktionen erster Art von beliebiger Ordnung* (*J. reine angew. Math.* t. LXVII, 1863, p. 110).

(4) Pour ce qui concerne les polynomes $V_p^s(x)$, *voir* la Note placée à la fin du Volume.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

nous pouvons alors écrire [1]

$$(13)\qquad Y_\mu = P^{(n)}_{\mu,p_1}(\cos\theta_1)\, P^{(n-1)}_{p_1,p_2}(\cos\theta_2)\ldots P^{(1)}_{p_{n-1},p_n}(\cos\theta_n)\left|\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, p_n\varphi\right|,$$

les entiers $p_1, p_2, \ldots, p_n$ devant vérifier les conditions

$$\mu = p_1 \geqq p_2 \geqq \ldots \geqq p_{n-1} \geqq p_n \geqq 0.$$

On comprend combien la complexité de cette expression analytique rend pénible la découverte des propriétés des fonctions Y_μ.

LX. — Développement d'une fonction harmonique en série de fonctions Y_μ.

La fonction de Green $G(P, M)$ en un point P intérieur à l'hypersphère $S : r = 1$ est donnée par la formule (25-LVI), en y faisant $R = 1$

$$(14)\qquad G(P, M) = (r^2 - 2ar\cos\gamma + a^2)^{-\frac{n}{2}} - (1 - 2ar\cos\gamma + a^2r^2)^{-\frac{n}{2}},$$

où

$$r = \overline{OP}, \qquad a = \overline{OM}, \qquad \gamma = \widehat{MOP}.$$

Introduisons les polynomes $V^{(s)}_p(x)$, définis par le développement (11); tant que $a < r \leqq 1$, on a les deux développements uniformément convergents

$$(15)\qquad \begin{cases} (r^2 - 2ar\cos\gamma + a^2)^{-\frac{n}{2}} = \dfrac{1}{r^n}\displaystyle\sum_0^{+\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^p V^{(n)}_p(\cos\gamma), \\ (1 - 2ar\cos\gamma + a^2r^2)^{-\frac{n}{2}} = \displaystyle\sum_0^{+\infty}(ar)^p V^{(n)}_p(\cos\gamma). \end{cases}$$

Donc, le point M restant toujours intérieur à S, le point P étant à l'intérieur de S ou sur S, on peut représenter la fonction de Green par le développement uniformément convergent

$$(16)\qquad G(P, M) = \sum_0^{+\infty} a^p\left[\frac{1}{r^{n+p}} - r^p\right] V^{(n)}_p(\cos\gamma).$$

On en déduit la valeur de la dérivée de cette fonction selon la normale extérieure à S

$$\frac{dG}{dv} = \left(\frac{dG}{dr}\right)_{r=1} = -\left|\sum_0^{+\infty} a^p\left(\frac{n+p}{r^{n+p+1}} + pr^{p-1}\right)V^{(n)}_p(\cos\gamma)\right|_{r=1}.$$

d'où

$$(17)\qquad -\frac{dG}{dv} = \sum_0^{+\infty}(2p+n)a^p V^{(n)}_p(\cos\gamma).$$

---

[1] Nous avons adapté les notations de l'auteur aux nôtres, parce que les polynomes $V^{(s)}_p(x)$, définis par le développement (11), rentrent comme cas particuliers dans les polynomes à n variables que nous définirons plus loin.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Ce dernier développement est uniformément convergent tant que $|a| < 1$. En effet, on a [1]

$$|V_p^s(\cos\gamma)| < \frac{(s, p)}{(1, p)}.$$

Le développement (17) admet donc comme série majorante

$$\sum_0^{+\infty} (2p+n)\frac{(n, p)}{(1, p)} a^p = n(1+a)(1-a)^{-(n+1)}$$

dont la convergence uniforme est évidemment assurée tant que $|a| < 1$; il en est de même *a fortiori* de (17).

Dans la formule (23-LVI) qui donne la valeur d'une fonction harmonique à l'intérieur de S en fonction de ses valeurs sur S

$$\frac{4\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} F(M) = -\int_S^{n+1} F(P)\frac{dG}{dy}\, d\omega,$$

remplaçons la dérivée de G par son développement (17) et intervertissons les deux signes somme et sigma — ce qui est légitime en vertu de la convergence uniforme de (17), — nous obtenons

$$(18) \qquad \frac{4\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} F(M) = \sum_0^{+\infty} (2p+n)\, a^p \int_S^{n+1} F(P)\, V_p^{(n)}(\cos\gamma)\, d\omega,$$

$$\overline{OM} = a < \overline{OP} = 1, \qquad \gamma = MOP.$$

Cette formule donne le développement d'une fonction harmonique [2], en tout point M intérieur à S selon les puissances de la distance $\overline{OM} = a$.

Il est aisé d'interpréter le coefficient de a^p dans ce développement : *c'est une fonction hypersphérique de degré* p : $Y_p(M)$.

Supposons, en effet, que sur S, on puisse mettre F(P) sous la forme d'un développement en série de fonctions hypersphériques

$$F(P) = \sum_{p=0}^{p=\infty} Y_p(P).$$

En tout point M intérieur à S, on aura évidemment

$$F(M) = \sum_{p=0}^{p=\infty} a^p\, Y_p(M),$$

la fonction harmonique F se trouvant ainsi développée en série de polynomes harmoniques homogènes de degré p : $a^p\, Y_p$.

---

[1] *Voir* la Note sur les polynomes $V_p^s(x)$, à la fin du Volume.

[2] Le développement, à l'intérieur de S, d'une fonction harmonique définie par sa valeur sur S a déjà été donné sous une forme équivalente à (18), notamment par M. Riquier (Thèse citée page 67).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Substituons ce développement de F dans le premier membre de l'équation (18)

$$\frac{2\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\sum_{0}^{+\infty} a^p Y_p(M) = \sum_{0}^{+\infty}(2p+n)a^p\int_S^{n+1} F(P)V_p^n(\cos\gamma)\,d\omega;$$

d'où, en identifiant les coefficients de a^p,

$$\frac{2\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} Y_p(M) = (2p+n)\int_S^{n+1} F(P)V_p^n(\cos\gamma)\,d\omega. \tag{19}$$

Cette formule montre bien que le coefficient de a^p dans le développement (18) est une fonction hypersphérique de degré p.

Remarquons, enfin, que pour obtenir le développement (tout au moins formel, la question de la convergence étant pour le moment laissée de côté) de la fonction F en séries de fonctions hypersphériques, il suffit de calculer les intégrales

$$\int_S^{n+1} F(P)V_p^n(\cos\gamma)\,d\omega.$$

LXI. — Propriété d'orthogonalité des fonctions Y_μ.

Les fonctions hypersphériques Y_μ *forment un système de fonctions orthogonales*, c'est-à-dire que l'on a, tant que les entiers μ et μ' sont différents,

$$\int_S^{n+1} Y_\mu Y_{\mu'}\,d\omega = 0. \tag{20}$$

En effet, les deux polynomes

$$P_\mu = r^\mu Y_\mu \qquad \text{et} \qquad P_{\mu'} = r^{\mu'} Y_{\mu'}$$

étant harmoniques à l'intérieur de l'hypersphère S, nous pouvons dans ce domaine leur appliquer la seconde formule de Green (17-LIV), qui donne

$$\int_S^{n+1}\left(P_\mu\frac{dP_{\mu'}}{dr} - P_{\mu'}\frac{dP_\mu}{dr}\right)d\omega = 0.$$

Or sur S

$$P_\mu = Y_\mu \qquad \text{et} \qquad \frac{dP_\mu}{dr} = \frac{d}{dr}(r^\mu Y_\mu)_{r=1} = \mu Y_\mu,$$

$$P_{\mu'} = Y_{\mu'} \qquad \text{et} \qquad \frac{dP_{\mu'}}{dr} = \frac{d}{dr}(r^{\mu'} Y_{\mu'})_{r=1} = \mu' Y_{\mu'},$$

d'où

$$(\mu' - \mu)\int_S^{n+1} Y_\mu Y_{\mu'}\,d\omega = 0,$$

relation qui entraîne bien l'équation (20) tant que $\mu \neq \mu'$.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Cette propriété d'orthogonalité des fonctions Y_μ suggère naturellement l'idée de les considérer comme les solutions fondamentales d'une équation intégrale.

Appliquons la formule (18) au polynome harmonique homogène de degré μ

$$F(M) = a^\mu Y_\mu(M).$$

Sur S il se réduit évidemment à

$$F(P) = Y_\mu(P).$$

Le développement (18) devient donc ici

$$\frac{2\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} a^\mu Y_\mu(M) = \sum_0^{+\infty} (2p+n) a^p \int_S^{n+1} Y_\mu(P) V_p^{(n)}(\cos\gamma)\, d\omega.$$

En identifiant les puissances de a dans les deux membres, nous obtenons les formules

$$(21)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_S^{n+1} Y_\mu(P) V_p^{(n)}(\cos\gamma)\, d\omega = 0 \qquad (p \neq \mu), \\ \displaystyle\int_S^{n+1} Y_\mu(P) V_\mu^{(n)}(\cos\gamma)\, d\omega = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{Y_\mu(M)}{2\mu+n}, \end{cases}$$

qui généralisent la propriété classique des fonctions sphériques ordinaires et des polynomes de Legendre. Nous allons en tirer l'équation intégrale que nous avons en vue.

Considérons l'intégrale

$$\int_S^{n+1} Y_\mu(P)(1-2a\cos\gamma+a^2)^{-\frac{n}{2}}\, d\omega = \int_S^{n+1} Y_\mu(P)\left[\sum_0^{+\infty} a^p V_p^{(n)}(\cos\gamma)\right] d\omega$$
$$= \sum_0^{+\infty} a^p \int_S^{n+1} Y_\mu(P) V_p^{(n)}(\cos\gamma)\, d\omega,$$

l'interversion des signes somme et sigma étant légitime à cause de la convergence uniforme de

$$(1-2a\cos\gamma+a^2)^{-\frac{n}{2}}$$

tant que $|a| < 1$. Or, en vertu des formules (21), une seule des intégrales du second membre est différente de zéro et l'on obtient l'équation

$$\frac{2\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{a^\mu Y_\mu(M)}{2\mu+n} = \int_S^{n+1} Y_\mu(P)(1-2a\cos\gamma+a^2)^{-\frac{n}{2}}\, d\omega.$$

Si, dans cette équation, nous faisons $a = 1$ (ce qui est légitime, car on pourrait démontrer que l'intégrale reste une fonction continue de a pour $a = 1$, bien que la fonction sous le signe somme ne soit plus alors bornée), comme

$$(1-2a\cos\gamma+a^2)_{a=1} = 2(1-\cos\gamma) = 4\sin^2\frac{\gamma}{2},$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

nous obtenons finalement la relation

$$(22)\qquad \frac{2^{n+2}}{2\mu+n}\,\frac{\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,Y_\mu(M)=\int_S^{n+1} Y_\mu(P)\,\frac{d\omega}{\sin^n\frac{\gamma}{2}}.$$

La fonction hypersphérique Y_μ *est donc une solution fondamentale* (1), *relative à la valeur caractéristique*

$$\lambda=\frac{2\mu+n}{2^{n+2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}+1}}$$

de l'équation de Fredholm

$$F(M)=\lambda\int_S^{n+1} F(P)\,\frac{d\omega}{\sin^n\frac{\gamma}{2}}$$

dont le noyau

$$K=\sin^n\frac{\gamma}{2}$$

est symétrique, mais non borné.

L'intérêt de cette proposition (qui n'apporte aucun renseignement nouveau sur la structure des fonctions Y_μ) tient au fait qu'elle rend possible l'application aux séries de fonctions hypersphériques des méthodes générales de la théorie des équations intégrales, permettant l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par une série de fonctions fondamentales appartenant à un noyau de Fredholm donné.

LXII. — Définition des coordonnées zonales dans l'hyperespace.

L'emploi des coordonnées polaires dans l'étude des fonctions Y_μ *présente l'inconvénient capital de conduire pour ces fonctions à des expressions dissymétriques par rapport aux variables* $\theta_1, \ldots, \theta_n$.

Cette dissymétrie saute aux yeux, par exemple, sur l'expression de Heine que nous rappelions plus haut

$$(13)\qquad Y_\mu=P^{(n)}_{\mu,p_1}(\cos\theta_1)\,P^{(n-1)}_{p_1,p_2}(\cos\theta_2)\ldots P^{1}_{p_{n-1},p_n}(\cos\theta_n)\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}p_n\varphi;$$

il est visible que les divers angles θ n'y jouent pas le même rôle.

Or cette dissymétrie est tout artificielle et tient au choix des variables $\theta_1, \ldots, \theta_n$ et non à la structure analytique des fonctions Y_μ; elle s'introduit du fait que, dans les formules (1) qui définissent les coordonnées polaires, les variables $\theta_1, \ldots, \theta_n$ sont déjà contenues d'une manière dissymétrique.

Cet inconvénient est grave, la complexité des expressions obtenues pour les Y_μ étant de nature

(1) *Voir*, pour le cas de $n=1$, E. Goursat, *Cours d'Analyse mathématique*, t. III, p. 264.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

à masquer leurs propriétés; aussi les analystes : Heine [1] (1863); Mehler [2] (1866); Neumann [3] (1867) et Hill [4] (1883), qui ont abordé l'étude des fonctions hypersphériques par cette voie, n'ont pu énoncer que quelques généralités qui sont loin d'épuiser le sujet.

La nécessité s'impose donc d'introduire un système de coordonnées où les variables $\theta_1, \ldots, \theta_n$ soient remplacées par n autres variables jouant un rôle symétrique.

Nous y parviendrons en généralisant un système employé déjà par Laplace et Legendre dans le cas de l'espace ordinaire, qui consiste à poser

$$z_1 = rx, \qquad z_2 = r\sqrt{1-x^2}\cos\varphi, \qquad z_3 = r\sqrt{1-x^2}\sin\varphi.$$

Dans ce système, un polynome harmonique homogène $P_\mu(z_1, z_2, z_3)$ prend la forme

$$\begin{aligned} P_\mu(z_1, z_2, z_3) &= r^\mu P_\mu(x, \sqrt{1-x^2}\cos\varphi, \sqrt{1-x^2}\sin\varphi) \\ &= r^\mu P_\mu\left(x, \sqrt{1-x^2}\,\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \sqrt{1-x^2}\,\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}\right); \end{aligned}$$

de telle sorte qu'en développant, par la formule de Taylor, ce dernier polynome selon les puissances de $e^{i\varphi}$ et $e^{-i\varphi}$, on obtient pour expression de la fonction sphérique Y_μ (définie comme la valeur de P_μ sur la sphère $r = 1$)

$$Y_\mu = \sum_{k=0}^{k=\mu} (1-x^2)^{\frac{k}{2}} Z_\mu^{(k)}(x)\,[A_k e^{ki\varphi} + B_k e^{-ki\varphi}], \tag{23}$$

où A_k et B_k désignent des constantes et $Z_\mu^{(k)}(x)$ un polynome; en particulier $Z_\mu^{(0)}$ est le polynome de Legendre [5] de degré μ et $Z_\mu^{(\mu)}(x) = 1$.

Nous définirons les *coordonnées zonales* d'un point $P(z_1, \ldots, z_{n+2})$ par les relations

$$\left\{\begin{array}{ll} z_1 = rx_1 & |x_1| \leq 1, \\ z_2 = rx_2 & |x_2| \leq 1, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots, \\ z_n = rx_n & |x_n| \leq 1, \\ z_{n+1} = r\sqrt{X_n}\cos\varphi & (0 \leq \varphi \leq 2\pi), \\ z_{n+2} = r\sqrt{X_n}\sin\varphi & \end{array}\right. \tag{24}$$

$$(X_n = 1 - x_1^2 - \ldots - x_n^2 > 0).$$

---

(1) H.-E. Heine, *J. reine und angew. Math.*, t. LXII, 1863, p. 110.
(2) F.-G. Mehler, *J. reine und angew. Math.*, t. LXVI, 1866, p. 161.
(3) C. Neumann, *Zeit. Math. und Phys.*, t. XII, 1867, p. 97.
(4) M.-J.-M. Hill, *Trans. Camb. phil. Society*, t. XIII, 1883, p. 273.
(5) D'après la formule (11) les polynomes de Legendre sont définis par le développement

$$(1 - 2ax + a^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^{+\infty} a^p V_p^{(1)}(x);$$

un très grand nombre d'auteurs désignent les polynomes de Legendre $V_p^{(1)}(x)$ par le symbole $X_p(x)$, qui prêterait à confusion avec nos notations.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Les variables $(x_1, \ldots, x_n)$ qui remplacent les angles polaires $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ entrent symétriquement dans ces formules; leur interprétation est simple :

$$x_1 = \cos\left(\widehat{OZ_1, OP}\right), \quad \ldots, \quad x_n = \cos\left(\widehat{OZ_n, OP}\right).$$

Le système de coordonnées $(r, x_1, \ldots, x_n, \varphi)$ avait été employé dans nos premiers travaux sur ce sujet sous le nom de « coordonnées sphériques »; mais comme d'autres systèmes de coordonnées, n'ayant rien de commun avec celui-là, portaient déjà ce nom, nous lui avons substitué « coordonnées zonales » qui se justifie ainsi : ce système a en commun avec les coordonnées polaires les variables r et φ; il est donc caractérisé par la substitution des variables $x_1, \ldots, x_n$ aux angles polaires $\theta_1, \ldots, \theta_n$; or pour ces variables $x_1, \ldots, x_n$ l'expression « zonales » fait image. En effet, dans l'espace à trois dimensions la courbe $x = \text{const.}$ est un parallèle; elle délimite sur la sphère $r = 1$, une *zone* sphérique. De même sur l'hypersphère S : $r = 1$, la multiplicité à n dimensions

$$x_k = C, \quad -1 < C < +1$$

est l'intersection de S et de l'hyperplan $z_k = C$ qui est normal à l'axe des z_k; il est naturel d'assimiler le domaine hypersphérique (entourant le point $z_k = 1$) délimité par cette multiplicité à une « zone ».

Ce système de coordonnées curvilignes n'est pas orthogonal, comme on le voit immédiatement sur l'expression de l'élément d'arc

$$ds^2 = dr^2 + r^2(dx_1^2 + \ldots + dx_n^2) + \frac{r^2}{X_n}(x_1\,dx_1 + \ldots + x_n\,dx_n)^2 + r^2 X_n\,d\varphi^2. \tag{25}$$

Comme en coordonnées polaires, l'hypersphère S de centre O et de rayon 1 a pour équation

$$r^2 = 1.$$

Son élément d'aire $d\omega$ a pour expression

$$d\omega = dx_1 \ldots dx_n\,d\varphi \tag{26}$$

et l'élément de volume

$$d\tau = r^{n+1}\,dr\,d\omega. \tag{27}$$

Pour obtenir l'expression du paramètre $\Delta^2 F$ en coordonnées zonales, au lieu de partir de l'élément d'arc, il est plus simple ici de s'appuyer sur la formule (5-LII) et de calculer les coefficients $E_{k,j}$. On obtient alors, en supposant les variables rangées dans l'ordre :

$$x_1, \quad \ldots, \quad x_n, \quad r, \quad \varphi,$$

$$\begin{array}{llllll}
E_{1,1} = \dfrac{1 - x_1^2}{r^2}, & E_{1,2} = -\dfrac{x_1 x_2}{r^2}, & \ldots, & E_{1,n} = -\dfrac{x_1 x_n}{r^2}, & E_{1,n+1} = 0, & E_{1,n+2} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\
E_{n,1} = -\dfrac{x_n x_1}{r^2}, & E_{n,2} = -\dfrac{x_n x_2}{r^2}, & \ldots, & E_{n,n} = \dfrac{1 - x_n^2}{r^2}, & E_{n,n+1} = 0, & E_{n,n+2} = 0, \\
E_{n+1,1} = 0, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & E_{n+1,n} = 0, & E_{n+1,n+1} = 1, & E_{n+1,n+2} = 0, \\
E_{n+2,1} = 0, & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots, & E_{n+2,n} = 0, & E_{n+2,n+1} = 0, & E_{n+2,n+2} = \dfrac{1}{r^2 X_n}.
\end{array}$$

$$D = r^{n+1},$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

donc [1]

$$(28)\qquad r^2\overline{\Delta^2 F} = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n+1}\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{X_n}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \sum_{j=1}^{j=n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial F}{\partial x_j} - x_j\left(x_1\frac{\partial F}{\partial x_1} + \ldots + x_n\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)\right].$$

Dans cette expression, $(x_1, \ldots, x_n)$ entrent symétriquement, contrairement à ce qui se produit pour $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ dans l'expression (6) de $\overline{\Delta^2 F}$ en coordonnées polaires.

LXIII. — Les fonctions hypersphériques en coordonnées zonales.

Dans l'expression d'un polynome harmonique homogène de degré μ, introduisons les coordonnées zonales : il prend la forme

$$P_\mu(z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}, z_{n+2}) = r^\mu P_\mu(x_1, \ldots, x_n, \sqrt{X_n}\cos\varphi, \sqrt{X_n}\sin\varphi).$$

La fonction hypersphérique Y_μ, correspondant à P_μ, a donc pour expression

$$Y_\mu = P_\mu(x_1, \ldots, x_n, \sqrt{X_n}\cos\varphi, \sqrt{X_n}\sin\varphi),$$

ou encore

$$Y_\mu = P_\mu\left(x_1, \ldots, x_n, \sqrt{X_n}\,\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \sqrt{X_n}\,\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}\right).$$

En développant ce polynome par la formule de Taylor selon les puissances de $e^{i\varphi}$ et $e^{-i\varphi}$, nous pouvons donc écrire

$$(29)\qquad Y_\mu = \sum_{k=0}^{k=\mu} X_n^{\frac{k}{2}} Z_\mu^{(k)}(x_1, \ldots, x_n)\left[A_k e^{ki\varphi} + B_k e^{-ki\varphi}\right],$$

où $Z_\mu^{(k)}(x_1, \ldots, x_n)$ désigne évidemment un polynome, et A_k, B_k des constantes.

L'étude des *fonctions hypersphériques quelconques* Y_μ est donc ramenée à celle des fonctions

$$(30)\qquad Y_\mu^{(k)} = X_n^{\frac{k}{2}} Z_\mu^{(k)}(x_1, \ldots, x_n)\, e^{-ki\varphi} \qquad (0 \leqq k \leqq \mu),$$

au moyen desquelles elles s'expriment linéairement.

En adoptant le langage utilisé dans la théorie des fonctions sphériques, nous dirons qu'*une fonction hypersphérique* $Y_\mu^{(k)}$ de la forme (30) est *de degré* μ *et d'ordre* k.

Une fonction hypersphérique *d'ordre zéro :*

$$(31)\qquad Y_\mu^{(0)} = Z_\mu^{(0)}(x_1, \ldots, x_n),$$

se réduit à un polynome en $x_1, \ldots, x_n$; en généralisant la locution commode des géomètres anglais, nous la désignerons sous le nom de *fonction hypersphérique zonale;* les fonctions zonales sont les seules qui ne dépendent pas de la variable φ.

Dans l'autre cas extrême, une fonction hypersphérique dont *l'ordre est égal au degré* est de

[1] J. Kampé de Fériet, *Thèse*, p. 10.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

la forme

$$Y_\mu^{(\mu)} = X_n^{\frac{\mu}{2}} e^{-\mu i\varphi}, \tag{32}$$

car il est évident sur la formule (29) que $Z_\mu^{(\mu)}$ se réduit à une constante; $Y_\mu^{(\mu)}$ est une *fonction hypersphérique sectoriale.*

Dans les cas intermédiaires ($0 < k < \mu$) une fonction hypersphérique telle que

$$Y_\mu^{(k)} = X_n^{\frac{k}{2}} Z_\mu^{(k)}(x_1, \ldots, x_n) e^{-ki\varphi} \tag{33}$$

peut être nommée, d'après la même terminologie : *fonction hypersphérique tessérale.*

LXIV. — Expression générale d'une fonction hypersphérique $Y_\mu^{(k)}$ de degré μ et d'ordre k.

Le polynome harmonique homogène qui donne naissance à une fonction hypersphérique $Y_\mu^{(k)}$, soit

$$\begin{aligned} P_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2}) &= r^\mu Y_\mu^{(k)} \\ &= r^\mu X_n^{\frac{k}{2}} Z_\mu^{(k)}(x_1, \ldots, x_n) e^{-ki\varphi}, \end{aligned} \tag{34}$$

doit avoir une forme spéciale, que nous pouvons déterminer de la manière suivante.

Des formules (24), qui définissent les coordonnées zonales, nous tirons en effet

$$\begin{cases} r\sqrt{X_n}\, e^{i\varphi} = z_{n+1} + i z_{n+2}, \\ r\sqrt{X_n}\, e^{-i\varphi} = z_{n+1} - i z_{n+2}, \end{cases} \tag{35}$$

d'où

$$r^k X_n^{\frac{k}{2}} e^{-ki\varphi} = (z_{n+1} \pm i z_{n+2})^k. \tag{36}$$

Ce qui montre que

$$P_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2}) = (z_{n+1} \pm i z_{n+2})^k Q(z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2), \tag{37}$$

où Q désigne un polynome par rapport aux variables

$$z_1, \ldots, z_n, \quad z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2,$$

polynome qui doit évidemment être homogène et de degré $\mu - k$ par rapport aux variables

$$z_1, \ldots, z_n, \quad z_{n+1}, \quad z_{n+2},$$

puisque, par hypothèse, P_μ est homogène et de degré μ par rapport à ces mêmes variables. Donc le polynome Q doit nécessairement être de la forme

$$\begin{aligned} Q = \varphi_{\mu-k}(z_1, \ldots, z_n) &+ (z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2)\, \varphi_{\mu-k-2}(z_1, \ldots, z_n) + \ldots \\ &+ (z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2)^j \varphi_{\mu-k-2j}(z_1, \ldots, z_n) + \ldots, \end{aligned} \tag{38}$$

les symboles

$$\varphi_{\mu-k}, \quad \varphi_{\mu-k-2}, \quad \ldots, \quad \varphi_{\mu-k-2j}$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

représentant des polynomes homogènes et respectivement de degrés

$$\mu - k, \quad \mu - k - 2, \quad \ldots, \quad \mu - k - 2j$$

par rapport aux variables $z_1, \ldots, z_n$.

Écrivons maintenant que le polynome P_μ vérifie l'équation de Laplace. De la relation (37) nous tirons d'abord

$$\Delta^2 P_\mu = (z_{n+1} \pm i z_{n+2})^k \Delta^2 Q + 2k(z_{n+1} \pm i z_{n+2})^{k-1}\left(\frac{\partial Q}{\partial z_{n+1}} \pm i \frac{\partial Q}{\partial z_{n+2}}\right);$$

le polynome Q doit donc vérifier l'équation

$$(39) \qquad (z_{n+1} \pm i z_{n+2}) \Delta^2 Q + 2k\left(\frac{\partial Q}{\partial z_{n+1}} \pm i \frac{\partial Q}{\partial z_{n+2}}\right) = 0.$$

Or, d'après (38),

$$\frac{\partial Q}{\partial z_{n+1}} \pm i \frac{\partial Q}{\partial z_{n+2}} = 2(z_{n+1} \pm i z_{n+2})[\varphi_{\mu-k-2} + \ldots + j(z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2)^{j-1} \varphi_{\mu-k-2j} + \ldots];$$

d'autre part,

$$\Delta^2 Q = [\Delta^2 \varphi_{\mu-k} + \ldots + (z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2)^j \Delta^2 \varphi_{\mu-k-2j} + \ldots]$$
$$+ [2^2 \varphi_{\mu-k-2} + \ldots + (2j)^2 (z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2)^{j-1} \varphi_{\mu-k-2j} + \ldots].$$

Si nous substituons ces deux expressions dans l'équation (39), après l'avoir débarrassée du facteur commun $z_{n+1} \pm i z_{n+2}$, son premier membre prendra la forme d'un polynome ordonné selon les puissances de $(z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2)$, le coefficient de

$$(z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2)^{j-1}$$

ayant pour expression

$$\Delta^2 \varphi_{\mu-k-2j+2} + 2^2 j(j+k) \varphi_{\mu-k-2j}.$$

Les polynomes homogènes φ ne dépendant pas de z_{n+1}, z_{n+2}, pour que l'équation (39) soit vérifiée, il est nécessaire et suffisant que les coefficients des puissances de $(z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2)$ soient tous nuls, ce qui nous donne les conditions

$$(40) \qquad \Delta^2 \varphi_{\mu-k-2j+2} + 2^2 j(j+k) \varphi_{\mu-k-2j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Ces conditions sont bien compatibles avec l'hypothèse faite sur le degré des φ; en effet, $\varphi_{\mu-k-2j+2}$ étant homogène et de degré $\mu - k - 2j + 2$, le polynome $\Delta^2 \varphi_{\mu-k-2j+2}$ est bien homogène et de degré

$$(\mu - k - 2j + 2) - 2 = \mu - k - 2j$$

comme le polynome $\varphi_{\mu-k-2j}$.

Les équations (40) déterminent de proche en proche les polynomes φ en fonction du premier $\varphi_{\mu-k}$, qui seul reste arbitraire; on trouve en effet immédiatement [1]

$$(41) \qquad \varphi_{\mu-k-2j}(z_1, \ldots, z_n) = \frac{(-1)^j}{2^{2j}} \frac{\Delta^{2j} \varphi_{\mu-k}(z_1, \ldots, z_n)}{(1, j)(k+1, j)}.$$

---

[1] Le symbole Δ^{2j} défini au paragraphe LI résulte de l'application réitérée j fois de l'opérateur Δ^2 de Laplace.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Nous obtenons [1] donc ainsi pour le polynome harmonique P_μ, l'expression suivante

$$(42)\qquad P_\mu = (z_{n+1} - i z_{n+2})^k \left[\varphi_{\mu-k}(z_1, \ldots, z_n) + \ldots + (-1)^j \frac{(z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2)^j}{2^{2j}} \frac{\Delta^{2j} \varphi_{\mu-k}(z_1, \ldots, z_n)}{(1, j)(k+1, j)} + \ldots \right]$$

qui contient un polynome homogène de degré $\mu - k$ entièrement arbitraire. On peut vérifier que le développement contenu entre crochets est bien un polynome, en remarquant que si $\mu - k$ est un nombre pair, il s'arrêtera au terme $\Delta^{\mu-k} \varphi_{\mu-k}$, et si $\mu - k$ est un nombre impair, au terme $\Delta^{\mu-k-1} \varphi_{\mu-k}$.

De l'expression (42) d'un polynome harmonique homogène susceptible de donner naissance à une fonction hypersphérique de degré μ et d'ordre k, on tire facilement l'expression de la fonction $Y_\mu^{(k)}$ elle-même. Elle est en effet liée à P_μ par la relation (34) :

$$P_\mu = r^\mu Y_\mu^k.$$

Remplaçons dans (42) les coordonnées rectangulaires $z_1, \ldots, z_{n+2}$ par les coordonnées zonales $r, x_1, \ldots, x_n, \varphi$. Nous avons d'abord

$$(z_{n+1} - i z_{n+2})^k = r^k X_n^{\frac{k}{2}} e^{-ki\varphi},$$

$$z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2 = r^2 X_n,$$

puis

$$\varphi_{\mu-k}(z_1, \ldots, z_n) = r^{\mu-k} \varphi_{\mu-k}(x_1, \ldots, x_n)$$

et

$$\Delta^{2j} \varphi_{\mu-k}(z_1, \ldots, z_n) = r^{\mu-k-2j} \Delta^{2j} \varphi_{\mu-k}(x_1, \ldots, x_n)$$

où le symbole du deuxième membre représente la même opération par rapport aux variables x que celui du premier par rapport aux variables z, c'est-à-dire, d'après le paragraphe LI,

$$\Delta^{2j} \varphi_{\mu-k}(x_1, \ldots, x_n) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 \right]^j \varphi_{\mu-k}(x_1, \ldots, x_n).$$

Finalement le terme général de l'expression entre crochets dans la formule (42) devient

$$(z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2)^j \Delta^{2j} \varphi_{\mu-k}(z_1, \ldots, z_n) = r^{\mu-k} X_n^j \Delta^{2j} \varphi_{\mu-k}(x_1, \ldots, x_n);$$

le crochet contient donc en facteur $r^{\mu-k}$; ce fait, rapproché de la définition de la fonction $Y_\mu^{(k)}$, permet d'écrire

$$(43)\qquad Y_\mu^{(k)} = X_n^{\frac{k}{2}} e^{-ki\varphi} \left[\varphi_{\mu-k}(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + (-1)^j \frac{X_n^j}{2^{2j}} \frac{\Delta^{2j} \varphi_{\mu-k}(x_1, \ldots, x_n)}{(1, j)(k+1, j)} + \ldots \right].$$

Cette formule donne l'expression générale d'une fonction hypersphérique de degré μ et d'ordre k en coordonnées zonales, expression qui contient comme arbitraire le polynome homogène de degré $\mu - k$:

$$\varphi_{\mu-k}(x_1, \ldots, x_n).$$

---

[1] J. Kampé de Fériet, *Thèse*, p. 93.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

En définissant $Y_\mu^{(k)}$, nous l'avions mise sous la forme

$$Y_\mu^{(k)} = X_n^{\frac{k}{2}} Z_\mu^{(k)}(x_1, \ldots, x_n)\, e^{\pm ki\varphi}, \tag{30}$$

nous obtenons donc pour expression du polynome $Z_\mu^{(k)}$

$$Z_\mu^{(k)}(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_{\mu-k}(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + (-1)^j \frac{X_n^j}{2^{2j}} \frac{\Delta^{2j}\varphi_{\mu-k}(x_1, \ldots, x_n)}{(1, j)(k+1, j)} + \ldots. \tag{44}$$

La formule (43) permet de déterminer aisément *le nombre* $N_\mu^{(k)}$ *des fonctions hypersphériques de degré* μ *et d'ordre* k *linéairement indépendantes.*

Il est clair d'abord que deux fonctions $Y_\mu^{(k)}$ correspondant à deux déterminations différentes du polynome $\varphi_{\mu-k}$ sont linéairement indépendantes; de plus, à une détermination de $\varphi_{\mu-k}$ correspondent deux fonctions $Y_\mu^{(k)}$ distinctes (sauf pour $k = 0$), selon que l'on prend le signe + ou le signe − dans $e^{\pm ki\varphi}$.

Or le nombre des polynomes homogènes $\varphi_{\mu-k}$ de degré $\mu - k$ linéairement indépendants est égal au nombre $K_n^{\mu-k}$ des combinaisons complètes $\mu - k$ à $\mu - k$ de n lettres.

Donc le nombre des fonctions hypersphériques $Y_\mu^{(k)}$ linéairement indépendantes est

$$N_\mu^{(k)} = 2\, K_n^{\mu-k} = 2\frac{(n, \mu-k)}{(1, \mu-k)} \qquad (k > 0). \tag{45}$$

En particulier, le nombre des fonctions hypersphériques sectoriales est

$$N_\mu^{(\mu)} = 2\frac{(n, 0)}{(1, 0)} = 2.$$

Ces deux fonctions sont

$$X_n^{\frac{\mu}{2}} e^{\mu i\varphi} \quad \text{et} \quad X_n^{\frac{\mu}{2}} e^{-\mu i\varphi}$$

qui dérivent des deux polynomes harmoniques

$$(z_{n+1} + i z_{n+2})^\mu \quad \text{et} \quad (z_{n+1} - i z_{n+2})^\mu$$

qu'il eût été facile de déterminer *a priori* sans passer par la formule (42).

Exceptionnellement, dans le cas des fonctions hypersphériques zonales ($k = 0$), à une détermination de φ_μ, correspond une seule fonction $Y_\mu^{(0)}$; donc

$$N_\mu^{(0)} = K_n^\mu = \frac{(n, \mu)}{(1, \mu)}. \tag{46}$$

Le nombre total N_μ des fonctions hypersphériques de degré μ et d'ordre quelconque, linéairement indépendantes, est évidemment

$$\begin{aligned} N_\mu &= N_\mu^{(0)} + N_\mu^{(1)} + \ldots + N_\mu^{(\mu)} \\ &= K_n^\mu + 2\,[K_n^{\mu-1} + \ldots + K_n^0] \\ &= C_{n+\mu-1}^{n-1} + 2\,[C_{n+\mu-2}^{n-1} + \ldots + C_n^{n-1}] \\ &= C_{n+\mu-1}^{n-1} + 2\,C_{n+\mu-1}^{n} \\ &= \frac{(\mu+1, n-1)}{(1, n)}(2\mu + n). \end{aligned}$$

Nous retrouvons ainsi l'expression (8) calculée directement.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

LXV. — Équations aux dérivées partielles des fonctions $Y_\mu^{(k)}$ et des polynomes $Z_\mu^{(k)}$.

Le polynome

$$P_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2}) = r^\mu Y_\mu^{(k)}(x_1, \ldots, x_n, \varphi)$$

doit vérifier l'équation de Laplace. Prenons $\overline{\Delta^2 F}$ sous la forme (28)

$$r^2 \overline{\Delta^2 F} = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n+1} \frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{X_n} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial F}{\partial x_j} - x_j\left(x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial F}{\partial x_n}\right)\right];$$

écrivons que

$$\Delta^2(r^\mu Y_\mu^{(k)}) = 0$$

et divisons par le facteur commun r^μ; nous obtenons une équation qui doit être vérifiée par la fonction $Y_\mu^{(k)}$,

$$(47) \qquad \mu(\mu+n)Y + \frac{1}{X_n}\frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial Y}{\partial x_j} - x_j\left(x_1 \frac{\partial Y}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial Y}{\partial x_n}\right)\right] = 0,$$

équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre du type elliptique, qui est caractéristique des fonctions hypersphériques en coordonnées zonales.

En particulier, une fonction hypersphérique zonale $Y_\mu^{(0)}$ étant indépendante de φ doit vérifier l'équation plus simple

$$(48) \qquad \mu(\mu+n)Y + \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial Y}{\partial x_j} - x_j\left(x_1 \frac{\partial Y}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial Y}{\partial x_n}\right)\right] = 0.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} Y_\mu^{(k)} &= X_n^{\frac{k}{2}} Z_\mu^{(k)}(x_1, \ldots, x_n)\, e^{\pm ki\varphi} \\ &= R(x_1, \ldots, x_n)\, e^{\pm ki\varphi}. \end{aligned}$$

En remplaçant $Y_\mu^{(k)}$ par cette expression dans (47), nous obtenons, après division par le facteur commun $e^{\pm ki\varphi}$,

$$(49) \qquad \left[\mu(\mu+n) - \frac{k^2}{X_n}\right] R + \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial R}{\partial x_j} - x_j\left(x_1 \frac{\partial R}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial R}{\partial x_n}\right)\right] = 0.$$

On en tire facilement une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre, vérifiée par le polynome $Z_\mu^k(x_1, \ldots, x_n)$,

$$(50) \qquad (\mu+k)(\mu-k+n)Z + \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial Z}{\partial x_j} - x_j\left(x_1 \frac{\partial Z}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial Z}{\partial x_n} + 2kZ\right)\right] = 0.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

LXVI. — Équation intégrale admettant les fonctions hypersphériques comme solutions fondamentales.

L'équation aux dérivées partielles qui caractérise les fonctions hypersphériques Y_μ d'un degré μ donné peut s'écrire

$$\mathfrak{L}(Y) + \mu(\mu + n)Y = 0. \tag{51}$$

$\mathfrak{L}(Y)$ représentant une expression formée avec les dérivées de Y qui, en coordonnées polaires, a pour valeur, d'après (9),

$$\mathfrak{L}(Y) = \frac{1}{\sin^2\theta_1 \ldots \sin^2\theta_n}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \sum_{j=1}^{j=n}\frac{1}{\sin^2\theta_1\ldots\sin^2\theta_{j-1}}\frac{1}{\sin^{n+1-j}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{n+1-j}\theta_j\frac{\partial Y}{\partial\theta_j}\right) \tag{52}$$

et, en coordonnées zonales, d'après (47),

$$\mathfrak{L}(Y) = \frac{1}{X_n}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \sum_{j=1}^{j=n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial Y}{\partial x_j} - x_j\left(x_1\frac{\partial Y}{\partial x_1} + \ldots + x_n\frac{\partial Y}{\partial x_n}\right)\right]. \tag{53}$$

L'expression $\mathfrak{L}(Y)$ constitue un invariant différentiel comme le paramètre $\Delta^2 F$ de Laplace et possède certaines propriétés qui l'en rapprochent beaucoup; c'est ainsi que l'on peut lui appliquer une formule analogue à la deuxième formule de Green (17-LIV).

Remarquons d'abord qu'en désignant par F et Φ deux fonctions arbitraires, on a, en coordonnées polaires,

$$\begin{aligned} F\,\mathfrak{L}(\Phi) - \Phi\,\mathfrak{L}(F) = {} & \frac{1}{\sin^2\theta_1\ldots\sin^2\theta_n}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(F\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} - \Phi\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right) \\ & + \sum_{j=1}^{j=n}\frac{1}{\sin^2\theta_1\ldots\sin^2\theta_{j-1}}\frac{1}{\sin^{n+1-j}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left[\sin^{n+1-j}\theta_j\left(F\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_j} - \Phi\frac{\partial F}{\partial\theta_j}\right)\right] \end{aligned} \tag{54}$$

et, en coordonnées zonales,

$$\begin{aligned} F\,\mathfrak{L}(\Phi) - \Phi\,\mathfrak{L}(F) = {} & \frac{1}{X_n}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(F\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} - \Phi\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right) \\ & + \sum_{j=1}^{j=n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(F\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} - \Phi\frac{\partial F}{\partial x_j}\right) - x_j\sum_{k=1}^{k=n}x_k\left(F\frac{\partial\Phi}{\partial x_k} - \Phi\frac{\partial F}{\partial x_k}\right)\right] \end{aligned} \tag{55}$$

Cette dernière relation exprime que l'*équation des fonctions* Y_μ *en coordonnées zonales est identique à son adjointe* (1).

En partant des formules (51), (54) et (55), nous allons relier les fonctions hypersphériques Y_μ à la théorie des équations intégrales (2) d'une manière tout à fait différente de celle du para-

(1) Pour la définition de l'équation adjointe d'une équation aux dérivées partielles, *voir* le paragraphe XVIII.

(2) J. Kampé de Fériet, *Sur une équation intégrale de seconde espèce admettant les fonctions hypersphériques comme solutions fondamentales* (*C. R. Acad. des Sc.*, t. 152, 1916, p. 747).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

graphe LXI. Cette nouvelle méthode se trouve être une extension de celle qu'a employée M. Hilbert [1] dans le cas des fonctions sphériques ($n = 1$).

Considérons sur l'hypersphère S deux points : le premier $P(x_1, \ldots, x_n, \varphi)$ qui décrira S, la deuxième $M(x'_1, \ldots, x'_n, \varphi')$ qui conservera une position fixe; soit γ l'angle $\widehat{MOP}$

$$\cos\gamma = x_1 x'_1 + \ldots + x_n x'_n + \sqrt{X_n}\sqrt{X'_n}\cos(\varphi - \varphi'),$$
$$(X_n = 1 - x_1^2 - \ldots - x_n^2).$$

Le lieu des points P pour lesquels γ a une valeur donnée γ_0 forme sur S une multiplicité ($\mathfrak{B}$) à n dimensions, qui est définie analytiquement comme l'intersection de l'hypersphère S

$$z_1^2 + \ldots + z_{n+2}^2 = 1$$

et de l'hyperplan

$$z_1 x'_1 + \ldots + z_n x'_n + z_{n+1}\sqrt{X'_n}\cos\varphi' + z_{n+2}\sqrt{X'_n}\sin\varphi' = \cos\gamma_0.$$

Désignons par ($\mathfrak{A}$) la portion de S (multiplicité à $n+1$ dimensions) pour laquelle

$$\gamma > \gamma_0,$$

il est clair que la multiplicité ($\mathfrak{A}$) admet comme frontière la multiplicité ($\mathfrak{B}$).

Soient alors $F(P)$ et $\Phi(P)$ deux fonctions régulières ainsi que leurs dérivées partielles jusqu'au second ordre, tant que le point P est dans le domaine ($\mathfrak{A}$); considérons l'intégrale

$$J = \int_{(\mathfrak{A})}^{n+1} [F\mathfrak{L}(\Phi) - \Phi\mathfrak{L}(F)]\, d\omega.$$

Imaginons maintenant qu'on fixe la position du point P par ses coordonnées polaires $(\theta_1 \ldots, \theta_n, \varphi)$, le pôle étant le point fixe M, c'est-à-dire que le premier angle polaire de P est précisément

$$\theta_1 = \gamma.$$

Pour obtenir tout le domaine ($\mathfrak{A}$), il faut faire varier γ de γ_0 à π et les autres angles polaires dans les limites ordinaires

$$0 \leq \theta_2 \leq \pi, \quad \ldots, \quad 0 \leq \theta_n \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

D'après la formule (5), l'élément d'aire $d\omega$ de S a pour valeur

$$d\omega = \sin^n\gamma \sin^{n-1}\theta_2 \ldots \sin\theta_n\, d\gamma\, d\theta_1 \ldots d\theta_n\, d\varphi.$$

En appliquant la formule (54), nous obtenons, en mettant en évidence le terme relatif à $\theta_1 = \gamma$,

$$F\mathfrak{L}(\Phi) - \Phi\mathfrak{L}(F) = \frac{1}{\sin^n\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[\sin^n\gamma\left(F\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma} - \Phi\frac{\partial F}{\partial\gamma}\right)\right] + \ldots$$

et

$$[F\mathfrak{L}(\Phi) - \Phi\mathfrak{L}(F)]\, d\omega = \frac{\partial}{\partial\gamma}\left[\sin^n\gamma\left(F\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma} - \Phi\frac{\partial F}{\partial\gamma}\right)\right] d\sigma_n\, d\gamma + \ldots$$

---

[1] D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (*Göttinger Nachrichten*, 1904, p. 242).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

en posant

$$d\sigma_n = \sin^{n-1}\theta_2 \ldots \sin\theta_n \, d\theta_2 \ldots d\theta_n \, d\varphi.$$

Donc si dans J, nous intégrons par rapport à γ le premier terme de cette expression (qui seul ne donnera pas identiquement zéro comme les autres termes à cause des limites o, π pour les variables $\theta_2, \ldots$), nous obtenons la formule qui est pour l'opérateur $\mathfrak{L}$ l'analogue de la formule de Green pour l'opérateur Δ^2

$$(55) \qquad \int_{(\mathfrak{L})}^{n+1} [F\,\mathfrak{L}(\Phi) - \Phi\,\mathfrak{L}(F)]\, d\omega = \int_{(\mathfrak{L})}^{n} \left[\Phi \frac{\partial F}{\partial \gamma_0} - F \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_0}\right] \sin^n \gamma_0 \, d\sigma_n.$$

Ce résultat étant établi [1], appliquons-le à deux fonctions F et Φ choisies de la manière suivante :

1° F(P) est une fonction hypersphérique $Y_\mu(P)$ et par conséquent on a, d'après (51),

$$(56) \qquad \mathfrak{L}(Y_\mu) + \mu(\mu + n) Y_\mu = 0.$$

2° $\Phi(P)$ est une fonction de l'angle γ seulement

$$\Phi = \Phi(\gamma)$$

déterminée par la condition de vérifier l'équation

$$(57) \qquad \mathfrak{L}(\Phi) = 1$$

et d'être régulière en tout point de S, sauf au pôle M ($\gamma = 0$), où elle vérifie cependant les deux relations

$$(58) \qquad [\sin^n \gamma\, \Phi(\gamma)]_{\gamma=0} = 0 \qquad \text{et} \qquad -\left[\sin^n \gamma \frac{d\Phi}{d\gamma}\right]_{\gamma=0} = \sqrt{\pi}\, \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)};$$

nous verrons plus loin que cet ensemble de conditions détermine Φ d'une manière univoque.

Les fonctions F et Φ étant ainsi choisies, nous avons, d'après (56) et (57),

$$\int_{(\mathfrak{L})}^{n+1} [F\,\mathfrak{L}(\Phi) - \Phi\,\mathfrak{L}(F)]\, d\omega = \int_{(\mathfrak{L})}^{n+1} [Y_\mu + \mu(\mu+n)\Phi Y_\mu]\, d\omega.$$

Si nous faisons tendre γ_0 vers zéro, le domaine $(\mathfrak{L}) : (\gamma > \gamma_0)$ tend vers l'hypersphère S tout entière.

Or Y_μ étant une fonction hypersphérique, en vertu de (20),

$$\int_S^{n+1} Y_\mu \, d\omega = 0;$$

---

[1] *Cf.* E. Beltrami, *Sulla teorica generale dei parametri differenziali* (*Mem. Acad. d. Scienze Ist. Bologna*, 2e série, t. VIII, p. 581).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

d'où

$$(59)\qquad \lim_{\gamma_0=0}\int_{(\mathfrak{B}_0)}^{n+1}[F\,\mathfrak{L}(\Phi)-\Phi\,\mathfrak{L}(F)]\,d\omega=\mu(\mu+n)\int_S^{n+1}\Phi\,Y_\mu(P)\,d\omega.$$

Considérons d'autre part

$$\int_{(\mathfrak{B}_0)}^{n}\left[\Phi\frac{\partial Y_\mu}{\partial\gamma_0}-Y_\mu\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_0}\right]\sin^n\gamma_0\,d\sigma_n.$$

Quand γ_0 tend vers zéro, le domaine $(\mathfrak{B}_0)$ tend à se réduire au seul pôle M. Or en vertu de la condition

$$|\sin^n\gamma\,\Phi|_{\gamma=0}=0,$$

on a d'abord

$$\lim_{\gamma_0=0}\int_{(\mathfrak{B}_0)}^{n}\Phi\frac{\partial Y_\mu}{\partial\gamma_0}\sin^n\gamma_0\,d\sigma_n=0;$$

puis en vertu de la condition

$$-\left|\sin^n\gamma\frac{d\Phi}{d\gamma}\right|_{\gamma=0}=\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)},$$

on a

$$\lim_{\gamma_0=0}\int_{(\mathfrak{B}_0)}^{n}Y_\mu\left|-\sin^n\gamma_0\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_0}\right|d\sigma_n=2\,\frac{\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}Y_\mu(M).$$

Donc

$$(60)\qquad \lim_{\gamma_0=0}\int_{(\mathfrak{B}_0)}^{n}\left[\Phi\frac{\partial Y_\mu}{\partial\gamma_0}-Y_\mu\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_0}\right]\sin^n\gamma_0\,d\sigma_n=2\,\frac{\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}Y_\mu(M).$$

Le simple rapprochement des deux formules (59) et (60) conduit à la relation

$$(61)\qquad 2\,\frac{\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}Y_\mu(M)=\mu(\mu+n)\int_S^{n+1}\Phi(\gamma)\,Y_\mu(P)\,d\omega.$$

Une fonction hypersphérique Y_μ *apparaît ainsi comme une solution fondamentale, relative à la valeur caractéristique* $\mu(\mu+n)$, *de l'équation intégrale étendue à l'hypersphère* S *admettant comme noyau la fonction*

$$\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\pi^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)}\Phi(\gamma).$$

Il reste à déterminer effectivement la fonction $\Phi(\gamma)$ en partant des conditions (57) et (58). Si dans la formule (52) on pose $\theta_1=\gamma$ et qu'on observe que Φ étant fonction de γ seulement

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_2}=0,\quad\ldots,\quad\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_n}=0,\quad\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}=0,$$

on en déduit

$$\mathfrak{L}(\Phi)=\frac{1}{\sin^n\gamma}\frac{d}{d\gamma}\left[\sin^n\gamma\frac{d\Phi}{d\gamma}\right].$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

En effectuant le changement de variable $\cos^2\frac{\gamma}{2} = \xi$, l'équation (57) s'écrit

$$\xi^{\frac{1-n}{2}}(1-\xi)^{\frac{1-n}{2}}\frac{d}{d\xi}\left[\xi^{\frac{n+1}{2}}(1-\xi)^{\frac{n+1}{2}}\frac{d\Phi}{d\xi}\right] = 1$$

dont on obtient aisément (¹) la solution régulière sauf pour $\xi = 1$, $(\gamma = 0)$:

$$n\Phi = \int_0^1 [(1-\xi u)^{-n} - 1](1-u)^{\frac{n-1}{2}}\frac{du}{u}$$

que l'on peut exprimer par une somme de fonctions hypergéométriques (²)

$$\frac{n(n+1)}{2}\Phi = \xi\sum_{k=1}^{k=n} F\left(k, 1, \frac{n+3}{2}, \xi\right). \tag{62}$$

Telle est l'expression du noyau de l'équation intégrale (61).

Par exemple, pour $n = 1$ (fonctions sphériques),

$$\Phi = \xi F(1, 1, 2, \xi) = \operatorname{Log}\frac{1}{1-\xi}$$
$$= \operatorname{Log}\frac{1}{\sin^2\frac{\gamma}{2}},$$

on retrouve le noyau donné par M. Hilbert.

Pour $n = 2$,

$$3\Phi = \xi F\left(1, 1, \frac{5}{2}, \xi\right) + \xi F\left(2, 1, \frac{5}{2}, \xi\right)$$
$$= \frac{3}{2}[1 + (\pi - \gamma)\cot\gamma].$$

D'une manière générale Φ s'exprime en fonction de γ et de ses lignes trigonométriques par des formules de deux types différents selon la parité de n.

(¹) En effet, une première intégration donne

$$\xi^{\frac{n+1}{2}}(1-\xi)^{\frac{n+1}{2}}\frac{d\Phi}{d\xi} = \int_0^\xi v^{\frac{n-1}{2}}(1-v)^{\frac{n-1}{2}}dv,$$

d'où, en posant : $v = \frac{(1-u)\xi}{1-\xi u}$,

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = \int_0^1 (1-\xi u)^{-n+1}(1-u)^{\frac{n-1}{2}}du,$$

une seconde intégration donne Φ.

(²) Il suffit de remarquer que :

$$\frac{1}{u}[(1-\xi u)^{-n} - 1] = \xi\sum_{k=1}^{k=n}(1-\xi u)^{-k}$$

et d'appliquer à chacune des intégrales telles que

$$\int_0^1 (1-u)^{\frac{n-1}{2}}(1-\xi u)^{-k}du,$$

la formule (3-I).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

CHAPITRE III.

LES POLYNOMES $V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n)$ ET $V^{(k)}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n)$.

LXVII. — Les fonctions hypersphériques zonales et les polynomes d'Hermite.

Les plus simples des fonctions hypersphériques sont évidemment les fonctions zonales $Y^{(0)}_{\mu}$ qui, lorsqu'on emploie les coordonnées zonales, se réduisent à un polynome de degré μ en $x_1, \ldots, x_n$. En outre, nous démontrerons plus loin que les fonctions hypersphériques $Y^{(k)}_{\mu}$ d'ordre k quelconque se déduisent très simplement de ces fonctions zonales. Il est donc logique de commencer par elles l'étude des fonctions hypersphériques.

Nous avons rappelé (LXII) que, dans le cas des fonctions sphériques ordinaires ($n=1$), *la fonction zonale* $Y^{(0)}_{\mu}(x)$ *est identique au polynome de Legendre d'indice* μ, défini comme le coefficient de a^{μ} dans le développement de

$$(1)\qquad (1-2ax+a^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{0}^{+\infty} a^{\mu}\, V_{\mu}(x).$$

En cherchant à étendre cette proposition classique aux fonctions hypersphériques $Y^{(0)}_{\mu}(x_1, \ldots, x_n)$, on aboutit à ce résultat remarquable :

Les $\frac{(n,\mu)}{(1,\mu)}$ *fonctions hypersphériques zonales d'un degré* μ *donné, linéairement indépendantes sont égales aux* $\frac{(n,\mu)}{(1,\mu)}$ *polynomes* $V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n)$ (*pour lesquels* $m_1+\ldots+m_n=\mu$), *définis par le développement*

$$(2)\qquad (1-2a_1x_1-\ldots-2a_nx_n+a_1^2+\ldots+a_n^2)^{-\frac{n}{2}}=\sum_{0}^{+\infty} a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}\, V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n).$$

C'est Hermite [1] qui a le premier introduit ces polynomes, en considérant dans le cas de deux variables le développement

$$(3)\qquad (1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-1}=\Sigma a^m b^n V_{m,n}(x,y);$$

[1] Ch. Hermite, *Extrait d'une lettre à M. Borchardt* (*Journal de Crelle*, t. 64, 1865, p. 294), *Sur deux intégrales doubles* (*Ann. sc. Ec. Normale*, 1re série, t. II, 1865, p. 49); *C. R. Acad. des Sc.*, t. 60, 1865, p. 370-377, 432-440, 461-466, 512-518. — L'ensemble de ces Mémoires est réuni dans les *Œuvres de Charles Hermite*, t. II, p. 309-346.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

le développement général (2) a été donné peu de temps après la publication de son Mémoire, par F. Didon [1].

Mais ici se présente un fait digne de remarque : lorsqu'il envisageait la fonction

$$(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-1},$$

Hermite se proposait de déterminer des polynomes de deux variables, présentant, *au point de vue algébrique*, des propriétés généralisant celles des polynomes de Legendre ; nulle part, il ne se préoccupe de l'interprétation, *au point de vue de la théorie des fonctions harmoniques*, des êtres nouveaux qu'il introduit ainsi dans l'Analyse.

Le point de départ de l'illustre analyste donne un cachet un peu mystérieux au choix même de la fonction génératrice destinée à généraliser celle de Legendre

$$(1-2ax+a^2)^{-\frac{1}{2}};$$

on ne saurait qu'admirer, sans pouvoir la justifier, l'intuition heureuse par laquelle il s'adresse à la fonction

$$(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-1},$$

plutôt qu'à celle-ci :

$$(1-2ax+2by+a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Le but d'Hermite n'était donc nullement de chercher à étendre aux polynomes harmoniques dans l'espace à quatre dimensions, les résultats fournis pour l'espace à trois dimensions par les polynomes de Legendre; son point de vue est nettement indiqué dans sa première Note [2] à l'Académie « sur quelques développements en série de fonctions de plusieurs variables », dont voici le début :

« L'expression

$$1-2ax+a^2$$

qui donne naissance aux fonctions de Legendre et aux formules trigonométriques pour la multiplication des arcs, d'après les relations

$$(1-2ax+a^2)^{-\frac{1}{2}}=\Sigma a^n X_n,$$

$$(1-2ax+a^2)^{-1}=\Sigma a^n \frac{\sin[(n+1)\operatorname{arc}\cos x]}{\sqrt{1-x^2}}$$

se prête au mode de généralisation découvert par Göpel et Rosenhain pour passer des séries elliptiques de Jacobi aux fonctions abéliennes d'un nombre quelconque de variables. En comparant, en effet, ces deux expressions

$$\Sigma\, e^{i\pi(2mx+m^2\omega)},$$

$$\Sigma\Sigma\, e^{i\pi(2mx+2ny+gm^2+2hmn+g'n^2)},$$

---

[1] F. Didon, *Étude de certaines fonctions analogues aux fonctions* X_n *de Legendre* (*Ann. sc. Éc. Normale*, 1re série, t. V, 1868, p. 229-310).

[2] Ch. Hermite, *Œuvres*, t. II, p. 320.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

on est naturellement tenté de l'étendre de cette manière

$$1 - 2ax - 2by + ga^2 + 2hab + g'b^2$$

ou bien avec n variables, $x, y, z, \ldots, u$

$$1 - 2ax - 2by - \ldots - 2ku + \varphi(a, b, \ldots, k),$$

$\varphi(a, b, \ldots, k)$ étant un polynome homogène et du second degré en $a, b, \ldots, k$. »

Les polynomes $V_{m,n}(x, y)$, qu'Hermite avait ainsi introduits pour généraliser ceux de Legendre, ne paraissent pas avoir attiré l'attention des auteurs qui, vers la même époque, cherchaient à construire la théorie des fonctions harmoniques dans l'hyperespace ; nulle allusion aux résultats d'Hermite, publiés en 1865, ne se trouve en effet dans les recherches de Mehler [1] (1866), Neumann [2] (1867), Cayley [3] (1875), Hill [4] (1883). Ce fait s'explique peut-être par la raison que tous ces auteurs employaient dans l'étude des fonctions hypersphériques les coordonnées polaires ; il est malaisé, par exemple, en partant de l'expression (13-LIX) d'une fonction hypersphérique zonale donnée par Heine (pour l'espace à quatre dimensions : $n = 2$)

$$Y_{\mu} = P^{2}_{\mu, p_1}(\cos\theta_1)\, P^{(1)}_{p_1, 0}(\cos\theta_2)$$

d'en faire le rapprochement avec les polynomes d'Hermite

$$V_{m,n}(x, y) = V_{m,n}(\cos\theta_1, \sin\theta_1 \cos\theta_2).$$

Le fait que *les polynomes* $V_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n)$ *sont susceptibles de jouer dans la théorie des fonctions hypersphériques le même rôle que les polynomes de Legendre dans celle des fonctions sphériques* a été énoncé par P. Appell [5] dans un Mémoire qui a été le point de départ de l'étude actuelle.

De ce rapprochement découle une double série de conséquences : d'abord, il permet de présenter la théorie des fonctions hypersphériques sous un jour nouveau en utilisant les résultats acquis par Hermite et par Didon dans l'étude des polynomes $V_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n)$; réciproquement il introduit entre les diverses propriétés des polynomes $V_{m_1, \ldots, m_n}$ un lien plus naturel, en les faisant toutes découler des quelques théorèmes généraux qui dominent la théorie des fonctions hypersphériques.

LXVIII. — La fonction génératrice des polynomes $V_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n)$.

Au point de vue auquel nous nous plaçons, la voie la plus naturelle [6] pour introduire la

---

(1) *Voir* p. 211.

(2) *Idem.*

(3) A. Cayley. *A Memoir on Prepotentials* (*Phil. trans. royal Soc. of London*, t. 165, Part. II, 1875, p. 675-774).

(4) *Voir* p. 211.

(5) P. Appell. *Les polynomes* $V_{m,n}$ *d'Hermite et leurs analogues rattachés aux potentiels à q variables* (*Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. 36, 1913, p. 203-212).

Les polynomes $V_{m,n}$ *d'Hermite et leurs analogues rattachés aux fonctions sphériques dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions* (*C. R. Acad. sc.*, t. 156, 1913, p. 1423).

(6) P. Appell, *loc. cit.*

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

fonction génératrice (2) des polynomes $V_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n)$, c'est de partir de la fonction

$$(4) \qquad F = [(z_1 - a_1)^2 + \ldots + (z_n - a_n)^2 + z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2]^{-\frac{n}{2}}.$$

Cette fonction vérifie l'équation de Laplace, puisque la quantité entre crochets représente le carré de la distance du point $P(z_1, \ldots, z_{n+2})$ au point $A(a_1, \ldots, a_n, 0, 0)$; en outre, elle est harmonique dans tout domaine qui ne contient pas le point A.

Soient respectivement r et a les distances des points P et A à l'origine

$$r^2 = z_1^2 + \ldots + z_{n+2}^2, \qquad a^2 = a_1^2 + \ldots + a_n^2;$$

tant que l'on a $a > r$, il est possible de développer la fonction F selon les puissances de $a_1, \ldots, a_n$ par la formule de Taylor

$$(5) \qquad F = \sum_0^\infty a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n} W_{m_1, \ldots, m_n}(z_1, \ldots, z_{n+2}),$$

en posant

$$(6) \qquad W_{m_1, \ldots, m_n}(z_1, \ldots, z_{n+2}) = \frac{(-1)^\mu}{(1, m_1) \ldots (1, m_n)} \frac{\partial^\mu}{\partial z_1^{m_1} \ldots \partial z_n^{m_n}} \left(\frac{1}{r^n}\right) \qquad (\mu = m_1 + \ldots + m_n).$$

Les fonctions $W_{m_1, \ldots, m_n}(z_1, \ldots, z_{n+2})$, *définies par cette formule, possèdent deux propriétés fondamentales :*

1° *Elles vérifient l'équation de Laplace;*
2° *Elles sont homogènes de degré* $-(\mu + n)$.

La première propriété, qui résulte du fait que les W sont les dérivées du potentiel $\frac{1}{r^n}$, a déjà été démontrée explicitement page 184. Pour vérifier la seconde, remplaçons, dans F, $z_1, \ldots, z_{n+2}$ par $\lambda z_1, \ldots, \lambda z_{n+2}$.

D'une part,

$$F' = [(\lambda z_1 - a_1)^2 + \ldots + (\lambda z_n - a_n)^2 + \lambda^2 z_{n+1}^2 + \lambda^2 z_{n+2}^2]^{-\frac{n}{2}} = \Sigma a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n} W_{m_1, \ldots, m_n}(\lambda z_1, \ldots, \lambda z_{n+2})$$

D'autre part,

$$F' = \lambda^{-n} \left[\left(z_1 - \frac{a_1}{\lambda}\right)^2 + \ldots + \left(z_n - \frac{a_n}{\lambda}\right)^2 + z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2\right]^{-\frac{n}{2}}$$
$$= \lambda^{-n} \sum \left(\frac{a_1}{\lambda}\right)^{m_1} \ldots \left(\frac{a_n}{\lambda}\right)^{m_n} W_{m_1, \ldots, m_n}(z_1, \ldots, z_{n+2}).$$

Le simple rapprochement de ces deux développements de F' montre que

$$(7) \qquad W_{m_1, \ldots, m_n}(\lambda z_1, \ldots, \lambda z_{n+2}) = \lambda^{-n-\mu} W_{m_1, \ldots, m_n}(z_1, \ldots, z_{n+2}),$$

ce qui prouve bien que $W_{m_1, \ldots, m_n}$ est homogène de degré $-(\mu + n)$.

Ceci étant, d'après la proposition du paragraphe LIX, *la valeur prise sur l'hypersphère* S :

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

$(r = 1)$ *par la fonction* $W_{m_1,\ldots,m_n}$, *harmonique à l'extérieur de* S, *homogène de degré* $-(\mu + n)$, *est une fonction hypersphérique de degré* μ; nous allons montrer que c'est, d'une manière plus précise, *une fonction hypersphérique zonale.*

Substituons à cet effet dans F aux coordonnées rectangulaires $z_1, \ldots, z_{n+2}$ de P, ses coordonnées zonales $r, x_1, \ldots, x_n, \varphi$,

$$F = [r^2 - 2r(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n) + a_1^2 + \ldots + a_n^2]^{-\frac{n}{2}}, \tag{8}$$

de sorte que, quand P vient sur S : $r = 1$,

$$F_S = [1 - 2a_1x_1 - \ldots - 2a_nx_n + a_1^2 + \ldots + a_n^2]^{-\frac{n}{2}}; \tag{9}$$

c'est précisément la fonction génératrice considérée a priori *par Hermite et Didon.*

La fonction F_S dépendant seulement de $x_1, \ldots, x_n$ et non de φ, la valeur que prend

$$W_{m_1,\ldots,m_n}(z_1, \ldots, z_{n+2})$$

sur S ne dépendra pas non plus de φ : désignons-la par

$$V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n);$$

quand P est sur S, le développement (5) s'écrit avec ces notations

$$F_S = [1 - 2a_1x_1 - \ldots - 2a_nx_n + a_1^2 + \ldots + a_n^2]^{-\frac{n}{2}} = \Sigma a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n} V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n). \tag{10}$$

Puisque les fonctions hypersphériques $V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n)$ ne dépendent pas de φ ce sont effectivement des fonctions zonales, donc des polynomes en $x_1, \ldots, x_n$ (p. 213).

La relation qui lie explicitement les fonctions harmoniques $W_{m_1,\ldots,m_n}$ aux fonctions hypersphériques $V_{m_1,\ldots,m_n}$ s'obtient aisément en remarquant que la formule (8) peut s'écrire

$$F = r^{-n}\left[1 - 2\left(\frac{a_1}{r}x_1 + \ldots + \frac{a_n}{r}x_n\right) + \frac{a_1^2}{r^2} + \ldots + \frac{a_n^2}{r^2}\right]^{-\frac{n}{2}},$$

d'où, d'après (10),

$$F = \frac{1}{r^n} \sum \left(\frac{a_1}{r}\right)^{m_1} \cdots \left(\frac{a_n}{r}\right)^{m_n} V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n).$$

Ce développement, rapproché de (5), donne

$$W_{m_1,\ldots,m_n}(z_1, \ldots, z_{n+2}) = \frac{1}{r^{n+\mu}} V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n). \tag{11}$$

Au lieu de considérer le polynome hypersphérique zonal $V_{m_1,\ldots,m_n}$ comme la valeur prise sur S, par une fonction harmonique à l'extérieur de S, homogène de degré $-(\mu + n)$, on peut également l'envisager comme la valeur prise sur S par un polynome harmonique homogène de degré μ. En effet, la proposition de Lord Kelvin (p. 187) fait correspondre à $W_{m_1,\ldots,m_n}$ une

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

nouvelle fonction, harmonique à l'intérieur de S, définie par

$$\begin{aligned}\mathfrak{W}_{m_1,\ldots,m_n}(z_1,\ldots,z_{n+2}) &= \frac{1}{r^n} W_{m_1,\ldots,m_n}\left(\frac{z_1}{r^2},\ldots,\frac{z_{n+2}}{r^2}\right)\\ &= \frac{1}{r^n}\left(\frac{1}{r^2}\right)^{-(n+\mu)} W_{m_1,\ldots,m_n}(z_1,\ldots,z_{n+2})\\ &= r^{n+2\mu} W_{m_1,\ldots,m_n}(z_1,\ldots,z_{n+2}).\end{aligned} \tag{12}$$

La fonction $\mathfrak{W}$ est homogène de degré

$$(n+2\mu)-(\mu+n)=\mu.$$

C'est donc un polynome harmonique homogène de degré μ.

Des équations (11) et (12), on tire la relation

$$\mathfrak{W}_{m_1,\ldots,m_n}(z_1,\ldots,z_{n+2}) = r^{\mu} V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n), \tag{13}$$

qui peut, aussi bien que (11), servir de définition aux polynomes zonaux $V_{m_1,\ldots,m_n}$.

Remarquons que les polynomes $\mathfrak{W}$ admettent comme fonction génératrice G la fonction qui se déduit de F par la transformation de Lord Kelvin

$$\begin{aligned}G &= \frac{1}{r^n}\left[\left(\frac{z_1}{r^2}-a_1\right)^2+\ldots+\left(\frac{z_n}{r^2}-a_n\right)^2+\frac{z_{n+1}^2+z_{n+2}^2}{r^4}\right]^{-\frac{n}{2}}\\ &= [1-2r(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)+r^2(a_1^2+\ldots+a_n^2)]^{-\frac{n}{2}}.\end{aligned}$$

D'ailleurs, que nous partions de l'une ou l'autre des deux fonctions harmoniques F ou G, la formule (11) ou (13) conduit toujours, en vertu de (6), à la relation

$$V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{(-1)^{\mu}}{(1,m_1)\ldots(1,m_n)} r^{n+\mu} \frac{\partial^{\mu}}{\partial z_1^{m_1}\ldots\partial z_n^{m_n}}\left(\frac{1}{r^n}\right) \tag{14}$$

qui peut servir d'équation de définition aux polynomes zonaux $V_{m_1,\ldots,m_n}$ *tout aussi bien que le développement de la fonction génératrice*

$$(1-2a_1x_1-\ldots-2a_nx_n+a_1^2+\ldots+a_n^2)^{-\frac{n}{2}} = \Sigma a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n} V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n) \tag{2}$$

considérée a priori *par Hermite* ($n=2$) *et Didon* (n quelconque).

LXIX. — Expression générale des polynomes $V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n)$.

En calculant les premiers termes du développement de sa fonction génératrice, Hermite a formé [1] effectivement l'expression des quinze premiers polynomes $V_{m,n}(x,y)$ (jusqu'à $m+n=4$ inclus); nous allons donner l'expression générale [2] des polynomes $V_{m_1,\ldots,m_n}$ quels

[1] Hermite, *Œuvres*, t. II, p. 322-323.
[2] J. Kampé de Fériet, *Thèse*, p. 31.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

que soient les entiers $m_1, \ldots, m_n$, en étendant, au cas de $n+2$ variables, une formule démontrée par Hobson [1] pour les fonctions harmoniques à trois variables.

Soit

$$f_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2}) = \sum_{m_1 + \ldots + m_{n+2} = \mu} a_{m_1, \ldots, m_{n+2}} z_1^{m_1} \ldots z_{n+2}^{m_{n+2}}$$

un polynome homogène de degré μ; en employant la méthode symbolique connue (dont la définition a été rappelée, page 178), l'expression

$$\Pi_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2}) = f_\mu\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_{n+2}}\right)\frac{1}{r^n}$$

a un sens bien défini

$$\Pi_\mu = \sum_{m_1 + \ldots + m_{n+2} = \mu} a_{m_1, \ldots, m_{n+2}} \frac{\partial^\mu}{\partial z_1^{m_1} \ldots \partial z_{n+2}^{m_{n+2}}}\left(\frac{1}{r^n}\right).$$

La fonction Π_μ est évidemment solution de l'équation de Laplace; elle est homogène de degré $-(\mu + n)$; par induction, on voit qu'elle doit être de la forme

$$\Pi_\mu = (-1)^\mu 2^\mu \left(\frac{n}{2}, \mu\right) \frac{1}{r^{n+2\mu}} [f_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2}) + \ldots + r^{2j} f_{\mu-2j}(z_1, \ldots, z_{n+2}) + \ldots];$$

les fonctions $f_{\mu-2j}$, qu'il s'agit de déterminer, sont des polynomes homogènes de degré $\mu - 2j$, le développement étant d'ailleurs limité et s'arrêtant de lui-même au terme $r^\mu f_0$ ou $r^{\mu-1} f_1$, selon que μ est pair ou impair.

La fonction Π'_μ, qui se déduit de Π_μ en lui appliquant la transformation de Lord Kelvin et en la divisant par la constante $(-1)^\mu 2^\mu \left(\frac{n}{2}, \mu\right)$, a pour expression

$$(15) \qquad \Pi'_\mu = f_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2}) + \ldots + r^{2j} f_{\mu-2j}(z_1, \ldots, z_{n+2}) + \ldots;$$

Π'_μ est évidemment un polynome homogène de degré μ, qui doit, comme Π_μ, vérifier l'équation de Laplace; c'est en exprimant ce fait que l'on peut déterminer très simplement les polynomes $f_{\mu-2j}$.

En effet, nous devons écrire que

$$\Delta^2 \Pi'_\mu = \Delta^2 f_\mu + \ldots + \Delta^2(r^{2j} f_{\mu-2j}) + \ldots = 0.$$

Or

$$\Delta^2(r^{2j} f_{\mu-2j}) = r^{2j} \Delta^2 f + 4j r^{2j-2}\left(z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \ldots + z_{n+2} \frac{\partial f}{\partial z_{n+2}}\right) + f \Delta^2(r^{2j});$$

mais, en vertu de l'homogénéité de f,

$$z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \ldots + z_{n+2} \frac{\partial f}{\partial z_{n+2}} = (\mu - 2j) f_{\mu-2j},$$

---

[1] Hobson, *On a theorem in Differentiation and its application to Spherical Harmonics* (*Proc. of the Mathematical Soc. of London*, t. 24, p. 55).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

et, d'après l'expression de Δ^2 en coordonnées polaires (6-LVIII),

$$r^2\,\Delta^2(r^{2j}) = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}(2j\,r^{n+2j}) = 2j(n+2j)r^{2j};$$

donc

$$\Delta^2(r^{2j}f_{\mu-2j}) = r^{2j}\,\Delta^2 f_{\mu-2j} + 2j(n+2\mu-2j)r^{2j-2}f_{\mu-2j}. \tag{16}$$

Par conséquent, en ordonnant $\Delta^2\Pi'_\mu$ selon les puissances de r^2, le coefficient de r^{2j-2} a pour expression

$$\Delta^2 f_{\mu-2j+2} + 2j(n+2\mu-2j)f_{\mu-2j}.$$

Pour que $\Delta^2\Pi'_\mu = 0$, il suffit donc d'écrire que

$$\Delta^2 f_{\mu-2j+2} + 2j(n+2\mu-2j)f_{\mu-2j} = 0.$$

pour $j = 1, 2, \ldots$.

Ces équations déterminent, de proche en proche, $f_{\mu-2j}$ en fonction de f_μ :

$$f_{\mu-2j} = \frac{1}{2^{2j}}\frac{\Delta^{2j}f_\mu}{(1,j)\left(-\frac{n}{2}-\mu-1,j\right)}; \tag{17}$$

ce résultat est bien compatible avec l'hypothèse faite sur le degré de $f_{\mu-2j}$, car f_μ étant homogène de degré μ, $\Delta^{2j}f_\mu$ est aussi homogène et de degré $\mu-2j$.

Nous obtenons donc finalement pour le polynome Π'_μ, défini, par la formule

$$\Pi'_\mu(z_1,\ldots,z_{n+2}) = \frac{(-1)^\mu r^{n+2\mu}}{2^\mu\left(\frac{n}{2},\mu\right)}f_\mu\left(\frac{\partial}{\partial z_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial z_{n+2}}\right)\frac{1}{r^n}, \tag{18}$$

l'expression suivante

$$\Pi'_\mu = f_\mu(z_1,\ldots,z_{n+2}) + \ldots + \left(\frac{r}{2}\right)^{2j}\frac{\Delta^{2j}f_\mu(z_1,\ldots,z_{n+2})}{(1,j)\left(-\frac{n}{2}-\mu-1,j\right)} + \ldots \tag{19}$$

Cette extension de la formule d'Hobson conduit immédiatement à l'expression générale des polynomes harmoniques

$$\Psi_{m_1,\ldots,m_n}(z_1,\ldots,z_{n+2}) = r^\mu V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n). \tag{13}$$

En effet, il suffit de remarquer que l'expression qui sert de définition à ces polynomes,

$$\Psi_{m_1,\ldots,m_n} = \frac{(-1)^\mu}{(1,m_1)\ldots(1,m_n)}r^{n+2\mu}\frac{\partial^\mu}{\partial z_1^{m_1}\ldots\partial z_n^{m_n}}\frac{1}{r^n},$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

rentre comme cas particulier dans la formule (18) en prenant

$$f_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2}) = 2^\mu \frac{\left(\frac{n}{2}, \mu\right)}{(1, m_1)\ldots(1, m_n)} z_1^{m_1} \ldots z_n^{m_n}.$$

Par conséquent,

$$(20)\quad \mathfrak{W}_{m_1,\ldots,m_n} = 2^\mu \frac{\left(\frac{n}{2}, \mu\right)}{(1, m_1)\ldots(1, m_n)} \left[z_1^{m_1} \ldots z_n^{m_n} + \ldots + \left(\frac{r}{2}\right)^{2j} \frac{\Delta^{2j}(z_1^{m_1} \ldots z_n^{m_n})}{(1, j)\left(-\frac{n}{2} - \mu + 1, j\right)} + \ldots \right].$$

Remplaçons les coordonnées rectangulaires $z_1, \ldots, z_{n+2}$ par les coordonnées zonales $r, x_1, \ldots, x_n, \varphi$

$$z_1^{m_1} \ldots z_n^{m_n} = r^\mu x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n},$$

$$\Delta^{2j}(z_1^{m_1} \ldots z_n^{m_n}) = r^{\mu - 2j} \Delta^{2j}(x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}),$$

où, comme on l'a déjà fait dans un cas analogue (p. 216), le symbole Δ^{2j} du second membre représente la même opération par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_n$ que celui du premier par rapport aux variables $z_1, \ldots, z_n$.

Donc, le polynome harmonique $\mathfrak{W}_{m_1,\ldots,m_n}$ a pour valeur

$$(21)\quad \mathfrak{W}_{m_1,\ldots,m_n} = 2^\mu \frac{\left(\frac{n}{2}, \mu\right)}{(1, m_1)\ldots(1, m_n)} r^\mu \left[x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n} + \ldots + \frac{1}{2^{2j}} \frac{\Delta^{2j}(x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n})}{(1, j)\left(-\frac{n}{2} - \mu + 1, j\right)} + \ldots \right],$$

ce qui donne *l'expression générale du polynome hypersphérique zonal* $V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n)$ que nous cherchions

$$(22)\quad V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n) = 2^\mu \frac{\left(\frac{n}{2}, \mu\right)}{(1, m_1)\ldots(1, m_n)} \left[x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n} + \ldots + \frac{1}{2^{2j}} \frac{\Delta^{2j}(x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n})}{(1, j)\left(-\frac{n}{2} - \mu + 1, j\right)} + \ldots \right].$$

Il est visible sur cette expression que $V_{m_1,\ldots,m_n}$ est un polynome de degré μ en $x_1, \ldots, x_n$; le terme de plus haut degré est le terme en $x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}$; quant aux termes de degré $\mu - 2j$, ils proviennent uniquement de $\Delta^{2j}(x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n})$; or

$$\Delta^{2j}(x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 \right]^j (x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n})$$

$$= (1, j) \sum_j \frac{1}{(1, j_1)\ldots(1, j_n)} \frac{\partial^{2j}}{\partial x_1^{2j_1} \ldots \partial x_n^{2j_n}} (x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}),$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs positives ou nulles des entiers $j_1, \ldots, j_n$ telles que

$$j_1 + \ldots + j_n = j;$$

d'autre part,

$$\frac{\partial^{2j}}{\partial x_1^{2j_1} \ldots \partial x_n^{2j_n}} (x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}) = (-m_1, 2j_1)\ldots(-m_n, 2j_n) x_1^{m_1 - 2j_1} \ldots x_n^{m_n - 2j_n},$$

$$j_1 \leq \frac{m_1}{2}, \quad \ldots, \quad j_n \leq \frac{m_n}{2},$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

d'où

$$\Delta^{2j}(x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}) = (1,j)\,x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}\sum\frac{(-m_1,2j_1)\ldots(-m_n,2j_n)}{(1,j_1)\ldots(1,j_n)}\frac{1}{x_1^{2j_1}}\ldots\frac{1}{x_n^{2j_n}}.$$

En substituant dans (22), on obtient l'*expression développée du polynome* $V_{m_1,\ldots,m_n}$

$$(23)\quad V_{m_1,\ldots,m_n} = 2^{\mu}\frac{\left(\frac{n}{2},\mu\right)}{(1,m_1)\ldots(1,m_n)}x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}\times\sum\frac{1}{2^{2j}}\frac{(-m_1,2j_1)\ldots(-m_n,2j_n)}{(1,j_1)\ldots(1,j_n)\left(-\frac{n}{2}-\mu+1,j\right)}\frac{1}{x_1^{2j_1}}\ldots\frac{1}{x_n^{2j_n}}$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs des entiers $j_1,\ldots,j_n$ telles que

$$0\leq j_1\leq\frac{m_1}{2},\quad\ldots,\quad 0\leq j_n\leq\frac{m_n}{2}.$$

Sous cette forme on aperçoit immédiatement que *la parité du polynome* $V_{m_1,\ldots,m_n}$ *par rapport aux variables* $x_1,\ldots,x_n$ *est celle du produit* $x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}$.

L'expression développée (23) peut aussi s'obtenir directement, sans s'appuyer sur la formule (22), déduite de la formule de Hobson généralisée.

En effet, en partant de l'identité évidente

$$(1-2a_1x_1-\ldots-2a_nx_n+a_1^2+\ldots+a_n^2)^{-\frac{n}{2}} = [1-a_1(2x_1-a_1)-\ldots-a_n(2x_n-a_n)]^{-\frac{n}{2}},$$

on peut d'abord développer la fonction génératrice de la façon suivante :

$$(1-2a_1x_1-\ldots-2a_nx_n+a_1^2+\ldots+a_n^2)^{-\frac{n}{2}} = \sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{\left(\frac{n}{2},p\right)}{(1,p_1)\ldots(1,p_n)}a_1^{p_1}\ldots a_n^{p_n}(2x_1-a_1)^{p_1}\ldots(2x_n-a_n)^{p_n}$$
$$(p=p_1+\ldots+p_n).$$

Mais d'autre part

$$(2x_k-a_k)^{p_k} = \sum_{k=0}^{k=p_k}\frac{(-p_k,j_k)}{(1,j_k)}(2x_k)^{p_k-j_k}a_k^{j_k}.$$

On aboutit donc, pour le développement de la fonction génératrice, à la série

$$\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{\left(\frac{n}{2},p\right)}{(1,p_1)\ldots(1,p_n)}\sum_{j_1,\ldots,j_n}\frac{(-p_1,j_1)\ldots(-p_n,j_n)}{(1,j_1)\ldots(1,j_n)}(2x_1)^{p_1-j_1}\ldots(2x_n)^{p_n-j_n}a_1^{j_1+j_1}\ldots a_n^{p_n+j_n}.$$

Le polynome $V_{m_1,\ldots,m_n}$ étant, par définition, le coefficient de $a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}$ dans cette série, on obtient son expression en prenant l'ensemble des termes pour lesquels

$$p_1+j_1=m_1,\quad\ldots\quad p_n+j_n=m_n;$$

d'où

$$V_{m_1,\ldots,m_n} = \sum_{j_1,\ldots,j_n}\frac{\left(\frac{n}{2},2-j\right)}{(1,m_1-j_1)\ldots(1,m_n-j_n)}\frac{(-m_1+j_1,j_1)\ldots(-m_n+j_n,j_n)}{(1,j_1)\ldots(1,j_n)}2^{2j}x_1^{m_1-2j_1}\ldots x_n^{m_n-2j_n}.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

En utilisant les formules faciles à établir

$$\left(\frac{n}{2}, \mu - j\right) = (-1)^j \frac{\left(\frac{n}{2}, \mu\right)}{\left(-\frac{n}{2} - \mu + 1, j\right)}$$

et

$$\frac{(-m_k + j_k, j_k)}{(1, m_k - j_k)} = (-1)^{j_k} \frac{(-m_k, 2j_k)}{(1, m_k)},$$

on retombe sur l'expression (23).

LXX. — Expression des polynomes $V_{m_1, \ldots, m_n}$ par des fonctions hypergéométriques de n variables.

Un lien étroit existe entre les polynomes de Legendre et la fonction hypergéométrique de Gauss : les polynomes $V_m(x)$ s'expriment, en effet, de plusieurs manières différentes au moyen de la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ et l'on peut, si l'on veut, considérer toutes leurs propriétés comme de simples cas particuliers des propriétés de cette fonction. Il existe de même une liaison entre les polynomes $V_{m_1, \ldots, m_n}$ et les fonctions hypergéométriques de n variables : l'expression classique [1] du polynome de Legendre

$$V_m(x) = 2^m \frac{\left(\frac{1}{2}, m\right)}{(1, m)} x^m F\left(-\frac{m}{2}, \frac{1-m}{2}, \frac{1}{2} - m, \frac{1}{x^2}\right)$$

s'étend aisément aux polynomes $V_{m_1, \ldots, m_n}$ en introduisant la fonction (2-XXXVII)

$$F_B(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma, x_1, \ldots, x_n) = \sum \frac{(\alpha_1, j_1)(\beta_1, j_1) \ldots (\alpha_n, j_n)(\beta_n, j_n)}{(\gamma, j_1 + \ldots + j_n)(1, j_1) \ldots (1, j_n)} x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n}.$$

En effet, en s'appuyant sur la formule évidente

$$\frac{1}{2^{j_k}}(-m, 2j_k) = \left(-\frac{m_k}{2}, j_k\right)\left(\frac{1-m_k}{2}, j_k\right),$$

on peut donner à l'expression développée du polynome $V_{m_1, \ldots, m_n}$ la forme équivalente

$$(23\,bis)\quad V_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n) = 2^{\mu} \frac{\left(\frac{n}{2}, \mu\right)}{(1, m_1) \ldots (1, m_n)} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}$$

$$\times \sum \frac{\left(-\frac{m_1}{2}, j_1\right)\left(\frac{1-m_1}{2}, j_1\right) \ldots \left(-\frac{m_n}{2}, j_n\right)\left(\frac{1-m_n}{2}, j_n\right)}{\left(-\frac{n}{2} - \mu + 1, j\right)(1, j_1) \ldots (1, j_n)} \left(\frac{1}{x_1^2}\right)^{j_1} \ldots \left(\frac{1}{x_n^2}\right)^{j_n}.$$

---

[1] Voir *Encycl. Sc. math.* (édition française), t. II, vol. 5, fasc. 2, p. 158.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Ce qui permet d'écrire immédiatement [1]

$$(24)\quad V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n) = 2^{\mu}\frac{\left(\frac{n}{2},\mu\right)}{(1,m_1)\ldots(1,m_n)}x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}$$
$$\times F_B\left[-\frac{m_1}{2},\ldots,\frac{-m_n}{2},\frac{1-m_1}{2},\ldots,\frac{1-m_n}{2},-\frac{n}{2}-\mu+1,\frac{1}{x_1^2},\ldots,\frac{1}{x_n^2}\right].$$

Cette fonction hypergéométrique F_B se réduit bien à un polynome, puisque pour tous les indices m_j, l'un des deux coefficients

$$-\frac{m_j}{2},\quad \frac{1-m_j}{2}$$

est nécessairement un entier négatif.

Nous indiquerons plus loin comment M. Lauricella a exprimé, par une toute autre voie, les polynomes $V_{m_1,\ldots,m_n}$ par la fonction F_A.

§ XXI. — Expression du groupe homogène des polynomes $V_{m_1,\ldots,m_n}$ d'un degré μ donné. Équations aux différences finies et formules de récurrence.

Le groupe homogène des polynomes $V_{m_1,\ldots,m_n}$ d'un degré $m_1+\ldots+m_n=\mu$ donné s'exprime élégamment au moyen des polynomes à une variable définis par le développement

$$(11\text{-}LIX)\qquad (1-2ax+a^2)^{-\frac{n}{2}} = \Sigma a^{\mu}V_{\mu}^{(n)}(x).$$

En effet, la fonction génératrice

$$(1-2a_1x_1-\ldots-2a_nx_n+a_1^2+\ldots+a_n^2)^{-\frac{n}{2}} = \Sigma a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n)$$

se ramène à la forme

$$(1-2ax+a^2)^{-\frac{n}{2}}$$

en posant

$$a^2 = a_1^2+\ldots+a_n^2,\qquad x = \frac{a_1x_1+\ldots+a_nx_n}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}}.$$

On a donc l'identité

$$\Sigma a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n) = \Sigma(a_1^2+\ldots+a_n^2)^{\frac{\mu}{2}}V_{\mu}^{(n)}\left[\frac{a_1x_1+\ldots+a_nx_n}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}}\right]$$

qui conduit immédiatement à l'expression du groupe homogène

$$(25)\qquad \sum_{m_1+\ldots+m_n=\mu} a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n) = (a_1^2+\ldots+a_n^2)^{\frac{\mu}{2}}V_{\mu}^{(n)}\left[\frac{a_1x_1+\ldots+a_nx_n}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}}\right].$$

---

[1] J. Kampé de Fériet, *Thèse*, p. 36.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Presque toutes les propriétés des polynomes $V_{m_1,\ldots,m_n}$ pourraient se déduire, par l'intermédiaire de cette relation, des propriétés connues des polynomes $V_\mu^n(x)$ (1).

Nous n'emploierons pas néanmoins cette méthode, qui suppose faite l'étude préalable des $V_\mu^n(x)$ et ne serait pas en harmonie avec notre plan d'ensemble, qui consiste à rattacher les propriétés des polynomes $V_{m_1,\ldots,m_n}$ à la théorie générale des fonctions harmoniques.

Pour donner, cependant, un exemple de ce procédé *nous tirerons de la relation* (25) *une formule de récurrence exprimant un polynome* $V_{m_1,\ldots,m_n}$ *d'un degré* μ *donné, en fonction de ceux de degrés* $\mu-1$ *et* $\mu-2$.

Partons de l'équation aux différences finies vérifiée par trois polynomes V_μ^n à indices consécutifs (2)

$$\mu V_\mu^n(x) = (n+2\mu-2)x V_{\mu-1}^n(x) - (n+\mu-2)V_{\mu-2}^n(x). \tag{26}$$

En multipliant cette relation par $(a_1^2+\ldots+a_n^2)^\mu$ et en y remplaçant x par

$$\frac{a_1x_1+\ldots+a_nx_n}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}}$$

elle se transforme, d'après (25), en une relation entre les trois groupes homogènes de polynomes $V_{m_1,\ldots,m_n}$ de degrés μ, $\mu-1$, $\mu-2$

$$\mu\sum_{\mu} a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}V_{m_1,\ldots,m_n} = (n+2\mu-2)(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)\sum_{\mu-1} a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}V_{m_1,\ldots,m_n}$$
$$-(n+\mu-2)(a_1^2+\ldots+a_n^2)\sum_{\mu-2} a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}V_{m_1,\ldots,m_n}.$$

Les deux membres de cette égalité étant homogènes de degré μ en $a_1, \ldots, a_n$, l'identification des coefficients de $a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}$ conduit directement à l'expression du polynome $V_{m_1,\ldots,m_n}$ en fonction de ceux de degrés $\mu-1$ et $\mu-2$

$$\mu V_{m_1,\ldots,m_n} = (n+2\mu-2)\sum_{j=1}^{j=n}\varepsilon(m_j-1)x_jV_{m_1,\ldots,m_j-1,\ldots,m_n}$$
$$-(n+\mu-2)\sum_{j=1}^{j=n}\varepsilon(m_j-2)V_{m_1,\ldots,m_j-2,\ldots,m_n}, \tag{27}$$

le symbole $\varepsilon(q)$ étant défini par les conditions

$$\varepsilon(q)=0 \quad \text{pour } q<0,$$
$$\varepsilon(q)=1 \quad \text{pour } q=0.$$

(1) *Voir* la Note à la fin du Volume.

(2) Pour la démonstration de (26) *voir* la Note à la fin du Volume.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

LXXII. — Système de Didon des n équations aux dérivées partielles des polynomes $V_{m_1,\ldots,m_n}$.

Il est bien connu que les polynomes de Legendre $V_m(x)$ satisfont à l'équation différentielle

$$(1-x^2)\frac{d^2V}{dx^2}-2x\frac{dV}{dx}+m(m+1)V=0.$$

Le complément le plus important, apporté par Didon, à l'étude faite par Hermite de ses polynomes $V_{m,n}(x, y)$, a été la découverte (1) *d'un système de n équations aux dérivées partielles du second ordre vérifiées par les polynomes $V_{m_1,\ldots,m_n}$.*

Didon obtient ses équations en dérivant la fonction génératrice

$$(1-2a_1x_1-\ldots-2a_nx_n+a_1^2+\ldots+a_n^2)^{-\frac{n}{2}}$$

par rapport aux variables x et aux paramètres a et en établissant des identités entre ces diverses dérivées.

L'expression (24) des polynomes $V_{m_1,\ldots,m_n}$ par une fonction hypergéométrique F_B permet de prévoir ce résultat, puisque la fonction F_B vérifie un système de n équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre (XXXIX).

On pourrait (2) donc, en partant de la formule (24), retrouver, en s'appuyant sur les équations de M. Lauricella, les équations de Didon. Mais, nous allons les établir par un procédé direct (3), qui ne suppose pas connues les équations de M. Lauricella et résulte immédiatement de la définition même des polynomes $V_{m_1,\ldots,m_n}$.

Nous formerons d'abord un système de n équations vérifiées par les fonctions

$$W_{m_1,\ldots,m_n}(z_1,\ldots,z_{n+2})=\frac{(-1)^q}{(1,m_1)\ldots(1,m_n)}\frac{\partial^q}{\partial z_1^{m_1}\ldots\partial z_n^{m_n}}\left(\frac{1}{r^n}\right).$$

Remarquons que, d'après leur expression tirée de (20), ces fonctions ne dépendent de z_{n+1} et z_{n+2} que par l'intermédiaire de la quantité

$$\rho^2=z_{n+1}^2+z_{n+2}^2.$$

Or, comme

$$r^2=z_1^2+\ldots+z_n^2+\rho^2,$$

(1) F. Didon, *Étude de certaines fonctions analogues aux fonctions X_n de Legendre* (*Ann. scientif. Éc. Normale sup.*, 1re série, t. V, 1868, p. 241-243 et p. 269).

(2) Cette méthode a été suivie par J. Kampé de Fériet, *Thèse*, p. 36.

(3) J. Kampé de Fériet *Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles vérifiées par les polynomes hypersphériques* (*C. R. Acad. des Sc.*, t. 168, 1918, p. 519).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

il est bien évident que $\frac{1}{r^n}$ vérifie les n identités

$$(28)\qquad \rho\frac{\partial}{\partial z_j}\left(\frac{1}{r^n}\right)-z_j\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{r^n}\right)=0\qquad(j=1,2,\ldots,n).$$

Dérivons l'identité de rang j, m_1 fois par rapport à $z_1, \ldots, (m_j+1)$ fois par rapport à à $z_j, \ldots, m_n$ fois par rapport à z_n; en jetant un simple regard sur l'expression de W, nous voyons que la relation ainsi obtenue peut s'écrire

$$(29)\qquad \rho\frac{\partial^2 W}{\partial z_j^2}-z_j\frac{\partial^2 W}{\partial z_j\,\partial\rho}-(m_j-1)\frac{\partial W}{\partial\rho}=0,$$

ce qui conduit pour W *au système de* n *équations*

$$(30)\qquad \frac{\partial}{\partial z_j}\left[\frac{\partial W}{\partial z_j}-\frac{z_j}{\rho}\frac{\partial W}{\partial\rho}\right]-m_j\frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial\rho}=0\qquad(k=1,2,\ldots,n).$$

C'est de ce système que se déduit le système vérifié par les polynomes $V_{m_1,\ldots,m_n}$, en passant simplement des variables $(z_1, \ldots, z_n, \rho)$ aux variables $(x_1, \ldots, x_n, r)$ et en tenant compte de ce que W et V sont liés par la relation

$$W_{m_1,\ldots,m_n}=\frac{1}{r^{n+\mu}}V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n).$$

Or, F désignant une fonction arbitraire, on tire des formules du changement de variables

$$z_1=r.x_1,\qquad\ldots\qquad z_n=r.x_n,\qquad\rho=r\sqrt{X_n},$$

les relations suivantes:

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial z_j}-\frac{x_j}{r}\frac{\partial F}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial x_j}-\frac{x_j}{r}\sum_{k=1}^{k=n}x_k\frac{\partial F}{\partial x_k}\qquad(j=1,2,\ldots,n),\\&\frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial\rho}=\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\sum_{k=1}^{k=n}x_k\frac{\partial F}{\partial x_k};\end{aligned}\right.$$

d'où

$$\frac{\partial F}{\partial z_j}-\frac{z_j}{\rho}\frac{\partial F}{\partial\rho}=\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial x_j}.$$

Appliquons cette dernière formule à la fonction W,

$$\frac{\partial W}{\partial z_j}-\frac{z_j}{\rho}\frac{\partial W}{\partial\rho}=r^{-(\mu+n+1)}\frac{\partial V}{\partial x_j};$$

par conséquent,

$$\frac{\partial}{\partial z_j}\left[\frac{\partial W}{\partial z_j}-\frac{z_j}{\rho}\frac{\partial W}{\partial\rho}\right]=\frac{\partial}{\partial z_j}\left[r^{-(\mu+n+1)}\frac{\partial V}{\partial x_j}\right],$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

et, d'après la première formule (31),

$$r^{\mu+n+2}\frac{\partial}{\partial z_j}\left[\frac{\partial W}{\partial z_j}-\frac{z_j}{\rho}\frac{\partial W}{\partial \rho}\right]=-(\mu+n+1)x_j\frac{\partial V}{\partial x_j}+\frac{\partial^2 V}{\partial x_j^2}-x_j\sum_{k=1}^{k=n}x_k\frac{\partial^2 V}{\partial x_j\,\partial x_k}.$$

D'autre part, d'après la deuxième formule (31),

$$r^{\mu+n+2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial \rho}=-(\mu+n)V-\sum_{k=1}^{k=n}x_k\frac{\partial V}{\partial x_k}.$$

En portant ces deux dernières expressions dans les équations (30), nous obtenons

$$(32)\quad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_j^2}-x_j\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}x_k\frac{\partial^2 V}{\partial x_j\,\partial x_k}\right)-(\mu+n+1)x_j\dfrac{\partial V}{\partial x_j}+m_j\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}x_k\frac{\partial V}{\partial x_k}\right)+m_j(\mu+n)V=0,\\ \qquad\qquad (j=1,2,\ldots,n).\end{array}\right.$$

L'ensemble de ces n équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre forme le système de Didon vérifié par le polynome $V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n)$.

En écrivant les équations (32) sous la forme

$$(32\ bis)\quad \left\{\begin{array}{l}(1-x_j^2)\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_j^2}-x_j\left(\displaystyle\sum_{k\neq j}x_k\frac{\partial^2 V}{\partial x_j\,\partial x_k}\right)\\ \qquad -[(\mu+n+1)-m_j]x_j\dfrac{\partial V}{\partial x_j}+m_j\left(\displaystyle\sum_{k\neq j}x_k\frac{\partial V}{\partial x_k}\right)+m_j(\mu+n)V=0\\ \qquad\qquad (j=1,2,\ldots,n),\end{array}\right.$$

on voit de suite que pour $n=1$, d'où $\mu=m$, l'équation unique à laquelle se réduit alors le système

$$(1-x^2)\frac{d^2V}{dx^2}-2x\frac{dV}{dx}+m(m+1)V=0$$

se confond avec l'équation, rappelée plus haut, du polynome de Legendre $V_m(x)$.

Les équations de Didon peuvent encore se mettre sous la forme plus condensée

$$(33)\quad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_j^2}-x_j\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}x_k\frac{\partial V}{\partial x_k}\right)+(\mu+n)V\right]+m_j\left[\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}x_k\frac{\partial V}{\partial x_k}\right)+(\mu+n)V\right]=0\\ \qquad\qquad (j=1,2,\ldots,n)\end{array}\right.$$

ou encore sous cette forme, que nous conserverons définitivement [1] :

$$(34)\quad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left\{\dfrac{\partial V}{\partial x_j}-x_j\left[\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}x_k\frac{\partial V}{\partial x_k}\right)+(\mu+n)V\right]\right\}+(m_j+1)\left[\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}x_k\frac{\partial V}{\partial x_k}\right)+(\mu+n)V\right]=0\\ \qquad\qquad (j=1,2,\ldots,n).\end{array}\right.$$

---

[1] J. Kampé de Fériet, *Thèse*, p. 37.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Faisons la somme des n équations (34), nous obtenons l'équation

$$\sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial V}{\partial x_j} - x_j\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k \frac{\partial V}{\partial x_k}\right) + (\mu+n)V\right]\right\} + (m_j+1)\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k \frac{\partial V}{\partial x_k}\right) + (\mu+n)V\right] = 0.$$

On s'assure facilement que

$$\sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial}{\partial x_j}[-x_j(\mu+n)V] + (m_j+1)\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k \frac{\partial V}{\partial x_k}\right) + (\mu+n)V\right] = \mu(\mu+n)V;$$

d'où, pour la somme des n équations (34),

$$(35) \qquad \mu(\mu+n)V + \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial V}{\partial x_j} - x_j\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k \frac{\partial V}{\partial x_k}\right)\right] = 0.$$

Chacune des équations (34) étant vérifiée par le polynome $V_{m_1,\ldots,m_n}$, il en est évidemment de même de celle-ci, mais elle possède une propriété remarquable :

Tandis que les n équations de Didon dépendent des indices $m_1, \ldots, m_n$ séparément, l'équation (35) *ne dépend que de leur somme $\mu = m_1 + \ldots + m_n$; elle est donc commune à tous les polynomes de même degré μ. Cette équation exprime, en effet, simplement que le polynome $V_{m_1,\ldots,m_n}$ est une fonction hypersphérique zonale de degré μ.*

Pour le démontrer, il suffit de constater que l'équation (35) est identique à l'équation (48-LXV). La raison de ce fait est facile à donner en examinant les équations de la fonction W, d'où résultent celles du polynome V.

En effet, les équations (30) peuvent s'écrire

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z_j^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(z_j \frac{\partial W}{\partial z_j}\right) - (m_j+1)\frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial \rho} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Faisons la somme de ces n équations

$$(36) \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial z_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 W}{\partial z_n^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(z_1 \frac{\partial W}{\partial z_1} + \ldots + z_n \frac{\partial W}{\partial z_n}\right) - (\mu+n)\frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial \rho} = 0.$$

Or W étant homogène de degré $-(\mu+n)$ en $z_1, \ldots, z_n, \rho$,

$$\rho \frac{\partial W}{\partial \rho} + z_1 \frac{\partial W}{\partial z_1} + \ldots + z_n \frac{\partial W}{\partial z_n} = -(\mu+n)W;$$

d'où, en dérivant cette relation par rapport à ρ,

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial W}{\partial \rho}\right) = -\frac{\partial}{\partial \rho}\left(z_1 \frac{\partial W}{\partial z_1} + \ldots + z_n \frac{\partial W}{\partial z_n}\right) - (\mu+n)\frac{\partial W}{\partial \rho}.$$

Ce qui permet d'écrire l'équation (36) :

$$(37) \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial z_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 W}{\partial z_n^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial W}{\partial \rho}\right) = 0.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Mais puisque W ne dépend de z_{n+1} et z_{n+2} que par l'intermédiaire de $\rho = \sqrt{z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2}$,

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial W}{\partial\rho}\right) = \frac{\partial^2 W}{\partial z_{n+1}^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z_{n+2}^2}.$$

De telle sorte que finalement l'équation (36) est équivalente à celle-ci :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 W}{\partial z_n^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z_{n+1}^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z_{n+2}^2} = 0.$$

L'équation obtenue en faisant la somme des n équations (35), *vérifiées par* W, *est donc identique à l'équation de Laplace.*

Puisque nous avons déduit les équations (34), vérifiées par le polynome $V_{m_1,\ldots,m_n}$, des équations (35), ce résultat explique clairement pourquoi la somme de ces n équations (34) se confond avec l'équation exprimant que $V_{m_1,\ldots,m_n}$ est une fonction hypersphérique de degré μ.

LXXIII. — Réduction des équations de Didon aux équations de la fonction hypergéométrique F_A.

Le système des n équations de Didon, vérifiées par le polynome $V_{m_1,\ldots,m_n}$,

$$(33)\quad \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial x_j^2} - x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k\frac{\partial V}{\partial x_k}\right) + (\mu - n)V\right] + m_j\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k\frac{\partial V}{\partial x_k}\right) - (\mu + n)V\right] = 0, \right.$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

se ramène aisément à l'un des systèmes vérifiés par les fonctions hypergéométriques de n variables (XXXIX). Remarquons, en effet, que les équations de la fonction

$$F_A(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \xi_1, \ldots, \xi_n) :$$

$$F_A \left\{ \xi_j(1 - \xi_j)\frac{\partial^2 F}{\partial \xi_j^2} - \xi_j\left(\sum_{k \neq j} \xi_k \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_j\,\partial \xi_k}\right) - [\gamma_j - (\alpha + \beta_j + 1)\xi_j]\frac{\partial F}{\partial \xi_j} - \beta_j\left(\sum_{k \neq j} \xi_k \frac{\partial F}{\partial \xi_k}\right) - \alpha\beta_j F = 0 \right.$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n),$$

peuvent aussi s'écrire

$$(38)\quad \left\{ \xi_j\frac{\partial^2 F}{\partial \xi_j^2} + \gamma_j\frac{\partial F}{\partial \xi_j} - \xi_j\frac{\partial}{\partial \xi_j}\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n} \xi_k\frac{\partial F}{\partial \xi_k}\right) + \alpha F\right] - \beta_j\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n} \xi_k\frac{\partial F}{\partial \xi_k}\right) + \alpha F\right] = 0 \right.$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n).$$

Si dans ces équations on pose

$$(39)\quad \left\{ \begin{array}{llllll} & & \xi_1 = x_1^2, & \ldots, & \xi_n = x_n^2; & \\ \alpha = \dfrac{\mu + n}{2}, & \beta_1 = \dfrac{m_1}{2}, & \ldots, & \beta_n = \dfrac{m_n}{2}, & \gamma_1 = \dfrac{1}{2}, & \ldots, \quad \gamma_n = \dfrac{1}{2}, \end{array} \right.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

en s'appuyant sur les relations

$$\xi_j \frac{\partial F}{\partial \xi_j} = \frac{1}{2} x_j \frac{\partial F}{\partial x_j}, \qquad \xi_j \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_j^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \xi_j} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2},$$

on voit immédiatement que les équations (38) deviennent identiques aux équations (33).

Le système des n équations de Didon se confond donc avec le système des n équations de la fonction hypergéométrique

$$F_A\left(\frac{\mu+n}{2}, -\frac{m_1}{2}, \ldots, -\frac{m_n}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, x_1^2, \ldots, x_n^2\right).$$

Cette remarque permet d'abord d'écrire l'*intégrale générale* du système de Didon, contenant 2^n constantes arbitraires, en partant de l'intégrale générale du système (F_A), donnée par M. Lauricella (XXXIX) :

$$\begin{aligned}
F = {} & A F_A(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \xi_1, \ldots, \xi_n) \\
& - A_1^{(1)} \xi_1^{1-\gamma_1} F_A(\alpha+1-\gamma_1, \beta_1+1-\gamma_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, 2-\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \xi_1, \ldots, \xi_n) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + A_{1,2}^{(2)} \xi_1^{1-\gamma_1} \xi_2^{1-\gamma_2} F_A(\alpha+2-\gamma_1-\gamma_2, \beta_1+1-\gamma_1, \beta_2+1-\gamma_2, \beta_3, \ldots, \beta_n, 2-\gamma_1, 2-\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_n, \xi_1, \ldots, \xi_n) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + A^{(n)} \xi_1^{1-\gamma_1} \ldots \xi_n^{1-\gamma_n} F_A(\alpha+n-\gamma_1-\ldots-\gamma_n, \beta_1+1-\gamma_1, \ldots, \beta_n+1-\gamma_n, 2-\gamma_1, \ldots, 2-\gamma_n, \xi_1, \ldots, \xi_n).
\end{aligned}$$

En remplaçant dans cette formule les α, β, γ *par leurs valeurs* (39) *on obtient l'intégrale générale du système de Didon.*

Cette remarque conduit ensuite aux expressions des polynomes $V_{m_1, \ldots, m_n}$ par des fonctions F_A qui dépendent de la parité des indices $m_1, \ldots, m_n$.

En effet, selon que m_k est pair ou impair, l'un des deux nombres

$$\beta_k = \frac{m_k}{2} \qquad \text{ou} \qquad \beta_k + 1 - \gamma_k = \frac{1-m_k}{2}$$

est un entier négatif; donc quelle que soit la parité des indices $m_1, \ldots, m_n$, il y a toujours dans l'intégrale générale du système de Didon, une et une seule des 2^n fonctions F_A dont tous les coefficients β sont des entiers négatifs et qui, par conséquent, se réduit à un polynome; le polynome $V_{m_1, \ldots, m_n}$, intégrale particulière de ce système, est nécessairement égal à cette fonction F_A multipliée par une constante.

Supposons tous les indices $m_1, \ldots, m_n$ pairs

$$V_{m_1, \ldots, m_n} = A F_A\left(\frac{\mu+n}{2}, -\frac{m_1}{2}, \ldots, -\frac{m_n}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, x_1^2, \ldots, x_n^2\right).$$

La constante A a pour valeur

$$A = (-1)^{\frac{\mu}{2}} \frac{\left(\frac{n}{2}, \frac{\mu}{2}\right)}{\left(1, \frac{m_1}{2}\right) \ldots \left(1, \frac{m_n}{2}\right)},$$

car si l'on fait $x_1 = \ldots = x_n = 0$, on a

$$V_{m_1, \ldots, m_n}(0, \ldots, 0) = A,$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

et la valeur de $V_{m_1,\ldots,m_n}(0,\ldots,0)$ ($m_1,\ldots,m_n$ pairs) s'obtient immédiatement en développant la fonction génératrice

$$(1+a_1^2+\ldots+a_n^2)^{-\frac{n}{2}}.$$

Supposons le seul indice m_1 impair :

$$V_{m_1,\ldots,m_n}=A_1^{1}x_1F_A\left(\frac{\mu+n+1}{2},\frac{1-m_1}{2},\ldots,-\frac{m_n}{2},\frac{3}{2},\ldots,\frac{1}{2},x_1^2,\ldots,x_n^2\right)$$

et $(n-1)$ autres formules analogues en supposant les seuls indices $m_2,\ldots,m_n$ impairs.

Supposons les seuls indices m_1 et m_2 impairs :

$$V_{m_1,\ldots,m_n}=A_{1,2}^{2}x_1x_2F_A\left(\frac{\mu+n}{2}+1,\frac{1-m_1}{2},\frac{1-m_2}{2},\ldots,-\frac{m_n}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2},\ldots,\frac{1}{2},x_1^2,\ldots,x_n^2\right)$$

et ainsi de suite.

L'ensemble de ces 2^n formules, correspondant à toutes les combinaisons possibles pour la parité des indices $m_1,\ldots,m_n$, est dû à M. Lauricella; elles généralisent les expressions classiques [1] des polynomes de Legendre :

$$V_m(x)=(-1)^{\frac{m}{2}}\frac{1.3\ldots(m-1)}{2.4\ldots m}F\left(\frac{m+1}{2},-\frac{m}{2},\frac{1}{2},x^2\right)\qquad(m\text{ pair}),$$

$$V_m(x)=(-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{3.5\ldots m}{2.4\ldots(m-1)}xF\left(\frac{m}{2}+1,\frac{1-m}{2},\frac{3}{2},x^2\right)\qquad(m\text{ impair}).$$

LXXIV. — Propriétés d'orthogonalité du système des polynomes $V_{m_1,\ldots,m_n}$.

Les polynomes $V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n)$ sont des fonctions hypersphériques zonales; or les fonctions hypersphériques Y_μ forment un système de fonctions orthogonales, d'après la formule (20-LXI)

$$\int_S^{n+1}Y_\mu Y_{\mu'}\,d\omega=0\qquad(\mu\neq\mu').$$

L'élément d'aire $d\omega$ de l'hypersphère S ayant pour valeur $d\varphi\,dx_1\ldots dx_n$, lorsque les fonctions hypersphériques sont zonales, puisqu'elles ne dépendent pas de φ, l'intégration par rapport à φ donne un facteur constant 2π; en se débarrassant de ce facteur 2π, on peut donc écrire dans ce cas

$$\int_{(X_n\geq 0)}^{n}Y_\mu^{(0)}(x_1,\ldots,x_n)Y_{\mu'}^{(0)}(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n=0.$$

Cette propriété générale des fonctions zonales appliquée à deux polynomes V de degrés différents conduit à la formule fondamentale

$$(40)\qquad \int_{(X_n\geq 0)}^{n}V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n)V_{m'_1,\ldots,m'_n}(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n=0$$
$$(m_1+\ldots+m_n\neq m'_1+\ldots+m'_n),$$

[1] *Encycl. Sc. math.* (édition française), t. II, vol. 5, fasc. 2, p. 158.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

résultat démontré par Hermite [1] pour le cas de $n = 2$ et étendu par Didon au cas général, mais par une méthode très différente qui consiste à évaluer une intégrale définie où figure sous le signe d'intégration le produit des deux fonctions génératrices

$$(1 - 2a_1x_1 - \ldots - 2a_nx_n + a_1^2 + \ldots + a_n^2)^{-\frac{n}{2}}$$

et

$$(1 - 2b_1x_1 - \ldots - 2b_nx_n + b_1^2 + \ldots + b_n^2)^{-\frac{n}{2}}.$$

Ces calculs étant assez pénibles, la simplification apportée à cette démonstration par l'introduction de la théorie des fonctions harmoniques est l'une des plus nettement visibles.

On peut évaluer de même l'intégrale (40) lorsque les polynomes V sont de même degré, en se basant toujours sur les théorèmes généraux des fonctions harmoniques.

Dans ce but, nous partirons de la formule (18-LX) qui donne la valeur d'une fonction harmonique en un point M intérieur à l'hypersphère S en fonction de sa valeur sur S :

$$\frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} F(M) = \sum_{\mu=0}^{\mu=+\infty} (2\mu + n) a^{\mu} \int_S^{n+1} F(P) V_{\mu}^{n}(\cos\gamma)\, d\omega.$$

Supposons que le point M soit tel que

$$a_{n+1} = a_{n+2} = 0$$

(de telle sorte que $a^2 = a_1^2 + \ldots + a_n^2$ et $a\cos\gamma = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$) et que les valeurs de la fonction F sur S ne dépendent pas de φ

$$F(P) = \Phi(x_1, \ldots, x_n).$$

Grâce à ces deux hypothèses, la fonction sous le signe intégral ne dépendant pas de φ, on peut intégrer par rapport à φ : ce qui donne en divisant par le facteur 2π

$$(41) \quad \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} F(a_1, \ldots, a_n, 0, 0)$$
$$= \sum_{\mu=0}^{\mu=+\infty} (2\mu + n)(a_1^2 + \ldots + a_n^2)^{\frac{\mu}{2}} \int_{(X_n \geq 0)}^{n} \Phi(x_1, \ldots, x_n) V_{\mu}^{n}\left[\frac{a_1x_1 + \ldots + a_nx_n}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}\right] dx_1 \ldots dx_n;$$

d'où, en utilisant l'expression (25) du groupe homogène des polynomes $V_{m_1, \ldots, m_n}$ de degré μ,

$$(42) \quad \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} F(a_1, \ldots, a_n, 0, 0)$$
$$= \sum_{0}^{+\infty} (2\mu + n) a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n} \int_{(X_n \geq 0)}^{n} \Phi(x_1, \ldots, x_n) V_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

---

[1] HERMITE, *Œuvres*, t. II, *Sur deux intégrales doubles*, p. 313.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Ce résultat [1] *est une conséquence immédiate de la solution du problème de Dirichlet pour l'hypersphère; nous le retrouverons dans l'étude du développement d'une fonction donnée en série de polynomes hypersphériques, où il jouera un rôle important:* pour le moment nous nous contenterons d'en déduire la valeur de l'intégrale que nous cherchons.

Nous pouvons notamment appliquer la formule (42) au polynome, harmonique à l'intérieur de S,

$$\mathfrak{V}_{m'_1,\ldots,m'_n}(z_1,\ldots,z_n,z_{n+1},z_{n+2}) = r^{\mu'} V_{m'_1,\ldots,m'_n}(x_1,\ldots,x_n).$$

Or, pour

$$z_1 = a_1, \quad \ldots, \quad z_n = a_n, \quad z_{n+1} = 0, \quad z_{n+2} = 0,$$
$$r = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2},$$

on a

$$x_1 = \frac{z_1}{r} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{z_n}{r} = \frac{a_n}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}},$$

d'où

$$\mathfrak{V}_{m'_1,\ldots,m'_n}(a_1,\ldots,a_n,0,0) = (a_1^2+\ldots+a_n^2)^{\frac{\mu'}{2}} V_{m'_1,\ldots,m'_n}\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}},\ldots,\frac{a_n}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}}\right).$$

La formule (42) conduit donc au résultat suivant :

$$\sum_{0}^{+\infty}(2\mu+n)a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}\int_{(\Sigma x_n^2\leq 1)}^{n} V_{m'_1,\ldots,m'_n}V_{m_1,\ldots,m_n}\,dx_1\ldots dx_n$$
$$= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(a_1^2+\ldots+a_n^2)^{\frac{\mu'}{2}} V_{m'_1,\ldots,m'_n}\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}},\ldots,\frac{a_n}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}}\right).$$

Or, si l'on se reporte à l'expression développée (23) du polynome V, on voit que

$$(a_1^2+\ldots+a_n^2)^{\frac{\mu'}{2}} V_{m'_1,\ldots,m'_n}\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}},\ldots,\frac{a_n}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}}\right)$$

a pour valeur

$$2^{\mu'}\frac{\left(\frac{n}{2},\mu'\right)}{(1,m'_1)\ldots(1,m'_n)}\sum\frac{1}{2^{2j}}\frac{(-m'_1,2j_1)\ldots(-m'_n,2j_n)}{(1,j_1)\ldots(1,j_n)\left(-\frac{n}{2}-\mu'+1,j\right)}a_1^{m'_1-2j_1}\ldots a_n^{m'_n-2j_n}(a_1^2+\ldots+a_n^2)^j.$$

C'est une expression homogène de degré μ' en $a_1,\ldots,a_n$ ne contenant que des termes de même parité que $a_1^{m'_1}\ldots a_n^{m'_n}$

$$(a_1^2+\ldots+a_n^2)^{\frac{\mu'}{2}} V_{m'_1,\ldots,m'_n}\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}},\ldots,\frac{a_n}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}}\right) = \sum_{l_1+\ldots+l_n=0} K^{m'_1,\ldots,m'_n}_{l_1,\ldots,l_n} a_1^{m'_1+2l_1}\ldots a_n^{m'_n+2l_n}.$$

---

[1] J. Kampé de Fériet, *Thèse*, p. 41.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

La formule (42) donne donc finalement

$$\sum_{0}^{+\infty}(2\mu+n)a_1^{m_1}\dots a_n^{m_n}\int_{(X_n=0)}^{n}V_{m'_1,\dots,m'_n}V_{m_1,\dots,m_n}\,dx_1\dots dx_n$$
$$=\frac{2\pi^2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\sum_{i_1+\dots+i_n=0}^{n}K_{i_1,\dots,i_n}^{m'_1,\dots,m'_n}a_1^{m_1+2i_1}\dots a_n^{m'_n+2i_n}.$$

En identifiant, dans les deux membres de cette relation, les coefficients de $a_1^{m_1}\dots a_n^{m_n}$, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

L'intégrale

$$\int_{(X_n\geq 0)}^{n}V_{m_1,\dots,m_n}V_{m'_1,\dots,m'_n}\,dx_1\dots dx_n$$

est nulle, non seulement lorsque les degrés des polynomes sont différents, mais encore lorsque, les polynomes étant de même degré, $m_1+\dots+m_n=m'_1+\dots+m'_n$, *toutes les différences*

$$m_1-m'_1,\quad\dots,\quad m_n-m'_n$$

ne sont pas des nombres pairs.

Dans le cas contraire, on a

$$(43)\qquad \int_{(X_n=0)}^{n}V_{m_1,\dots,m_n}V_{m_1+2i_1,\dots,m_n+2i_n}\,dx_1\dots dx_n=\frac{2\pi^2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{K_{i_1,\dots,i_n}^{m_1,\dots,m_n}}{2\mu+n}\qquad(i_1+\dots+i_n=0)$$

LXXV. — Définition des polynomes $V^{s}_{m_1,\dots,m_n}(x_1,\dots,x_n)$.

On aperçoit aisément sur l'expression générale (22) de $V_{m_1,\dots,m_n}(x_1,\dots,x_n)$ que, si l'un des indices m_k est nul, ce polynome ne contient pas la variable correspondante x_k.

Par conséquent si, parmi les polynomes à $n+s-1$ variables (s désignant un entier positif)

$$V_{m_1,\dots,m_{n+s-1}}(x_1,\dots,x_{n+s-1}),$$

nous considérons seulement ceux dont les $(s-1)$ derniers indices sont nuls, puisqu'ils ne dépendent pas de $x_{n+1},\dots,x_{n+s-1}$, ce sont des fonctions de $x_1,\dots,x_n$ seulement; nous poserons

$$(44)\qquad V_{m_1,\dots,m_n,0,\dots,0}(x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\dots,x_{n+s-1})=V^{s}_{m_1,\dots,m_n}(x_1,\dots,x_n).$$

Cette formule n'introduit d'ailleurs aucune fonction nouvelle, puisque les polynomes $V^{(s)}_{m_1,\dots,m_n}$ *sont simplement extraits de la suite des polynomes* $V_{m_1,\dots,m_{n+s-1}}$, *auxquels s'appliquent tous les résultats de ce Chapitre, à condition d'écrire partout* $n+s-1$ *au lieu de* n.

En particulier, pour $s=1$,

$$V^{1}_{m_1,\dots,m_n}(x_1,\dots,x_n)=V_{m_1,\dots,m_n}(x_1,\dots,x_n).$$

L'introduction d'une notation spéciale $V^{(s)}_{m_1,\dots,m_n}$, pour représenter ces polynomes, se

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

justifie par le fait qu'ils jouent par rapport aux fonctions hypersphériques tessérales le même rôle que les $V_{m_1, \ldots, m_n}$ par rapport aux fonctions zonales. En effet, de même que l'on a

$$Y_\mu^{(0)}(x_1, \ldots, x_n) = V_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n),$$

nous démontrerons plus loin que l'on obtient une fonction hypersphérique d'ordre k, en écrivant

$$Y_\mu^{(k)}(x_1, \ldots, x_n, \varphi) = \overset{k}{X}{}_n^2 V^{2k+1}_{h_1, \ldots, h_n}(x_1, \ldots, x_n) e^{\pm k i \varphi} \qquad (h_1 + \ldots + h_n = \mu - k).$$

nous pouvons envisager les polynomes $V^{s}_{m_1, \ldots, m_n}$ de la manière suivante. Considérons l'espace $E_{n+2}(z_1, \ldots, z_{n+2})$, où nous avons opéré jusqu'à présent, comme une multiplicité linéaire à $n+2$ dimensions, noyée au sein d'un espace $E_{n+s+1}(z_1, \ldots, z_{n+s+1})$, cette multiplicité ayant pour équations

$$z_{n+3} = 0, \qquad \ldots \qquad z_{n+s+1} = 0.$$

Formons les polynomes harmoniques homogènes dans E_{n+s+1}

$$\Psi_{m_1, \ldots, m_n, \ldots, \ldots};$$

la valeur prise par ce polynome sur la multiplicité E_{n+2} sera zéro si un seul des indices

$$m_{n+1}, \quad \ldots, \quad m_{n+s-1}$$

est différent de zéro; dans le cas contraire, on aura

$$\Psi_{m_1, \ldots, m_n, 0, \ldots, 0} = r^\mu V^{s}_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n).$$

Les polynomes $V^{s}_{m_1, \ldots, m_n}$ *apparaissent ainsi comme la valeur prise sur l'hypersphère* S_{n+1}

$$z_1^2 + \ldots + z_{n+2}^2 = 1$$

(*considérée comme l'intersection de l'hypersphère* S_{n+s}, $z_1^2 + \ldots + z_{n+s+1}^2 = 1$ *et de la multiplicité linéaire* E_{n+2}: $z_{n+3} = \ldots = z_{n+s+1} = 0$), *par les polynomes harmoniques homogènes de degré* μ *de l'espace* E_{n+s+1}.

Appliquons cette remarque à quelques cas particuliers; d'après la formule de définition (44), on obtient la fonction génératrice des $V^{(s)}$ en remplaçant dans celle des V, n par $n + s - 1$ et en faisant

$$a_{n+1} = \ldots = a_{n+s-1} = 0:$$

$$(45) \qquad [1 - 2a_1x_1 - \ldots - 2a_nx_n + a_1^2 + \ldots + a_n^2]^{-\frac{n+s-1}{2}} = \Sigma a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n} V^{s}_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n).$$

Notamment pour $n = 1$, *nous retrouvons la fonction génératrice déjà plusieurs fois rencontrée*

$$(1 - 2a_1x_1 + a_1^2)^{-\frac{s}{2}} = \Sigma a_1^{m_1} V^{s}_{m_1}(x_1);$$

(11-LIX)

ces polynomes sont donc un simple cas particulier des polynomes V *à* s *variables :*

$$V^{s}_{m_1}(x_1) = V_{m_1, 0, \ldots, 0}(x_1, \ldots, x_s);$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

désignés par Heine sous le nom de fonctions sphériques d'ordre supérieur, ils peuvent s'interpréter (1) *ainsi comme la valeur prise sur la sphère* S_2 (considérée comme noyée dans l'espace E_{s+2})

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1, \qquad z_4 = 0, \qquad \ldots, \qquad z_{s+2} = 0$$

par les polynomes harmoniques homogènes de degré μ *de l'espace à* $s + 2$ *dimensions.*

Cette interprétation ne subsiste d'ailleurs que si (comme nous le supposons explicitement) s est un entier positif; l'étude [faite notamment par L. Gegenbauer (2)] des $V_m^{(s)}(x)$, quand s est un nombre quelconque, ne peut plus s'appuyer sur la théorie des fonctions harmoniques.

Pour le cas de deux variables ($n = 2$), Hermite (3) lui-même a introduit, outre la fonction génératrice déjà considérée

$$(1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-1},$$

des polynomes $\mathcal{V}_{m,n}(x, y)$ définis par le développement

$$(1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-\frac{3}{2}} = \Sigma\, a^m b^n \mathcal{V}_{m,n}(x, y);$$

ils rentrent dans la formule générale (15) en y faisant

$$s = 2.$$

Ces polynomes $\mathcal{V}_{m,n}$, peuvent par conséquent s'interpréter comme la valeur prise sur l'hypersphère S_3 (noyée dans l'espace E_5)

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 1, \qquad z_5 = 0$$

par les polynomes harmoniques homogènes de l'espace à 5 dimensions.

Cette interprétation des polynomes $\mathcal{V}_{m,n}$ est due, comme celle des polynomes $V_{m,n}$, à P. Appell (4).

D'une manière générale, dans le cas de deux variables, on peut considérer les polynomes définis par le développement

$$(1 - 2a_1x_1 - 2a_2x_2 + a_1^2 + a_2^2)^{-\frac{s+1}{2}} = \Sigma\, a_1^{m_1} a_2^{m_2} V_{m_1,m_2}^{s}(x_1, x_2),$$

comme la valeur prise sur l'hypersphère S_3 (noyée dans l'espace E_{s+3})

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 1; \qquad z_5 = 0, \qquad \ldots, \qquad z_{s+3} = 0;$$

par les polynomes harmoniques homogènes de l'espace à $(s + 3)$ dimensions.

En ce qui concerne les polynomes généraux $V_{m_1, m_2, \ldots}^{(s)}$, remarquons que, comme dans le cas d'une variable, le développement (15) peut encore servir à les définir, même si s n'est pas un entier; mais dans ce dernier cas toute liaison avec la théorie des polynomes harmoniques

(1) Heine, *Handbuch der Kugelfunktionen* (2e édition), t. I, p. 299-451 et suiv.

(2) L. Gegenbauer, pour la Bibl. voir *Encycl. Sc. math.* (édition française), t. II, vol. 5, fasc. 2, p. 194.

(3) Hermite, *Œuvres*, t. II, p. 335.

(4) P. Appell, *Les polynomes* $V_{m,n}$ *d'Hermite et leurs analogues rattachés aux fonctions sphériques dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions* (*C. R. Acad. des Sc.*, t. 156, 1913, p. 1423 et 1582).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

disparaît. Nous conserverons toujours explicitement l'hypothèse que s est un entier positif; l'étude des polynomes $V^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$, lorsque le nombre s est quelconque, a été faite par M. Angelescu dans sa Thèse [1], à laquelle nous nous contenterons de renvoyer, puisque tout lien avec la théorie des fonctions hypersphériques en a disparu; les polynomes étudiés en détail par M. Angelescu jouent par rapport à ceux que nous considérons, le même rôle que les polynomes généraux de Gegenbauer par rapport aux fonctions sphériques d'ordre supérieur.

LXXVI. — Propriétés des polynomes $V^{s}_{m_1,m_n,\ldots}(x_1,\ldots,x_n)$.

Les polynomes $V^{s}_{m_1,\ldots,m_n,\ldots}$ se déduisant des polynomes $V_{m_1,\ldots,m_n}$ en remplaçant l'entier n par $n+s-1$ et en supposant

$$m_{n+1}=\ldots=m_{n+s-1}=0,$$

nous n'aurons pas besoin pour énoncer leurs propriétés de démonstrations nouvelles; il nous suffira de transformer les diverses formules établies au cours de ce Chapitre pour les polynomes $V_{m_1,\ldots,m_n}$.

Nous formerons ainsi aisément le tableau des formules qui nous seront utiles dans la suite de cette étude

1° *Fonction harmonique génératrice des fonctions* $W^{s}_{m_1,\ldots,m_n}(z_1,\ldots,z_{n+s-1})$:

$$(46)\qquad [(z_1-a_1)^2+\ldots+(z_n-a_n)^2+z_{n+1}^2+\ldots+z_{n+s-1}^2]^{-\frac{n+s-1}{2}}=\Sigma\, a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}\, W^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$$

ou

$$(47)\qquad W^{s}_{m_1,\ldots,m_n}(z_1,\ldots,z_{n+s+1})=\frac{(-1)^{\mu}}{(1,m_1)\ldots(1,m_n)}\frac{\partial^{\mu}}{\partial z_1^{m_1}\ldots\partial z_n^{m_n}}\left(\frac{1}{r^{n+s-1}}\right)$$

avec

$$r^2=z_1^2+\ldots+z_{n+s+1}^2.$$

2° *Fonction génératrice des polynomes* $V^{s}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n)$:

$$(48)\qquad (1-2a_1x_1-\ldots-2a_nx_n+a_1^2+\ldots+a_n^2)^{-\frac{n+s-1}{2}}=\Sigma\, a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}\, V^{s}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n)$$

ou

$$(49)\qquad W^{s}_{m_1,\ldots,m_n}(z_1,\ldots,z_{n+s+1})=\frac{1}{r^{\mu+n+s-1}}V^{s}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n).$$

3° *Expression générale des polynomes* $V^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$:

$$(50)\qquad V^{s}_{m_1,\ldots,m_n}=2^{\mu}\frac{\left(\frac{n+s-1}{2},\mu\right)}{(1,m_1)\ldots(1,m_n)}\left[x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}-\ldots+\frac{1}{2^{2j}}\frac{\Delta^{2j}(x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n})}{(1,j)\left(-\frac{n+s-3}{2}-\mu,j\right)}+\ldots\right].$$

---

[1] A. Angelescu, *Sur des polynomes généralisant les polynomes de Legendre et d'Hermite et sur le calcul approché des intégrales multiples* (*Thèse*, n° 1579. Paris, 1916).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

4° *Expression du polynome* $V^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$ *par des fonctions hypergéométriques* F_B :

$$(51)\quad V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n} = 2^{\mu}\frac{\left(\frac{n+s-1}{2},\mu\right)}{(1,m_1)\ldots(1,m_n)}x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}$$
$$\times F_B\left[-\frac{m_1}{2},\ldots,-\frac{m_n}{2},\frac{1-m_1}{2},\ldots,\frac{1-m_n}{2},-\mu-\frac{n+s-3}{2},\frac{1}{x_1^2},\ldots,\frac{1}{x_n^2}\right].$$

5° *Expression du groupe homogène des polynomes* $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ *d'un degré* μ *donné* :

$$(52)\quad \sum_{m_1+\ldots+m_n=\mu} a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}V^{s}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n) = (a_1^2+\ldots+a_n^2)^{\frac{\mu}{2}}V_{\mu}^{(n+s-1)}\left[\frac{a_1x_1+\ldots+a_nx_n}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}}\right],$$

le groupe homogène s'exprime aussi par une fonction hypergéométrique de Gauss :

$$(52\ bis)\quad \sum_{m_1+\ldots+m_n=\mu} a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$$
$$= 2^{\mu}\frac{\left(\frac{n+s-1}{2},\mu\right)}{(1,\mu)}(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)^{\mu}$$
$$\times F\left[-\frac{\mu}{2},\frac{1-\mu}{2},-\mu-\frac{n+s-3}{2},\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)^2}\right].$$

6° *Système de n équations aux dérivées partielles vérifiées par les polynomes* $V^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$:

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{\partial^2 V}{\partial x_j^2} - x_j\left(\sum_{k=1}^{k=n}x_k\frac{\partial^2 V}{\partial x_j\,\partial x_k}\right) - (\mu+n+s)x_j\frac{\partial V}{\partial x_j} + m_j\left(\sum_{k=1}^{k=n}x_k\frac{\partial V}{\partial x_k}\right) + m_j(\mu+n+s-1)V = 0\\ &(j=1,2,\ldots,n).\end{aligned}\right.$$

ou

$$(1-x_j^2)\frac{\partial^2 V}{\partial x_j^2} - x_j\left(\sum_{k\neq j}x_k\frac{\partial^2 V}{\partial x_j\,\partial x_k}\right)$$
$$-[(\mu+n+s)-m_j]x_j\frac{\partial V}{\partial x_j} + m_j\left(\sum_{k\neq j}x_k\frac{\partial V}{\partial x_k}\right) + m_j(\mu+n+s-1)V = 0,$$

ou, sous une forme plus condensée,

$$(53\ bis)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial V}{\partial x_j}\right) - x_j\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n}x_k\frac{\partial V}{\partial x_k}\right) + (\mu+n+s-1)V\right] + (m_j+1)\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n}x_k\frac{\partial V}{\partial x_k}\right) + (\mu+n+s-1)V\right] = 0\\ &(j=1,2,\ldots,n).\end{aligned}\right.$$

Équation obtenue en faisant la somme des n équations (53 *bis*) (commune à tous les polynomes V^{s} de même degré μ) :

$$(54)\quad (\mu+n)(\mu+s-1)V - \sum_{j=1}^{j=n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial V}{\partial x_j} - x_j\left[x_1\frac{\partial V}{\partial x_1}+\ldots+x_n\frac{\partial V}{\partial x_n}+(s-1)V\right]\right) = 0.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

7° *Propriétés d'orthogonalité du système des polynomes* $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$:

Lemme. — Soit $F(z_1,\ldots,z_{n+s+1})$ la fonction harmonique à l'intérieur de l'hypersphère S : $r^2 = 1$, et se réduisant sur S à une fonction donnée $\Phi(x_1,\ldots,x_n)$; on a

$$(55)\qquad 2\pi^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+s-1}{2}\right)}F(a_1,\ldots,a_n,0,\ldots,0)$$
$$= \Sigma(2\mu+n+s-1)a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}\int_{(X_n\geq 0)}^{n} X_n^{\frac{s-1}{2}}\Phi(x_1,\ldots,x_n)V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}dx_1\ldots dx_n.$$

Cette formule se déduit de la formule (42) en remarquant que dans l'intégrale

$$\int_{(X_{n+s-1}\geq 0)}^{n+s-1}\Phi(x_1,\ldots,x_n)V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_{n+s-1},$$

la fonction sous le signe somme ne dépendant pas des variables $x_{n+1},\ldots,x_{n+s-1}$, on peut intégrer par rapport à ces variables; on trouve facilement

$$\int_{(X_{n+s-1}\geq 0)}^{s-1} dx_{n+1}\ldots dx_{n+s-1} = X_n^{\frac{s-1}{2}}\frac{\pi^{\frac{s-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}.$$

Conséquences. — En appliquant le lemme au polynome harmonique

$$F(z_1,\ldots,z_{n+s+1}) = r^{\mu}V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n),$$

on obtient le résultat suivant :

L'intégrale

$$(56)\qquad \int_{(X_n\geq 0)}^{n} X_n^{\frac{s-1}{2}}V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}V^{(s)}_{m'_1,\ldots,m'_n}dx_1\ldots dx_n,$$

est nulle : 1° lorsque les degrés des deux polynomes sont différents; 2° lorsque ces degrés étant égaux, toutes les différences $m_1 - m'_1,\ldots,m_n - m'_n$ *ne sont pas des nombres pairs.*

8° *Expression des dérivées partielles du polynome* $V_{m_1,\ldots,m_n}$ *au moyen des polynomes* $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$:

Calculons la dérivée $k^{\text{ième}}$ de la fonction génératrice des polynomes $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ prise k_1 fois par rapport à $x_1,\ldots,k_n$ fois par rapport à x_n $(k_1+\ldots+k_n = k)$.

On a évidemment

$$\frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\left[(1-2a_1x_1-\ldots-2a_nx_n+a_1^2+\ldots+a_n^2)^{-\frac{n}{2}}\right]$$
$$= 2^k\binom{\frac{n}{2}, k}{}a_1^{k_1}\ldots a_n^{k_n}(1-2a_1x_1-\ldots-2a_nx_n+a_1^2+\ldots+a_n^2)^{-\left(\frac{n}{2}+k\right)}.$$

D'où, en développant les deux membres selon les puissances de $a_1,\ldots,a_n$ et en identifiant les coefficients de $a^{m_1}\ldots a^{m_n}$,

$$(57)\qquad \frac{\partial^k V_{m_1,\ldots,m_n}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}} = 2^k\binom{\frac{n}{2}, k}{}V^{(2k+1)}_{m_1-k_1,\ldots,m_n-k_n}\qquad (k_1\leq m_1,\ldots,k_n\leq m_n).$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Cette formule généralise la propriété connue des dérivées du polynome de Legendre, qui s'expriment au moyen des fonctions sphériques d'ordre supérieur

$$\frac{d^k}{dx^k} V_m(x) = 2^k \binom{1}{2}, k \Big) V_{m-k}^{(2k+1)}(x).$$

9° *Expression des dérivées partielles du polynome* $V_{m_1, \ldots, m_n}^{(s)}$:

La formule (57) s'étend aux dérivées partielles du polynome $V_{m_1, \ldots, m_n}^{(s)}$, il suffit pour cela de dériver la fonction génératrice (48) par rapport à $a_1, \ldots, a_n$:

$$\frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \left[(1 - 2a_1x_1 - \ldots - 2a_nx_n + a_1^2 + \ldots + a_n^2)^{-\frac{n+s-1}{2}} \right]$$
$$= 2^k \binom{n+s-1}{2}, k \Big) a_1^{k_1} \ldots a_n^{k_n} (1 - 2a_1x_1 - \ldots - 2a_nx_n + a_1^2 + \ldots + a_n^2)^{-\frac{n+s-1}{2} - k}.$$

En développant et identifiant, on obtient la relation générale

$$(58) \qquad \frac{\partial^k V_{m_1, \ldots, m_n}^{(s)}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} = 2^k \binom{n+s-1}{2}, k \Big) V_{m_1-k_1, \ldots, m_n-k_n}^{(2k+s)} \qquad (k_1 \leq m_1, \ldots, k_n \leq m_n).$$

10° *Développement du polynome* $V_{m_1, \ldots, m_n}^{(s)}$, *selon les puissances ascendantes de* $x_1, \ldots, x_n$:

La formule de Mac-Laurin appliquée au polynome $V_{m_1, \ldots, m_n}^{(s)}$ donne, grâce à (58),

$$V_{m_1, \ldots, m_n}^{(s)}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1=0, \ldots, k_n=0}^{k_1=m_1, \ldots, k_n=m_n} 2^k \frac{\binom{n+s-1}{2}, k \Big)}{(1, k_1) \ldots (1, k_n)} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} V_{m_1-k_1, \ldots, m_n-k_n}^{(2k+s)}(0, \ldots, 0).$$

Si un seul des indices $m_1 - k_1, \ldots, m_n - k_n$ est impair le polynome $V_{m_1-k, \ldots, m_n-k_n}^{2k+s}$ est nul; si tous les indices sont pairs, sa valeur s'obtient en partant de la formule

$$V_{2p_1, \ldots, 2p_n}^{s}(0, \ldots, 0) = (-1)^p \frac{\binom{n+s-1}{2}, p \Big)}{(1, p_1) \ldots (1, p_n)} \qquad (p = p_1 + \ldots + p_n).$$

11° *Expression du polynome* $V_{m_1, \ldots, m_n}^{(s)}$ *par une fonction hypergéométrique* F_A :

De même qu'à l'expression générale (50) du polynome $V_{m_1, \ldots, m_n}^{(s)}$ ordonnée selon les puissances décroissantes de $x_1, \ldots, x_n$ correspond la représentation (51) de ce polynome par une fonction F_B ayant pour arguments $\frac{1}{x_1^2}, \ldots, \frac{1}{x_n^2}$, il est possible de faire correspondre à l'expression précédente de ce même polynome ordonnée selon les puissances croissantes de $x_1, \ldots, x_n$ diverses représentations par des fonctions F_A dépendant de la parité des indices $m_1, \ldots, m_n$.

Le point de départ est la remarque suivante :

Le système (53) *des* n *équations aux dérivées partielles vérifiées par le polynome* $V_{m_1, \ldots, m_n}^{(s)}$ *s'identifie avec le système de la fonction hypergéométrique*

$$F_A\left(\frac{2-n+s-1}{2}, -\frac{m_1}{2}, \ldots, -\frac{m_n}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, x_1^2, \ldots, x_n^2\right).$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Or, parmi les 2^n intégrales particulières indépendantes du système de cette fonction F_A, il y en a toujours, quelle que soit la parité de $m_1, \ldots, m_n$, une et une seule qui est un polynome; le polynome $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ est égal à cette intégrale multipliée par une constante. Ceci conduit aux 2^n expressions de ce polynome :

Tous les indices $m_1, \ldots, m_n$ sont pairs :

$$V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n} = (-1)^{\frac{\mu}{2}} \frac{\left(\frac{n+s-1}{2}, \frac{\mu}{2}\right)}{\left(1, \frac{m_1}{2}\right)\cdots\left(1, \frac{m_n}{2}\right)} F_A\left(\frac{\mu-n+s-1}{2}, -\frac{m_1}{2}, \ldots, -\frac{m_n}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, x_1^2, \ldots, x_n^2\right).$$

Tous les indices, sauf m_1, sont pairs :

$$V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n} = (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} 2 \frac{\left(\frac{n+s-1}{2}, \frac{\mu+1}{2}\right)}{\left(1, \frac{m_1-1}{2}\right)\cdots\left(1, \frac{m_n}{2}\right)} x_1$$
$$\times F_A\left(\frac{\mu+n+s}{2}, \frac{1-m_1}{2}, \ldots, -\frac{m_n}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, x_1^2, \ldots, x_n^2\right),$$

.....

Tous les indices $m_1, \ldots, m_n$ sont impairs :

$$V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n} = (-1)^{\frac{\mu-n}{2}} \frac{2^n\left(\frac{n+s-1}{2}, \frac{\mu+n}{2}\right)}{\left(1, \frac{m_1-1}{2}\right)\cdots\left(1, \frac{m_n-1}{2}\right)} x_1 \ldots x_n$$
$$\times F_A\left(\frac{\mu+s-1}{2}+n, \frac{1-m_1}{2}, \ldots, \frac{1-m_n}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{3}{2}, x_1^2, \ldots, x_n^2\right).$$

La constante multiplicative s'obtient aisément dans le cas où tous les indices sont pairs en remarquant que l'on a alors

$$V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}(0, \ldots, 0) = (-1)^{\frac{\mu}{2}} \frac{\left(\frac{n+s-1}{2}, \frac{\mu}{2}\right)}{\left(1, \frac{m_1}{2}\right)\cdots\left(1, \frac{m_n}{2}\right)}.$$

Tous les autres cas se déduisent de celui-là par l'application réitérée de la formule

$$V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n} = \frac{1}{(n+s-3)} \frac{\partial}{\partial x_1} V^{(s-2)}_{m_1+1,\ldots,m_n}$$

qui permet de se ramener toujours au cas où tous les indices sont pairs.

12° *Expression des polynomes* $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ *par des dérivées partielles* :

On peut étendre aux polynomes $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ une propriété établie par Didon pour les polynomes $V_{m_1,\ldots,m_n}$, qui permet de les exprimer par les dérivées partielles d'une même fonction.

Dans la fonction génératrice (48), posons

$$x_1 = \frac{\xi_1}{\sqrt{\Xi_n}}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\xi_n}{\sqrt{\Xi_n}},$$
$$\Xi_n = 1 + \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

et remplaçons $a_1, \ldots, a_n$, respectivement par $\frac{a_1}{\sqrt{\Xi_n}}, \ldots, \frac{a_n}{\sqrt{\Xi_n}}$: nous obtenons

$$\left(1 - \frac{2a_1\xi_1}{\Xi_n} - \ldots - 2\frac{a_n\xi_n}{\Xi_n} + \frac{a_1^2}{\Xi_n} + \ldots + \frac{a_n^2}{\Xi_n}\right)^{-\frac{n+s-1}{2}} = \sum \frac{a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}}{\Xi_n^{\frac{\mu}{2}}} V^{s}_{m_1,\ldots,m_n}\left(\frac{\xi_1}{\sqrt{\Xi_n}}, \ldots, \frac{\xi_n}{\sqrt{\Xi_n}}\right).$$

Or le premier membre peut évidemment s'écrire

$$\Xi_n^{\frac{n+s-1}{2}}\left[1 + (\xi_1 - a_1)^2 + \ldots + (\xi_n - a_n)^2\right]^{-\frac{n+s-1}{2}}.$$

Mais, d'après la formule de Taylor,

$$\left[1 + (\xi_1 - a_1)^2 + \ldots + (\xi_n - a_n)^2\right]^{-\frac{n+s-1}{2}} = \sum (-1)^\mu \frac{a_1^{m_1}}{(1, m_1)} \ldots \frac{a_n^{m_n}}{(1, m_n)} \frac{\partial^\mu}{\partial\xi_1^{m_1}\ldots\partial\xi_n^{m_n}}\left[\Xi_n^{-\frac{n+s-1}{2}}\right].$$

Le simple rapprochement de ces deux développements nous donne

$$(59) \qquad V^{s}_{m_1,\ldots,m_n}\left(\frac{\xi_1}{\sqrt{\Xi_n}}, \ldots, \frac{\xi_n}{\sqrt{\Xi_n}}\right) = (-1)^\mu \frac{\Xi_n^{\frac{\mu+n+s-1}{2}}}{(1, m_1)\ldots(1, m_n)} \frac{\partial^\mu}{\partial\xi_1^{m_1}\ldots\partial\xi_n^{m_n}}\left[\Xi_n^{-\frac{n+s-1}{2}}\right].$$

Cette formule a été donnée par Hermite (1) pour les polynomes $V_{m,n}(x, y)$ $(s = 1, n = 2)$ et par Didon (2) pour les polynomes $V_{m_1,\ldots,m_n}$ $(s = 1$, n quelconque).

130 *Expression des polynomes* $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ *par des intégrales définies :*

L'intégrale q-uple

$$\int^q F(\lambda_1\xi_1 + \ldots + \lambda_q\xi_q)\, d\xi_1 \ldots d\xi_q$$

étendue au domaine $1 - \xi_1^2 - \ldots - \xi_q^2 \geq 0$ se ramène à une intégrale simple : il suffit, pour le montrer, de faire sur les $\xi_1, \ldots, \xi_q$ une substitution orthogonale, la première des nouvelles variables $\xi_1, \ldots, \xi_q$ étant définie par la formule

$$\bar{\xi}_1 = \frac{\lambda_1\xi_1 + \ldots + \lambda_q\xi_q}{\sqrt{\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_q^2}}.$$

La fonction F ne dépendant plus de $\bar{\xi}_2, \ldots \bar{\xi}_q$, on peut intégrer par rapport à ces variables et en s'appuyant sur la formule

$$\int_{\bar{\xi}_2^2 + \ldots + \bar{\xi}_q^2 = 1 - \bar{\xi}_1^2}^{q-1} d\bar{\xi}_2 \ldots d\bar{\xi}_q = \frac{\pi^{\frac{q-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}(1 - \bar{\xi}_1^2)^{\frac{q-1}{2}},$$

on obtient le résultat suivant :

$$(60) \qquad \int^q F(\lambda_1\xi_1 + \ldots + \lambda_q\xi_q)\, d\xi_1 \ldots d\xi_q = \frac{\pi^{\frac{q-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} (1 - \xi^2)^{\frac{q-1}{2}} F(\sqrt{\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_q^2}\,\xi)\, d\xi,$$

(1) Ch. Hermite, *Œuvres*, t. II, p. 343-345.
(2) F. Didon, *Ann. Éc. Normale*, t. V, p. 268.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

ou encore

$$(60\,bis)\quad \int^{q} F(\lambda_1\xi_1 + \ldots + \lambda_q\xi_q)\, d\xi_1 \ldots d\xi_q = \frac{\pi^{\frac{q-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{q-1}{2}\right)} \int_0^{\pi} \sin^q\omega\, F(\sqrt{\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_q^2}\cos\omega)\, d\omega.$$

Ceci étant posé, on établit facilement (1) que

$$(61)\quad \int_0^{\pi} \frac{\sin^q\omega}{(\alpha + i\beta\cos\omega)^{q+1}}\, d\omega = \sqrt{\pi}\, \frac{\Gamma\left(\frac{q-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{2}+1\right)} (\alpha^2 + \beta^2)^{-\frac{q+1}{2}}.$$

En combinant cette formule avec la précédente, nous obtenons donc

$$(62)\quad \int^{q} [\alpha + i(\lambda_1\xi_1 + \ldots + \lambda_q\xi_q)]^{-q+1}\, d\xi_1 \ldots d\xi_q = \frac{\pi^{\frac{q}{2}}}{\Gamma\left(\frac{q}{2}+1\right)} (\alpha^2 + \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_q^2)^{-\frac{q+1}{2}}$$

(l'intégrale étant étendue au domaine $1 - \xi_1^2 - \ldots - \xi_q^2 > 0$).

Appliquons cette formule générale, en choisissant de la manière suivante les constantes qui y figurent.

Soit d'abord

$$q = n + s - 2.$$

Faisons

$$\alpha = \sqrt{X_n}, \qquad \lambda_1 = x_1 - a_1, \quad \ldots, \quad \lambda_n = x_n - a_n, \quad \lambda_{n+1} = 0, \quad \ldots, \quad \lambda_{n+s-2} = 0,$$

d'où

$$\alpha^2 + \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_q^2 = 1 - 2a_1x_1 - \ldots - 2a_nx_n + a_1^2 + \ldots + a_n^2.$$

Le second membre de la formule (62) se confond donc avec la fonction génératrice des polynomes $V^{s}_{m_1, \ldots, m_n}$.

L'intégrale du premier membre ne dépendant pas de $\xi_{n+1}, \ldots, \xi_{n+s-2}$, nous pouvons intégrer

(1) Pour le démontrer, il suffit de remarquer que, par le changement de variable $u = \frac{1 + \cos\omega}{2}$, cette intégrale se ramène à celle-ci

$$2^q(\alpha - i\beta)^{-q+1} \int_0^1 u^{\frac{q-1}{2}}(1-u)^{\frac{q-1}{2}} \left(1 - \frac{2i\beta}{\alpha - i\beta}u\right)^{-q-1} du,$$

qui s'exprime (3-I) par la fonction hypergéométrique

$$(\alpha - i\beta)^{-q-1}\, F\left(\frac{q-1}{2}, q-1, q+1, \frac{-2i\beta}{\alpha - i\beta}\right)$$

qui a pour valeur

$$(\alpha - i\beta)^{-q-1}\left(1 - \frac{2i\beta}{\alpha - i\beta}\right)^{\frac{q+1}{2}} = (\alpha^2 + \beta^2)^{-\frac{q+1}{2}}.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

par rapport à ces variables

$$\int d\xi_{n+1}\ldots d\xi_{n+s-2} = (1-\xi_1^2-\ldots-\xi_n^2)^{\frac{s}{2}-1}\frac{\pi^{\frac{s}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$$

(étendue au domaine $\xi_{n+1}^2+\ldots+\xi_{n+s-2}^2 \leqq 1-\xi_1^2-\ldots-\xi_n^2$).

D'où

$$(63)\qquad \int^n (1-\xi_1^2-\ldots-\xi_n^2)^{\frac{s}{2}-1}\left[\sqrt{X_n^-}+i(\xi_1(x_1-a_1)+\ldots+i\xi_n(x_n-a_n)\right]^{-(n+s-1)} d\xi_1\ldots d\xi_n$$

$$= \pi^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+s}{2}\right)}(1-2a_1x_1-\ldots-2a_nx_n-a_1^2+\ldots+a_n^2)^{-\frac{n+s-1}{2}}.$$

En développant les deux membres selon les puissances de $a_1, \ldots, a_n$, nous obtenons finalement

$$(64)\qquad \pi^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+s}{2}\right)}V^s_{m_1,\ldots,m_n} = \frac{(n+s-1,\mu)}{(1,m_1)\ldots(1,m_n)}i^{\mu}\int^n \frac{\xi_1^{m_1}\ldots\xi_n^{m_n}(1-\xi_1^2-\ldots-\xi_n^2)^{\frac{s}{2}-1}}{\left[\sqrt{X_n^-}+i(\xi_1x_1+\ldots+\xi_nx_n)\right]^{\mu+n+s-1}}d\xi_1\ldots d\xi_n,$$

l'intégrale n-uple étant étendue au domaine $1-\xi_1^2-\ldots-\xi_n^2 \geqq 0$.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

CHAPITRE IV.

LES POLYNOMES $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n)$.

LXXVII. — Nécessité, pour pouvoir développer une fonction arbitraire, d'adjoindre aux polynomes $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ une autre famille de polynomes.

La solution du problème de Dirichlet pour une fonction, harmonique à l'intérieur de S,

$$F(z_1, \ldots, z_{n+s+1}),$$

se réduisant sur S à une fonction donnée $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$, s'obtient aisément sous forme d'un développement en série de polynomes harmoniques homogènes, lorsque l'on sait représenter la fonction Φ par une série de polynomes $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ dans le domaine $X_n \geqq 0$ qui correspond à S :

$$(1) \qquad \Phi(x_1, \ldots, x_n) = \Sigma A_{m_1,\ldots,m_n} V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n).$$

Il est clair, en effet, que la fonction harmonique F est alors représentée par la série, convergente à l'intérieur de S :

$$(2) \qquad F(z_1, \ldots, z_{n+s+1}) = \Sigma A_{m_1,\ldots,m_n} r^{m} V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n).$$

On conçoit donc l'intérêt qu'il y a à étudier la possibilité de mettre une fonction donnée Φ sous la forme (1).

La première question qui se pose est la détermination effective des coefficients $A_{m_1,\ldots,m_n}$, la fonction Φ étant donnée.

Les propriétés d'orthogonalité du système des polynomes $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ suggèrent l'idée d'employer dans ce but la *méthode de Fourier*, qui réussit toujours dans le cas du développement en séries de fonctions orthogonales d'une variable.

Donc multiplions les deux termes de l'égalité (1) par

$$X_n^{\frac{s-1}{2}} V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$$

et intégrons dans le domaine $X_n \geqq 0$; en admettant la possibilité d'intégrer terme à terme le développement (ce qui suppose sa convergence uniforme dans le domaine $X_n \geqq 0$), nous obtenons

$$\int_{(X_n \geqq 0)}^{n} X_n^{\frac{s-1}{2}} \Phi V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n} dx_1 \ldots dx_n = \Sigma A_{m'_1,\ldots,m'_n} \int_{(X_n \geqq 0)}^{n} X_n^{\frac{s-1}{2}} V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n} V^{(s)}_{m'_1,\ldots,m'_n} dx_1 \ldots dx_n.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

D'où

$$(3)\qquad \int_{(X_n \geq 0)}^{n} X_n^{\frac{s-1}{2}} \Phi V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}\, dx_1 \ldots dx_n$$
$$= \sum_{i_1+\ldots+i_n=0} A_{m_1+2i_1,\ldots,m_n+2i_n} \int_{(X_n \geq 0)}^{n} X_n^{\frac{s-1}{2}} V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n} V^{(s)}_{m_1+2i_1,\ldots,m_n+2i_n}\, dx_1 \ldots dx_n,$$

puisque, d'après la formule (56) du Chapitre précédent, sont seules différentes de zéro les intégrales où les deux polynomes $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ et $V^{(s)}_{m'_1,\ldots,m'_n}$ sont de même degré :

$$m_1+\ldots+m_n = m'_1+\ldots+m'_n,$$

les différences $m'_1-m_1, \ldots, m'_n-m_n$ étant des nombres pairs $2i_1, \ldots, 2i_n$.

Sur la formule (3) un fait saute aux yeux :

tandis que, dans l'application de la méthode de Fourier aux fonctions d'une seule variable, le second membre de l'égalité obtenue contient un seul des coefficients A *à déterminer, il contient ici une combinaison linéaire des* $\binom{n+\mu}{n+1}$ *coefficients* $A_{m'_1,\ldots,m'_n}$ *pour lesquels* $m'_1+\ldots+m'_n=\mu$.

Ces coefficients sont néanmoins bien déterminés; en effet, en remplaçant successivement, dans le premier membre de (3), $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ par les $\binom{n+\mu}{n+1}$ polynomes de même degré μ, nous obtiendrons ainsi $\binom{n+\mu}{n+1}$ équations linéaires entre les $\binom{n+\mu}{n+1}$ coefficients $A_{m'_1,\ldots,m'_n}$ pour lesquels

$$m'_1+\ldots+m'_n=\mu.$$

Est-il utile de faire remarquer que ce mode de détermination des coefficients A, non seulement conduirait à des calculs inextricables dans leur recherche effective pour une fonction donnée, mais encore laisse peu d'espoir de pouvoir étudier au point de vue théorique le développement (1)?

Hermite, dès qu'il s'était proposé de mettre une fonction donnée sous la forme

$$F(x,y) = \Sigma A_{m,n} V_{m,n}(x,y),$$

avait aperçu très clairement la difficulté; il lui a donné une solution d'une grande élégance qui constitue l'une des acquisitions les plus importantes et les plus originales de son Mémoire [1], le distinguant vraiment ainsi d'une généralisation banale et facile de la théorie des polynomes de Legendre.

Dans ce but, Hermite adjoint [2], aux polynomes $V_{m,n}(x,y)$, une nouvelle famille de polynomes $U_{m,n}(x,y)$, qu'il définit par la fonction génératrice

$$-(ax+by-1)^2+(a^2+b^2)(1-x^2-y^2)]^{-\frac{1}{2}} = \Sigma a^m b^n U_{m,n}(x,y).$$

---

[1] Une difficulté identique s'est présentée dans le calcul des coefficients du développement d'une fonction en série de polynomes hypergéométriques de deux variables (XXXIII, p. 103); la solution donnée (XXXIV et XXXVI) consiste, comme ici, dans la considération de deux systèmes adjoints de polynomes; mais il convient de remarquer que la solution concernant les polynomes hypergéométriques $E_{m,n}$ et $F_{m,n}$ est très postérieure à la solution d'Hermite, qui seule est profondément originale et a servi de modèle pour tous les cas analogues. Le premier exemple de systèmes adjoints, rencontré par Hermite lui-même avant celui des $U_{m,n}$ et $V_{m,n}$, est celui des polynomes $H_{m,n}$ et $G_{m,n}$, que nous étudierons plus loin (CXIX).

[2] Ch. Hermite, *Œuvres*, t. II, p. 324.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Il est conduit à envisager ce développement par la remarque suivante : de même que sa première fonction génératrice

$$(1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}} = \Sigma a^m b^n V_{m,n}(x, y)$$

généralise la fonction de Legendre, prise sous sa forme habituelle

$$(1 - 2ax + a^2)^{-\frac{1}{2}} = \Sigma a^m V_m(x),$$

sa deuxième fonction génératrice généralise encore celle de Legendre, quand on l'écrit de la manière suivante :

$$[(ax - 1)^2 - a^2(1 - x^2)]^{-\frac{1}{2}} = \Sigma a^m V_m(x).$$

Les polynomes $U_{m,n}$ étant ainsi définis, Hermite démontre que l'intégrale

$$\int\int_{(1-x^2-y^2 \geq 0)} V_{m,n} U_{\mu,\nu}\, dx\, dy$$

est nulle tant que l'on n'a pas simultanément

$$m = \mu, \qquad n = \nu :$$

dans ce cas,

$$\int\int_{(1-x^2-y^2 \geq 0)} V_{m,n} U_{m,n}\, dx\, dy = \frac{\pi}{m+n+1} \frac{(1, m+n)}{(1, m)(1, n)}.$$

Ce résultat fondamental lui permet de calculer immédiatement les coefficients du développement

$$F(x, y) = \Sigma A_{m,n} V_{m,n}(x, y)$$

par la formule très simple

$$\int\int_{(1-x^2-y^2 \geq 0)} F U_{m,n}\, dx\, dy = A_{m,n} \frac{\pi}{m+n+1} \frac{(1, m+n)}{(1, m)(1, n)}.$$

Pour étendre ce résultat aux polynomes $V_{m_1, \ldots, m_n}$ *nous suivrons une méthode synthétique* (1) *exactement inverse de celle d'Hermite. Au lieu de définir une famille de polynomes* $U_{m_1, \ldots, m_n}$, *en posant* a priori *une nouvelle fonction génératrice, puis en vérifiant* a posteriori *qu'ils possèdent la propriété désirée*

$$\int_{(x_n \geq 0)}^{\infty} x_n^{s-1} V_{m'_1, \ldots, m'_n} U_{m_1, \ldots, m_n}\, dx_1 \ldots dx_n = 0,$$

tant que

$$m'_1 \neq m_1, \qquad \ldots, \qquad m'_n \neq m_n,$$

nous construirons synthétiquement les polynomes $U_{m_1, \ldots, m_n}$ *en prenant cette condition comme point de départ.*

Nous vérifierons ensuite que les polynomes obtenus peuvent se définir par la fonction génératrice

$$[(a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n - 1)^2 + (a_1^2 + \ldots + a_n^2)(1 - x_1^2 - \ldots - x_n^2)]^{-\frac{s}{2}} = \Sigma a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n} U^s_{m_1, \ldots, m_n}$$

(1) J. Kampé de Fériet, *Thèse*, p. 50.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

considérée pour la première fois dans toute sa généralité par P. Appell [1] et coïncidant avec celle d'Hermite [2], pour $n = 2$, dans les deux cas qu'il a envisagés : $s = 1$ et $s = 2$.

LXXVIII. — Formation des polynomes $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$.

Cherchons à construire une famille de polynomes $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n)$ possédant les deux propriétés suivantes :

1° La fonction

$$F(z_1, \ldots, z_{n+s+1}) = r^{\mu} U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n)$$

est un polynome harmonique homogène de degré μ.

2° Tant que l'on n'a pas à la fois

$$m_1 = q_1, \quad \ldots, \quad m_n = q_n,$$

l'intégrale

$$\int_{(X_n \geq 0)}^{n} X_n^{\frac{s-1}{2}} V^{(s)}_{q_1,\ldots,q_n} U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n} dx_1 \ldots dx_n$$

est égale à zéro.

La première condition montre d'abord que le polynome $F(z_1, \ldots, z_{n+s+1})$, devant se réduire sur l'hypersphère S à $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$, ne dépend de $z_{n+1}, \ldots, z_{n+s+1}$ que par l'intermédiaire de

$$z_{n+1}^2 + \ldots + z_{n+s+1}^2.$$

Appliquons ensuite au polynome harmonique F la formule (55-LXXVI)

$$2\pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+s-1}{2}\right)} F(a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots, 0)$$
$$= \Sigma(2q + n + s - 1) a_1^{q_1} \ldots a_n^{q_n} \int_{(X_n \geq 0)}^{n} X_n^{\frac{s-1}{2}} V^{s}_{q_1,\ldots,q_n} U^{s}_{m_1,\ldots,m_n} dx_1 \ldots dx_n.$$

Si la seconde condition est satisfaite, tous les termes du second membre seront nuls, sauf celui pour lequel

$$q_1 = m_1, \quad \ldots, \quad q_n = m_n,$$

et l'on aura par conséquent

$$F(a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots, 0) = C a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n}$$

en désignant par C une certaine constante qui dépend uniquement de la valeur de l'intégrale

$$\int_{(X_n \geq 0)}^{n} X_n^{\frac{s-1}{2}} V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n} U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n} dx_1 \ldots dx_n,$$

à laquelle nous n'avons pas, jusqu'ici, imposé d'autre condition que d'être différente de zéro.

---

(1) P. Appell, *Les polynomes $U_{m,n}$ d'Hermite et leurs analogues rattachés aux fonctions sphériques dans l'hyperespace* (*C. R. Acad. des Sc.*, t. 156, 1913, p. 1852).

(2) Ch. Hermite, *Œuvres*, t. II, p. 324 et 340.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Nous sommes donc conduits à résoudre le problème suivant :

Déterminer un polynome harmonique homogène de degré μ : $F(z_1, \ldots, z_{n+s+1})$, *ne dépendant de* $z_{n+1}, \ldots, z_{n+s+1}$ *que par l'intermédiaire de*

$$z_{n+1}^2 + \ldots + z_{n+s+1}^2$$

et qui pour $z_{n+1} = \ldots = z_{n+s+1} = 0$ *se réduit à*

$$F(z_1, \ldots, z_n, 0, \ldots, 0) = C z_1^{m_1} \ldots z_n^{m_n}. \tag{4}$$

La réponse à ce problème est contenue comme cas particulier dans l'énoncé général suivant :

Le polynome harmonique homogène de degré μ *ne dépendant de* $z_{n+1}, \ldots, z_{n+s+1}$ *que par l'intermédiaire de* $z_{n+1}^2 + \ldots + z_{n+s+1}^2$ *et se réduisant pour* $z_{n+1} = \ldots = z_{n+s+1} = 0$ *à un polynome homogène donné* $P(z_1, \ldots, z_n)$

$$P(z_1, \ldots, z_n, 0, \ldots, 0) = \varphi_\mu(z_1, \ldots, z_n)$$

a pour expression

$$P = \varphi_\mu(z_1, \ldots, z_n) + \ldots + (-1)^j \frac{(z_{n+1}^2 + \ldots + z_{n+s+1}^2)^j}{2^{2j}} \frac{\Delta^{2j}[\varphi_\mu(z_1, \ldots, z_n)]}{(1, j)\binom{s+1}{2}, j)} + \ldots; \tag{5}$$

ce développement s'arrêtant de lui-même au terme pour lequel $j = \frac{\mu}{2}$ ou $j = \frac{\mu - 1}{2}$, selon que μ est pair ou impair.

Ce résultat général s'obtient bien aisément en étendant les calculs effectués au paragraphe LXIV pour le cas de $s = 1$. Il est clair d'abord que P doit être de la forme

$$P = \varphi_\mu(z_1, \ldots, z_n) + \ldots + (z_{n+1}^2 + \ldots + z_{n+s+1}^2)^j \varphi_{\mu-2j}(z_1, \ldots, z_n) + \ldots,$$

les polynomes $\varphi_{\mu-2j}$ devant être homogènes de degré $\mu - 2j$. Comme

$$\begin{aligned} &\Delta^2[(z_{n+1}^2 + \ldots + z_{n+s+1}^2)^j \varphi_{\mu-2j}] \\ &\quad = (z_{n+1}^2 + \ldots + z_{n+s+1}^2)^j \Delta^2 \varphi_{\mu-2j} + 2j(s+1+2j-2)(z_{n+1}^2 + \ldots + z_{n+s+1}^2)^{j-1} \varphi_{\mu-2j}, \end{aligned}$$

l'équation

$$\Delta^2 P = 0,$$

ordonnée selon les puissances de $(z_{n+1}^2 + \ldots + z_{n+s+1}^2)$, conduit aux conditions nécessaires et suffisantes

$$\Delta^2 \varphi_{\mu-2j-2} + 2j(s+1+2j-2)\varphi_{\mu-2j} = 0 \qquad \left(j = 1, 2, \ldots, \frac{\mu}{2} \text{ ou } \frac{\mu-1}{2}\right)$$

qui permettent de déterminer de proche en proche $\varphi_{\mu-2j}$ en fonction de φ_μ.

Cette proposition générale étant établie, il suffit pour obtenir le polynome harmonique F, que nous voulons déterminer, de faire

$$\varphi_\mu = C z_1^{m_1} \ldots z_n^{m_n}$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

dans la formule (5), ce qui donne

$$(6)\qquad F = C\left[z_1^{m_1}\ldots z_n^{m_n} + \ldots + (-1)^j \frac{(z_{n+1}^2 + \ldots + z_{n+s+1}^2)^j}{2^{2j}} \frac{\Delta^{2j}(z_1^{m_1}\ldots z_n^{m_n})}{(1, j)\left(\frac{s+1}{2}, j\right)} + \ldots\right].$$

Particularisons maintenant la constante C, dont nous pouvons disposer :

$$(7)\qquad C = \frac{(s, \mu)}{(1, m_1)\ldots(1, m_n)},$$

nous désignerons par $\mathcal{V}^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}(z_1, \ldots, z_{n+s+1})$ le polynome harmonique correspondant à cette valeur spéciale de C :

$$(8)\qquad \mathcal{V}^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n} = \frac{(s, \mu)}{(1, m_1)\ldots(1, m_n)} \times \left[z_1^{m_1}\ldots z_n^{m_n} + \ldots + (-1)^j \frac{(z_{n+1}^2 + \ldots + z_{n+s+1}^2)^j}{2^{2j}} \frac{\Delta^{2j}(z_1^{m_1}\ldots z_n^{m_n})}{(1, j)\left(\frac{s+1}{2}, j\right)} + \ldots\right];$$

ce polynome harmonique vérifie bien les deux conditions voulues :

1° Il ne dépend de $z_{n+1}, \ldots, z_{n+s+1}$ que par $(z_{n+1}^2 + \ldots + z_{n+s+1}^2)$;

2° On a

$$(9)\qquad \mathcal{V}^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}(z_1, \ldots, z_n, 0, \ldots, 0) = \frac{(s, \mu)}{(1, m_1)\ldots(1, m_n)} z_1^{m_1}\ldots z_n^{m_n}.$$

Si nous passons des coordonnées rectangulaires aux coordonnées zonales par les formules suivantes

$$z_1 = r x_1, \ldots, z_n = r x_n, \qquad z_{n+1}^2 + \ldots + z_{n+s+1}^2 = r^2 - z_1^2 - \ldots - z_n^2 = r^2 X_n,$$

nous pourrons écrire

$$(10)\qquad \mathcal{V}^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n} = r^\mu U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n),$$

en posant

$$(11)\qquad U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n} = \frac{(s, \mu)}{(1, m_1)\ldots(1, m_n)}\left[x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n} + \ldots + (-1)^j \frac{X_n^j}{2^{2j}} \frac{\Delta^{2j}(x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n})}{(1, j)\left(\frac{s+1}{2}, j\right)} + \ldots\right].$$

D'après le procédé même employé pour les construire, ces polynomes $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ *possèdent la propriété désirée pour les polynomes que nous voulons adjoindre aux* $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$.

Il suffit pour le vérifier d'appliquer au polynome harmonique $\mathcal{V}^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ la formule générale (55-LXXVI), qui s'écrit en vertu de la relation (9)

$$2\pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+s-1}{2}\right)} \frac{(s, \mu)}{(1, m_1)\ldots(1, m_n)} a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}$$
$$= \Sigma(2q + n + s - 1) a_1^{q_1}\ldots a_n^{q_n} \int_{(X_n \geqq 0)}^{n} X_n^{\frac{s-1}{2}} V^{(s)}_{q_1,\ldots,q_n} U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Par simple identification des deux membres, on en déduit que l'intégrale

$$(12)\qquad \int_{(X_n \geqq 0)}^{n} X_n^{\frac{s-1}{2}} V^{s}_{q_1,\ldots,q_n} U^{s}_{m_1,\ldots,m_n}\, dx_1 \ldots dx_n = 0,$$

tant que l'on n'a pas à la fois

$$m_1 = q_1, \quad \ldots, \quad m_n = q_n;$$

dans ce cas,

$$(13)\qquad \int_{(X_n \geqq 0)}^{n} X_n^{\frac{s-1}{2}} V^{s}_{m_1,\ldots,m_n} U^{s}_{m_1,\ldots,m_n}\, dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{2\mu + n + s - 1} \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+s-1}{2}\right)} \frac{(s, \mu)}{(1, m_1)\ldots(1, m_n)}.$$

Quand, dans les formules (12) et (13), l'on fait

$$n = 2, \qquad s = 1,$$

on retrouve précisément les résultats d'Hermite rappelés au début de ce Chapitre.

LXXIX. — Fonction génératrice des polynomes $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$.

Ces polynomes $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$, dont nous venons de former l'expression générale en partant des seules conditions imposées pour les adjoindre aux polynomes $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$, peuvent aussi être définis *a priori* au moyen de la *fonction génératrice* considérée par P. Appell :

$$[(a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n - 1)^2 + (a_1^2 + \ldots + a_n^2)(1 - x_1^2 - \ldots - x_n^2)]^{-\frac{s}{2}} = \Sigma a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n} U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n},$$

valeur prise sur l'hypersphère S par la fonction (harmonique à l'intérieur de S pourvu que $a_1^2 + \ldots + a_n^2 < 1$) :

$$(14)\qquad G = [(a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n - 1)^2 + (a_1^2 + \ldots + a_n^2)(z_{n+1}^2 + \ldots + z_{n+s+1}^2)]^{-\frac{s}{2}}.$$

D'après la remarque de P. Appell, exposée au paragraphe LIII, page 185, cette fonction G vérifie l'équation de Laplace dans l'espace à $n + s + 1$ dimensions. Car elle peut se mettre sous la forme

$$G = (a_1^2 + \ldots + a_n^2)^{-\frac{s}{2}} [\delta_1^2 + \delta_2^2 + \ldots + \delta_{s+2}^2]^{-\frac{s}{2}},$$

en désignant respectivement par $\delta_1, \ldots, \delta_{s+2}$ les distances du point $P(z_1, \ldots, z_{n+s+1})$ aux $(s+2)$ hyperplans rectangulaires ayant pour équations

$$(\pi_1)\qquad a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n - 1 = 0,$$
$$(\pi_2)\qquad z_{n+1} = 0,$$
$$\ldots \qquad \ldots,$$
$$(\pi_{s+2})\qquad z_{n+s+1} = 0.$$

Nous sommes donc exactement dans les conditions de la page 186; la fonction donnée à cet endroit coïnciderait avec l'expression de G en faisant

$$h = n, \qquad q = n + s + 1.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Ce résultat étant rappelé, remarquons que la seule singularité de la fonction G est la multiplicité linéaire à $(n-1)$ dimensions commune aux $(s+2)$ hyperplans (π). Or la distance de l'origine à l'hyperplan (π_1) ayant pour valeur

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}},$$

il en résulte que, si l'on impose aux constantes $a_1, \ldots, a_n$ la condition $a_1^2+\ldots+a_n^2<1$, la multiplicité sur laquelle G est singulière est entièrement extérieure à l'hypersphère S.

Donc, avec la condition $a_1^2+\ldots+a_n^2<1$, la fonction G est harmonique à l'intérieur de l'hypersphère S et sur cette hypersphère.

Nous pouvons dans ce domaine développer G selon les puissances des constantes $a_1, \ldots, a_n$:

$$G=(1-a_1z_1-\ldots-a_nz_n)^{-s}\left[1+\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{(1-a_1z_1-\ldots-a_nz_n)^2}(z_{n+1}^2+\ldots+z_{n+s+1}^2)\right]^{-\frac{s}{2}}$$
$$=\sum_{j=0}^{j=\infty}(-1)^j\frac{\binom{s}{2}, j}{(1, j)}\frac{(a_1^2+\ldots+a_n^2)^j}{(1-a_1z_1-\ldots-a_nz_n)^{s+2j}}(z_{n+1}^2+\ldots+z_{n+s+1}^2)^j.$$

Sous cette forme, il est visible que le coefficient de $a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}$, dans le développement de G, est un polynome homogène en $z_1, \ldots, z_{n+s+1}$, ne dépendant de $z_{n+1}, \ldots, z_{n+s+1}$ que par l'intermédiaire de $z_{n+1}^2+\ldots+z_{n+s+1}^2$; en outre, pour

$$z_{n+1}=\ldots=z_{n+s+1}=0,$$

on a

$$G(z_1, \ldots, z_n, 0, \ldots, 0)=(1-a_1z_1-\ldots-a_nz_n)^{-s}=\Sigma a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}\frac{(s, \mu)}{(1, m_1)\ldots(1, m_n)}z_1^{m_1}\ldots z_n^{m_n};$$

enfin, puisque G est harmonique, il doit en être de même de chacun des termes de son développement.

Le coefficient de $a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}$ dans le développement de G étant un polynome harmonique dépendant de $z_{n+1}, \ldots, z_{n+s+1}$ par l'intermédiaire de $z_{n+1}^2+\ldots+z_{n+s+1}^2$ et se réduisant pour $z_{n+1}=\ldots=z_{n+s+1}=0$ à

$$\frac{(s, \mu)}{(1, m_1)\ldots(1, m_n)}z_1^{m_1}\ldots z_n^{m_n},$$

il coïncide donc nécessairement avec le polynome $v_{m_1, \ldots, m_n}^{(s}$; à l'intérieur de S, on a par conséquent

$$(14)\quad [(a_1z_1+\ldots+a_nz_n-1)^2+(a_1^2+\ldots+a_n^2)(z_{n+1}^2+\ldots+z_{n+s+1}^2)]^{-\frac{s}{2}}=\Sigma a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}v_{m_1, \ldots, m_n}^{s},$$

et sur S

$$(15)\quad [(a_1x_1+\ldots+a_nx_n-1)^2+(a_1^2+\ldots+a_n^2)(1-x_1^2-\ldots-x_n^2)]^{-\frac{s}{2}}=\Sigma a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}U_{m_1, \ldots, m_n}^{s};$$

telle est la fonction génératrice donnée par P. Appell, pour les polynomes $U_{m_1, \ldots, m_n}^{s}$ adjoints aux $V_{m_1, \ldots, m_n}^{s}$.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Auparavant (pour deux variables) Hermite et (pour n quelconque) Didon [1] n'avaient envisagé cette fonction génératrice que dans les seuls cas $s=1$ et $s=2$. Voici les notations d'Hermite [2] :

$$[(ax+by-1)^2-(a^2+b^2)(1-x^2-y^2)]^{-\frac{1}{2}}=\Sigma a^m b^n U_{m,n}(x,y),$$

$$[(ax+by-1)^2-(a^2+b^2)(1-x^2-y^2)]^{-1}=(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\Sigma a^m b^n V_{m,n}(x,y).$$

Même lorsque s n'est pas un entier positif (comme nous le supposons toujours explicitement) le développement (15) peut encore servir à définir des polynomes $U^s_{m_1,\ldots,m_n}$, mais qui n'admettent plus d'interprétation dans la théorie des fonctions harmoniques; l'étude de ces nouveaux polynomes a été faite par M. Angelescu dans sa Thèse déjà citée.

Lorsque $n=1$, la fonction génératrice des polynomes $U^s_m(x)$ coïncide avec celle des polynomes $V^s_m(x)$:

$$[(ax-1)^2+a^2(1-x^2)]^{-\frac{s}{2}}=(1-2ax+a^2)^{-\frac{s}{2}}$$

et par conséquent les deux familles de polynomes adjoints sont confondues en une seule :

$$U^s_m(x)=V^s_m(x).$$

LXXX. — Expression du groupe homogène des polynomes $U^s_{m_1,\ldots,m_n}$ d'un degré μ donné. Maximum de $U^s_{m_1,\ldots,m_n}$ dans le domaine $X_n \geqq 0$.

De même que le groupe homogène des polynomes $V^s_{m_1,\ldots,m_n}$ de même degré μ s'exprime au moyen du polynome à une variable V_μ^{n+s-1} par la formule (52-LXXVI), il est possible d'exprimer très simplement le groupe homogène des polynomes $U^s_{m_1,\ldots,m_n}$ au moyen du polynome V^s_μ; cette remarque a été faite par P. Appell [3] au sujet des polynomes étudiés par Hermite :

$$U_{m,n}(x,y)=U^1_{m,n}(x,y),$$

dont il a exprimé le groupe homogène au moyen du polynome de Legendre V^0_μ.

Il suffit de remarquer pour cela que l'expression qui figure dans la fonction génératrice des $U^s_{m_1,\ldots,m_n}$

$$[a_1x_1+\ldots+a_nx_n-1]^2-(a_1^2+\ldots+a_n^2)(1-x_1^2-\ldots-x_n^2)$$

se ramène immédiatement à la forme

$$1-2ax+a^2$$

en posant

$$ax=a_1x_1+\ldots+a_nx_n,$$
$$a^2=(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)^2+(a_1^2+\ldots+a_n^2)(1-x_1^2-\ldots-x_n^2).$$

---

(1) F. Didon, *Ann. Éc. Normale*, t. V, 1868, p. 255 et 294.

(2) Ch. Hermite, *Œuvres*, t. II, p. 324 et 335.

(3) P. Appell, *Les polynomes d'Hermite rattachés aux polynomes de Legendre* (*Annaës scient. da Acad polytech. do Porto*, t. V, 1910, p. 65).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

D'où

$$\sum a_1^{m_1}\dots a_n^{m_n} U^s_{m_1,\dots,m_n} = \sum_{\mu=0}^{\mu=+\infty} a^\mu V^s_\mu(x).$$

Mais il ressort des expressions de x et a que $a^\mu V^s_\mu(x)$ est homogène de degré μ par rapport aux constantes $a_1, \dots, a_n$; d'où l'expression suivante du groupe homogène

$$(16)\quad \sum_{m_1+\dots+m_n=\mu} a_1^{m_1}\dots a_n^{m_n} U^s_{m_1,\dots,m_n} = [(a_1x_1+\dots+a_nx_n)^2 + (a_1^2+\dots+a_n^2)(1-x_1^2-\dots-x_n^2)]^{\frac{\mu}{2}}$$
$$\times V^s_\mu\left[\frac{a_1x_1+\dots+a_nx_n}{\sqrt{(a_1x_1+\dots+a_nx_n)^2+(a_1^2+\dots+a_n^2)(1-x_1^2-\dots-x_n^2)}}\right].$$

Cette formule générale a été donnée par M. Angelescu [1] sous une forme équivalente, en utilisant des polynomes $H_\mu(x, \lambda)$ définis par lui et qui se ramènent aisément aux $V^s_\mu(x)$.

Hermite [2], pour les polynomes $U_{m,n}(x, y)$, et Didon [3], pour les polynomes $U_{m_1,\dots,m_n}$, ont formé explicitement l'expression développée de ce groupe homogène; il est aisé de l'obtenir [4] dans le cas général en s'appuyant seulement sur la formule (5).

En effet, l'expression

$$(17)\qquad \Omega_\mu(z_1, \dots, z_{n+s+1}) = \sum_{m_1+\dots+m_n=\mu} a_1^{m_1}\dots a_n^{m_n} v^s_{m_1,\dots,m_n}$$

est évidemment un polynome harmonique homogène de degré μ, qui, comme les v^s, ne dépend de $z_{n+1}, \dots, z_{n+s+1}$ que par l'intermédiaire de $z_{n+1}^2+\dots+z_{n+s+1}^2$ et tel que, d'après la formule (9),

$$\Omega_\mu(z_1, \dots, z_n, 0, \dots, 0) = \sum_{m_1+\dots+m_n=\mu} a_1^{m_1}\dots a_n^{m_n} \frac{(s, \mu)}{(1, m_1)\dots(1, m_n)} z_1^{m_1}\dots z_n^{m_n}$$
$$= \frac{(s, \mu)}{(1, \mu)}(a_1z_1+\dots+a_nz_n)^\mu.$$

On peut donc appliquer le résultat général exprimé par la formule (5) au polynome Ω_μ en faisant

$$\varphi_\mu(z_1, \dots, z_n) = \frac{(s, \mu)}{(1, \mu)}(a_1z_1+\dots+a_nz_n)^\mu.$$

D'où

$$(18)\quad \Omega_\mu = \frac{(s, \mu)}{(1, \mu)}\left[(a_1z_1+\dots+a_nz_n)^\mu + \dots + (-1)^j \frac{(z_{n+1}^2+\dots+z_{n+s+1}^2)^j}{2^{2j}} \frac{\Delta^{2j}[(a_1z_1+\dots+a_nz_n)^\mu]}{(1, j)\left(\frac{s+1}{2}, j\right)} + \dots\right].$$

En passant en coordonnées zonales,

$$\Omega_\mu = r^\mu \sum_{m_1+\dots+m_n=\mu} a_1^{m_1}\dots a_n^{m_n} U^s_{m_1,\dots,m_n}(x_1, \dots, x_n),$$

---

(1) A. Angelèscu, *Thèse*, p. 70.
(2) Ch. Hermite, *Œuvres*, t. II, p. 333-334.
(3) F. Didon, *Ann. Éc. Norm.*, t. V, 1868, p. 258.
(4) J. Kampé de Fériet, *Thèse*, p. 55.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Cette condition est réalisée, quelles que soient les constantes $a_1, \ldots, a_n$, si

$$X_n = 0.$$

Nous en concluons donc que dans le domaine $X_n \geqq 0$

$$\sum_{m_1+\ldots+m_n=\mu} \left| a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n} U^s_{m_1,\ldots,m_n} \right| \leqq \frac{(s, \mu)}{(1, \mu)} \left| (a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n)^\mu \right|,$$

ce qui entraîne nécessairement

$$| U^s_{m_1,\ldots,m_n} | \leqq \frac{(s, \mu)}{(1, m_1)\ldots(1, m_n)} | x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n} |,$$

la valeur maxima étant effectivement atteinte pour $X_n = 0$.

Or on voit aisément que l'expression du deuxième membre de cette inégalité est elle-même maxima pour

$$x_1 = \frac{m_1}{\mu}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{m_n}{\mu} \qquad (X_n = 0),$$

nous en tirons donc une limite supérieure [1] de la valeur de $U^{(s)}$ dans le domaine $X_n \geqq 0$

$$(21) \qquad | U^s_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n) | \leqq \frac{(s, \mu)}{\frac{\mu}{\mu^2}} \frac{m_1^{\frac{m_1}{2}}}{(1, m_1)} \cdots \frac{m_n^{\frac{m_n}{2}}}{(1, m_n)}.$$

LXXXI. — Expression des polynomes $U^s_{m_1,\ldots,m_n}$ par des fonctions hypergéométriques.

Si dans l'expression générale

$$(11) \qquad U^s_{m_1,\ldots,m_n} = \frac{(s, \mu)}{(1, m_1)\ldots(1, m_n)} \left[x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n} + \ldots + (-1)^j \frac{X_n^j}{2^{2j}} \frac{\Delta^{2j}(x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n})}{(1, j)\left(\frac{s+1}{2}, j\right)} + \ldots \right]$$

on remplace $\Delta^{2j}(x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n})$ par sa valeur calculée page 233, on obtient l'expression de $U^{(s)}$ développée sous la forme suivante :

$$(22) \quad U^s_{m_1,\ldots,m_n} = \frac{(s, \mu)}{(1, m_1)\ldots(1, m_n)} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n} \times \sum \frac{(-1)^j}{2^{2j}} \frac{(-m_1, 2j_1)\ldots(-m_n, 2j_n)}{(1, j_1)\ldots(1, j_n)\left(\frac{s+1}{2}, j\right)} \frac{X_n^j}{x_1^{2j_1} \ldots x_n^{2j_n}},$$

ou encore

$$(22\ bis) \qquad U^s_{m_1,\ldots,m_n} = \frac{(s, \mu)}{(1, m_1)\ldots(1, m_n)} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}$$

$$\times \sum (-1)^j \frac{\left(\frac{-m_1}{2}, j_1\right)\left(\frac{1-m_1}{2}, j_1\right)\cdots\left(\frac{1-m_n}{2}, j_n\right)}{(1, j_1)\ldots(1, j_n)\left(\frac{s+1}{2}, j\right)} \frac{X_n^j}{x_1^{2j_1} \ldots x_n^{2j_n}}.$$

[1] Dans le cas particulier qu'il a envisagé ($n = 2$, $s = 1$), Hermite a déjà donné cette formule, page 332 (Remarque).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

ce qui donne pour l'expression cherchée du groupe homogène

$$(19)\qquad \sum_{m_1+\ldots+m_n} a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}\, U^s_{m_1,\ldots,m_n}$$
$$= \frac{(s,\mu)}{(1,\mu)}\left[(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)^\mu+\ldots+(-1)^j\frac{X_n^j}{2^{2j}}\,\frac{\Delta^{2j}[(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)^\mu]}{(1,j)\left(\frac{s+1}{2},j\right)}+\ldots\right].$$

Si l'on remarque que

$$\Delta^{2j}[(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)^\mu]=\mu(\mu-1)\ldots(\mu-2j+1)(a_1^2+\ldots+a_n^2)^j(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)^{\mu-2j},$$

on peut donner au groupe homogène une forme équivalente à celle qui a été obtenue par Didon [1] :

$$(19\,bis)\qquad \sum_{m_1+\ldots+m_n=\mu} a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}\, U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$$
$$=\frac{(s,\mu)}{(1,\mu)}\sum(-1)^j\frac{\left(-\frac{\mu}{2},j\right)\left(\frac{1-\mu}{2},j\right)}{(1,j)\left(\frac{s+1}{2},j\right)}(a_1^2+\ldots+a_n^2)^j X_n^j(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)^{\mu-2j}.$$

La formule (19) est évidemment valable quelles que soient les constantes $a_1,\ldots,a_n$, réelles ou imaginaires, en particulier si

$$a_1^2+\ldots+a_n^2=0,$$

on a

$$\Delta^{2j}[(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)^\mu]=0\qquad (j=1,2,\ldots),$$

d'où, dans ce cas particulier, cette expression remarquable du groupe homogène

$$(20)\qquad \sum_{m_1+\ldots+m_n=\mu} a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}\, U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}=\frac{(s,\mu)}{(1,\mu)}(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)^\mu.$$

De l'expression (16) du groupe homogène en fonction de $V^{(s)}_\mu(x)$ peuvent se déduire de nombreuses propriétés des polynomes $U^s_{m_1,\ldots,m_n}$; nous nous contenterons d'en tirer l'expression de la valeur maxima de ces polynomes dans le domaine $X_n \geqq 0$, dont nous aurons ultérieurement besoin.

Le polynome $V^{(s)}_\mu(x)$, dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ est inférieur à $\frac{(s,\mu)}{(1,\mu)}$ et il atteint effectivement cette valeur pour $x=1$ [2]

$$|V^{(s)}_\mu(x)| \leqq V^{(s)}_\mu(1)=\frac{(s,\mu)}{(1,\mu)}.$$

Or, pour que dans la formule (16) on ait $x=1$, il faut que

$$(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)^2+(a_1^2+\ldots+a_n^2)X_n=(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)^2.$$

---

[1] F. Didon, *Ann. Éc. Norm.*, t. V, 1868, p. 258. — Ch. Hermite (*Œuvres*, t. II, p. 333-334) a formé l'expression du groupe homogène des polynomes $U_{m,n}(x,y)$.

[2] *Voir* la Note sur les polynomes $V^s_p(x)$ à la fin du Volume.

Ce développement est d'ailleurs limité, puisque, quel que soit k, l'un des deux nombres $-\frac{m_k}{2}$ et $\frac{1-m_k}{2}$ est nécessairement un entier négatif; il met bien en évidence le fait que $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ a même parité que

$$x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}.$$

En rapprochant simplement l'expression (22 *bis*) du développement (2-XXXVII) de la fonction hypergéométrique $F_B(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_n,\gamma,x_1,\ldots,x_n)$, on obtient immédiatement

$$(23)\quad U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}=\frac{(s,\mu)}{(1,m_1)\ldots(1,m_n)}x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}$$
$$\times F_B\left[-\frac{m_1}{2},\ldots,-\frac{m_n}{2},\frac{1-m_1}{2},\ldots,\frac{1-m_n}{2},\frac{s+1}{2},-\frac{X_n}{x_1^2},\ldots,-\frac{X_n}{x_n^2}\right].$$

Cette expression de $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ par une série hypergéométrique (limitée) est tout à fait analogue à l'expression (51-LXXVI) de $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$

$$V^{s}_{m_1,\ldots,m_n}=2^{\mu}\frac{\left(\frac{n+s-1}{2},\mu\right)}{(1,m_1)\ldots(1,m_n)}x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}$$
$$\times F_B\left[-\frac{m_1}{2},\ldots,-\frac{m_n}{2},\frac{1-m_1}{2},\ldots,\frac{1-m_n}{2},-\mu-\frac{n+s-3}{2},\frac{1}{x_1^2},\ldots,\frac{1}{x_n^2}\right].$$

Il est à remarquer que dans ces deux fonctions hypergéométriques F_B, les $2n$ premiers arguments

$$\alpha_k=-\frac{m_k}{2},\qquad \beta_k=\frac{1-m_k}{2}\qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

sont identiques. On passe de l'une à l'autre en remplaçant, dans γ,

$$-\mu-\frac{n+s-3}{2}\quad\text{par}\quad\frac{s+1}{2}$$

et

$$x_1\quad\text{par}\quad\frac{x_1}{\sqrt{-X_n}},\qquad\ldots,\qquad x_n\quad\text{par}\quad\frac{x_n}{\sqrt{-X_n}}.$$

Ceci permet d'écrire :

$$V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}\left[\frac{x_1}{\sqrt{-X_n}},\ldots,\frac{x_n}{\sqrt{-X_n}}\right]=2^{\mu}\frac{\left(\frac{n+s-1}{2},\mu\right)}{(2-2\mu-n-s,\mu)}(-X_n)^{-\frac{\mu}{2}}U^{(2-2\mu-n-s)}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n),$$

$$U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}\left[\frac{x_1}{\sqrt{-X_n}},\ldots,\frac{x_n}{\sqrt{-X_n}}\right]=2^{\mu}\frac{(s,\mu)}{\left(-\mu-\frac{s-1}{2},\mu\right)}(-X_n)^{-\frac{\mu}{2}}V^{(2-2\mu-n-s)}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n).$$

Ces deux formules ramèneraient les polynomes $U^{(s)}$ et $V^{(s)}$ les uns aux autres, si elles n'étaient pas dénuées de sens du fait, que nous n'avons défini les polynomes $U^{(s)}$ et $V^{(s)}$ que pour les valeurs positives et entières de s. *On peut leur donner un sens en les prenant comme définition des polynomes* $U^{(s)}$ *et* $V^{(s)}$ *pour les valeurs négatives ou nulles de* s.

Ces relations sont dues à M. Angelescu [1].

---

[1] Angelescu, *Thèse*, p. 71.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Remarquons enfin que l'expression (19 *bis*) du groupe homogène montre qu'il s'exprime simplement par une fonction de Gauss :

$$(24)\qquad \sum_{m_1+\ldots+m_n=\mu} a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}\, U^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$$
$$= \frac{(s,\mu)}{(1,\mu)}(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)^{\mu}\, F\left[-\frac{\mu}{2}, \frac{1-\mu}{2}, \frac{s+1}{2}, \frac{(a_1^2+\ldots+a_n^2)X_n}{(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)^2}\right].$$

LXXXII. — Expression des polynomes $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ par des intégrales définies.

Partons de la formule (62-LXXVI)

$$\int^{q}[\alpha-i(\lambda_1\xi_1+\ldots+\lambda_q\xi_q)]^{-(q+1)}d\xi_1\ldots d\xi_q = \frac{\pi^{\frac{q}{2}}}{\Gamma\left(\frac{q}{2}+1\right)}(\alpha^2+\lambda_1^2+\ldots+\lambda_q^2)^{-\frac{q+1}{2}}$$

(l'intégrale étant étendue au domaine $1-\xi_1^2-\ldots-\xi_q^2 \geq 0$).

Nous l'appliquerons en prenant $q = s-1$:

$$\alpha = 1-a_1x_1\ldots-a_nx_n,\qquad \lambda_1 = -a_1\sqrt{X_n},\qquad \ldots\qquad \lambda_n = -a_n\sqrt{X_n},\qquad \lambda_{n+1}=\ldots=\lambda_{s-1}=0$$

(ce qui suppose, par conséquent, $s \geq n+1$).

Le deuxième membre se confond alors avec la fonction génératrice des polynomes $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$. D'autre part, la fonction sous le signe somme ne dépendant pas de $\xi_{n+1}, \ldots, \xi_{s+1}$, on peut intégrer par rapport à ces variables

$$\int d\xi_{n+1}\ldots d\xi_{s-1} = (1-\xi_1^2-\ldots-\xi_n^2)^{\frac{s-n-1}{2}}\frac{\pi^{\frac{s-n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s-n+1}{2}\right)}$$

(l'intégrale étant étendue au domaine $\xi_{n+1}^2+\ldots+\xi_{s-1}^2 \leq 1-\xi_1^2\ldots-\xi_n^2$).

Il vient donc

$$(25)\qquad \int^{n}(1-\xi_1^2-\ldots-\xi_n^2)^{\frac{s-n-1}{2}}\left[1-a_1(x_1+i\xi_1\sqrt{X_n})\ldots-a_n(x_n+i\xi_n\sqrt{X_n})\right]^{-s}d\xi_1\ldots d\xi_n$$
$$= \pi^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{s-n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}\left[(a_1x_1+\ldots+a_nx_n-1)^2+(a_1^2+\ldots+a_n^2)(1-x_1^2-\ldots-x_n^2)\right]^{-\frac{s}{2}}.$$

D'où, en développant les deux membres selon les puissances de $a_1, \ldots, a_n$:

$$(26)\qquad \pi^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{s-n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$$
$$= \frac{(s,\mu)}{(1,m_1)\ldots(1,m_n)}\int^{n}(1-\xi_1^2-\ldots-\xi_n^2)^{\frac{s-n-1}{2}}(x_1+i\xi_1\sqrt{X_n})^{m_1}\ldots(x_n+i\xi_n\sqrt{X_n})^{m_n}d\xi_1\ldots d\xi_n$$

(l'intégrale étant étendue au domaine $1-\xi_1^2-\ldots-\xi_n^2 \geq 0$).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Cette formule, valable tant que $s \geqq n+1$, est à rapprocher de l'expression (64-LXXVI) du polynome $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$; sous cette forme générale elle a été donnée par M. Angelescu [1].

Lorsque $n = 1$, elle devient

$$\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}\,U^{(s)}_m = \frac{(s,m)}{(1,m)}\int_{-1}^{+1}(1-\xi^2)^{\frac{s}{2}-1}\left(x+i\xi\sqrt{1-x^2}\right)^m d\xi$$

$$= \frac{(s,m)}{(1,m)}\int_0^{\pi}\left(x+i\sqrt{1-x^2}\cos\omega\right)^m \sin^{s-1}\omega\, d\omega.$$

On retrouve ainsi l'expression connue [2] du polynome $U^{(s)}_m = V^{(s)}_m$.

De ce dernier résultat se déduit immédiatement, au moyen de la formule (16), l'expression du groupe homogène des polynomes $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ au moyen d'une intégrale simple.

Il suffit d'y remplacer x par

$$\frac{a_1x_1+\ldots+a_nx_n}{\sqrt{(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)^2+(a_1^2+\ldots+a_n^2)X_n}},$$

d'où

$$\left(x+i\sqrt{1-x^2}\cos\omega\right)^{\mu}$$
$$= \left[(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)^2+(a_1^2+\ldots+a_n^2)X_n\right]^{-\frac{\mu}{2}}\left[a_1x_1+\ldots+a_nx_n+i\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}\sqrt{X_n}\cos\omega\right]^{\mu}.$$

On a donc pour l'expression du groupe homogène [3]

$$(27)\quad \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}\sum_{m_1+\ldots+m_n=\mu} a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}\,U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$$
$$= \frac{(s,\mu)}{(1,\mu)}\int_0^{\pi}\left[a_1x_1+\ldots+a_nx_n-i\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}\sqrt{X_n}\cos\omega\right]^{\mu}\sin^{s-1}\omega\, d\omega.$$

Si l'on développe le crochet par la formule du binome selon les puissances de $\cos\omega$ et qu'on évalue les intégrales définies, on retrouve identiquement l'expression (19 *bis*) du groupe homogène; de même si, dans l'intégrale (26), on développe chacun des facteurs binomes, on retombe sur l'expression (22) du polynome $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$.

LXXXIII. — Expression des polynomes $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ par les dérivées partielles de $X_n = 1 - x_1^2 - \ldots - x_n^2$.

Les polynomes de Legendre s'expriment d'une manière très élégante par les dérivées de la

---

[1] Angelescu, *Thèse*, p. 85.

[2] *Voir* la Note à la fin du Volume.

[3] J. Kampé de Fériet, *Thèse*, p. 76.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

quantité $(1 - x^2)$, au moyen de la formule énoncée pour la première fois par Olinde Rodrigues [1]

$$V_m(x) = \frac{(-1)^m}{2^m} \frac{1}{(1, m)} \frac{d^m}{dx^m}[(1 - x^2)^m];$$

cette formule n'est d'ailleurs qu'un cas particulier d'un résultat général rencontré par Jacobi [2], au cours de ses recherches sur les polynomes dérivant de la fonction hypergéométrique, qui permet de mettre une fonction sphérique d'ordre supérieur sous la forme

$$(28) \qquad V_m^{(s)}(x) = \frac{(-1)^m}{2^m} \frac{(s, m)}{\left(\frac{s+1}{2}, m\right)} \frac{(1 - x^2)^{\frac{1-s}{2}}}{(1, m)} \frac{d^m}{dx^m}\left[(1 - x^2)^{m + \frac{s-1}{2}}\right].$$

Or, une des propriétés les plus intéressantes mises en lumière par Hermite [3], *pour ses polynomes* $U_{m,n}(x, y)$ *et* $(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} V_{m,n}(x, y)$, *c'est qu'ils s'expriment au moyen des dérivées partielles de la quantité* $(1 - x^2 - y^2)$ *sous cette forme, qui est une extension naturelle de la formule d'Olinde Rodrigues :*

$$(29) \qquad U_{m,n}(x, y) = \frac{(-1)^{m+n}}{2^{m+n}} \frac{1}{(1, m)(1, n)} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}[(1 - x^2 - y^2)^{m+n}];$$

$$V_{m,n}(x, y) = \frac{(-1)^{m+n}}{2^{m+n}} \frac{(2, m+n)}{\left(\frac{3}{2}, m+n\right)} \frac{1}{(1, m)(1, n)} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}\left[(1 - x^2 - y^2)^{m+n+\frac{1}{2}}\right].$$

Cette formule a été généralisée par Didon [4] aux polynomes à n variables $U^{(1)}_{m_1, \ldots, m_n}$

$$(30) \qquad U_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{(-1)^\mu}{2^\mu} \frac{1}{(1, m_1) \ldots (1, m_n)} \frac{\partial^\mu}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}}[X_n^\mu].$$

Nous allons étendre ce résultat aux polynomes $U^{(s)}_{m_1, \ldots, m_n}$ *en démontrant la formule absolument générale*

$$(34) \qquad U^{(s)}_{m_1, \ldots, m_n} = \frac{(-1)^\mu}{2^\mu} \frac{(s, \mu)}{\left(\frac{s+1}{2}, \mu\right)} \frac{X_n^{\frac{1-s}{2}}}{(1, m_1) \ldots (1, m_n)} \frac{\partial^\mu}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}}\left[X_n^{\mu + \frac{s-1}{2}}\right]$$

qui constitue l'extension complète aux fonctions hypersphériques du résultat classique de Jacobi pour les fonctions sphériques d'une variable, d'ordre quelconque.

Hermite a obtenu son expression remarquable des polynomes $U_{m,n}(x, y)$ en étendant au cas de deux variables la série célèbre donnée par Lagrange pour développer selon les puissances de a une fonction de la racine de l'équation

$$u = x + a\varphi(u),$$

---

(1) O. Rodrigues, *Sur l'attraction des sphéroides* (Thèse, (1815).

(2) C.-G.-J. Jacobi, *Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrichen Reihe* (*J. reine angew. Math.*, t. 56, 1859, p. 149-175).

(3) Ch. Hermite, *Œuvres*, t. II, p. 328 et 342.

(4) F. Didon, *Ann. Éc. Norm.*, t. V, 1868, p. 255.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

se réduisant à x pour $a = 0$. Il commence par présenter sous une forme un peu différente le résultat de Lagrange; en posant

$$\xi = \varphi(a)$$

il ramène l'équation à la forme équivalente

$$\mathcal{F}(\xi) = \xi - \varphi(x + a\xi) = 0,$$

et établit le développement suivant :

$$\frac{F(x + a\xi)}{\frac{d\mathcal{F}}{d\xi}} = \sum \frac{a^m}{(1, m)} \frac{d^m}{dx^m} [\varphi(x)^m F(x)].$$

Cec. fait, il considère (¹) l'équation

$$\mathcal{F}(\xi) = \xi - \varphi(x_1 + a_1\xi, \ldots, x_n + a_n\xi) = 0$$

et tire du développement précédent (par une méthode qui rappelle le passage de la série de Taylor à une variable aux séries de Taylor à n variables) la généralisation suivante :

$$(31) \quad \frac{F(x_1 + a_1\xi, \ldots, x_n + a_n\xi)}{\frac{d\mathcal{F}}{d\xi}} = \sum \frac{a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n}}{(1, m_1) \ldots (1, m_n)} \frac{\partial^\mu}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}} [\varphi(x_1, \ldots, x_n)^\mu F(x_1, \ldots, x_n)];$$

ξ désignant la racine de $\mathcal{F}(\xi) = 0$, se réduisant à $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ pour $a_1 = \ldots = a_n = 0$.

Hermite applique ensuite ce résultat en choisissant les fonctions φ et F de la manière suivante :

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2 - 1}{2}, \qquad F(x_1, \ldots, x_n) = 1;$$

d'où

$$\mathcal{F}(\xi) = \xi - \frac{(x_1 + a_1\xi)^2 + \ldots + (x_n + a_n\xi)^2 - 1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}(a_1^2 + \ldots + a_n^2)\xi^2 - (a_1x_1 + \ldots + a_nx_n - 1)\xi - \frac{1}{2}(x_1^2 + \ldots + x_n^2 - 1).$$

En transportant dans

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\xi} = -(a_1^2 + \ldots + a_n^2)\xi - (a_1x_1 + \ldots + a_nx_n - 1),$$

la valeur de la racine ξ de l'équation $\mathcal{F}(\xi) = 0$ se réduisant à

$$\varphi = \frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2 - 1}{2},$$

pour $a_1 = \ldots = a_n = 0$, on obtient

$$\frac{1}{\frac{d\mathcal{F}}{d\xi}} = [(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n - 1)^2 + (a_1^2 + \ldots + a_n^2)(1 - x_1^2 - \ldots - x_n^2)]^{-\frac{1}{2}}.$$

(¹) Hermite n'a, en réalité (*Œuvres*, t. II, p. 328), envisagé que le cas de deux variables; c'est Didon (*Ann. Éc. Norm.*, t. V, 1868, p. 255) qui a présenté son résultat en mettant n variables, sans d'ailleurs donner une nouvelle démonstration, l'extension étant immédiate.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

D'autre part, d'après la formule (31),

$$\frac{1}{\frac{d\bar{\xi}}{d\xi}} = \sum \frac{a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}}{(1, m_1)\ldots(1, m_n)} \frac{(-1)^\mu}{2^\mu} \frac{\partial^\mu}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_n^{m_n}} [X_n^\mu];$$

comme la première expression de $\frac{1}{\frac{d\bar{\xi}}{d\xi}}$ n'est pas autre chose que la fonction génératrice des polynomes $U_{m_1,\ldots,m_n}$, Hermite en déduit sa généralisation de la formule d'Olinde Rodrigues

$$U_{m_1,\ldots,m_n} = \frac{(-1)^\mu}{2^\mu} \frac{1}{(1, m_1)\ldots(1, m_n)} \frac{\partial^\mu}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_n^{m_n}} [X_n^\mu]. \tag{30}$$

Pour parvenir à l'expression générale des polynomes $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$, nous ne nous appuierons pas sur la série de Lagrange généralisée, qui ne permet d'aboutir que par une voie détournée; cela tient à ce que la série de Lagrange qu'il faudrait envisager ici :

$$X_n^{\frac{1-s}{2}} \sum \frac{a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}}{(1, m_1)\ldots(1, m_n)} \frac{(-1)^\mu}{2^\mu} \frac{\partial^\mu}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_n^{m_n}} \left[X_n^{\mu+\frac{s-1}{2}} \right],$$

n'admet pas pour somme (comme dans le cas de $s = 1$) la fonction génératrice des polynomes $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$.

Nous emploierons une méthode élémentaire [1] qui consiste à calculer explicitement la dérivée

$$X_n^{\frac{1-s}{2}} \frac{\partial^\mu}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_n^{m_n}} \left[X_n^{\mu+\frac{s-1}{2}} \right]$$

et à rapprocher son expression (obtenue d'ailleurs par un calcul très facile) de l'expression développée (22) du polynome $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$.

Pour effectuer ce calcul, il suffit d'étendre à une fonction de n variables la formule connue qui donne la valeur de la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction dépendant de la variable x par son carré

$$\frac{d^n}{dx^n} \varphi(x^2) = (2x)^n \varphi^{(n)}(x^2) + \ldots + (2x)^{n-2j} \frac{(-n, 2j)}{(1, j)} \varphi^{(n-j)}(x^2) + \ldots$$

où $\varphi^{(k)}(x^2)$ désigne la dérivée d'ordre k de φ par rapport à x^2.

Considérons une fonction dépendant de n variables $x_1, \ldots, x_n$ par leurs carrés, soit $\Phi(x_1^2, \ldots, x_n^2)$; nous désignerons par $D_{q_1,\ldots,q_n}\Phi$, la dérivée de Φ prise q_1 fois par rapport à $x_1^2, \ldots, q_n$ fois par rapport à x_n^2. Par définition,

$$\frac{\partial^\mu \Phi}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_n^{m_n}}$$

est le coefficient de $\frac{h_1^{m_1}\ldots h_n^{m_n}}{(1, m_1)\ldots(1, m_n)}$ dans le développement de

$$\Phi[(x_1 + h_1)^2, \ldots, (x_n + h_n)^2].$$

[1] J. Kampé de Fériet, *Thèse*, p. 60.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Or

$$\Phi[(x_1+h_1)^2,\ldots,(x_n+h_n)^2]=\Phi[x_1^2+h_1(2x_1+h_1),\ldots,x_n^2+h_n(2x_n+h_n)]$$
$$=\sum\frac{h_1^{q_1}\ldots h_n^{q_n}}{(1,q_1)\ldots(1,q_n)}(2x_1+h_1)^{q_1}\ldots(2x_n+h_n)^{q_n}D_{q_1,\ldots,q_n}\Phi;$$

il est maintenant aisé d'obtenir le coefficient de $h_1^{m_1}\ldots h_n^{m_n}$ dans ce développement, ce qui nous donne l'expression suivante pour une dérivée partielle de la fonction $\Phi(x_1^2,\ldots,x_n^2)$

$$(32)\qquad \frac{\partial^\mu\Phi(x_1^2,\ldots,x_n^2)}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_n^{m_n}}=2^\mu\sum\frac{1}{2^{2j}}\frac{(-m_1,2j_1)\ldots(-m_n,2j_n)}{(1,j_1)\ldots(1,j_n)}x_1^{m_1-2j_1}\ldots x_n^{m_n-2j_n}D_{m_1-j_1,\ldots,m_n-j_n}\Phi,$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs positives des entiers $j_1,\ldots,j_n$, telles que

$$j_1\leq\frac{m_1}{2},\qquad j_n\leq\frac{m_n}{2}\qquad(j=j_1+\ldots+j_n).$$

Ce résultat étant établi, appliquons-le à la fonction

$$\Phi(x_1^2,\ldots,x_n^2)=(1-x_1^2-\ldots-x_n^2)^{\mu+\frac{s-1}{2}}=X_n^{\mu+\frac{s-1}{2}}$$

loi

$$D_{m_1-j_1,\ldots,m_n-j_n}\Phi=(-1)^{\mu+j}\frac{\left(\frac{s+1}{2},\mu\right)}{\left(\frac{s+1}{2},j\right)}X_n^{j+\frac{s-1}{2}}.$$

Donc

$$(33)\qquad \frac{\partial^\mu\left[X_n^{\mu+\frac{s+1}{2}}\right]}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_n^{m_n}}=2^\mu(-1)^\mu\left(\frac{s+1}{2},\mu\right)X_n^{\frac{s-1}{2}}$$
$$\times\sum\frac{(-1)^j}{2^{2j}}\frac{(-m_1,2j_1)\ldots(-m_n,2j_n)}{(1,j_1)\ldots(1,j_n)\left(\frac{s+1}{2},j\right)}x_1^{m_1-2j_1}\ldots x_n^{m_n-2j_n}X_n^j.$$

Si nous rapprochons cette expression du développement (22) du polynome $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$

$$(22)\qquad U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}=\frac{(s,\mu)}{(1,m_1)\ldots(1,m_n)}\sum\frac{(-1)^j}{2^{2j}}\frac{(-m_1,2j_1)\ldots(-m_n,2j_n)}{(1,j_1)\ldots(1,j_n)\left(\frac{s+1}{2},j\right)}x_1^{m_1-2j_1}\ldots x_n^{m_n-2j_n}X_n^j;$$

un simple coup d'œil jeté sur ces deux formules nous permet d'écrire

$$(34)\qquad U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}=\frac{(-1)^\mu}{2^\mu}\frac{(s,\mu)}{\left(\frac{s+1}{2},\mu\right)}\frac{X_n^{\frac{1-s}{2}}}{(1,m_1)\ldots(1,m_n)}\frac{\partial^\mu}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_n^{m_n}}\left[X_n^{\mu+\frac{s+1}{2}}\right].$$

Ce résultat général contient comme cas particuliers les diverses expressions rappelées au début du paragraphe : la formule de Jacobi pour les fonctions sphériques d'ordre supérieur ($n=1$, s quelconque), les formules d'Hermite ($n=2$, $s=1$ et $s=2$) et de Didon (n quelconque, $s=1$).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Lorsque s n'est pas un entier positif (cas qui est toujours exclu de cette étude), cette expression remarquable des polynomes $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ subsiste encore, comme l'a démontré M. Angelescu [1].

LXXXIV. — Système d'équations aux dérivées partielles vérifiées par les polynomes $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$.

Didon [2] a fait faire un pas important à l'étude des polynomes d'Hermite $U_{m,n}(x, y)$, en montrant qu'ils vérifient, de même que les polynomes $V_{m,n}(x, y)$, un système de deux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. Sa méthode est élégante; elle généralise le procédé par lequel on déduit l'équation différentielle des polynomes de Legendre de la formule d'Olinde Rodrigues; il forme d'abord un système de deux équations vérifiées par la fonction

$$P(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^{m+n};$$

puis il dérive ces équations, la première $m + 1$ fois par rapport à x et n fois par rapport à y, la deuxième m fois par rapport à x et $n + 1$ fois par rapport à y; en y remplaçant $\frac{\partial^{m+n} P}{\partial x^m \partial y^n}$ par $U_{m,n}$, il obtient les deux équations vérifiées par ce polynome. Didon a lui-même étendu sa méthode [3] aux polynomes $U_{m_1,\ldots,m_n}$.

Nous allons par le même procédé [4] former un système de n équations aux dérivées partielles vérifiées par la fonction

$$R^s_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n) = X_n^{\frac{s-1}{2}} U^s_{m_1,\ldots,m_n};$$

qui, d'après (34), a pour expression

$$R^s_{m_1,\ldots,m_n} = A \frac{\partial^\mu (X_n^\lambda)}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}},$$

en posant, pour abréger, $\lambda = \mu + \frac{s-1}{2}$ et A désignant le facteur constant

$$A = \frac{(-1)^\mu}{2^\mu} \frac{(s, \mu)}{\left(\frac{s+1}{2}, \mu\right)} \frac{1}{(1, m_1) \ldots (1, m_n)}.$$

Or la fonction X_n^λ vérifie évidemment les n identités

$$X \frac{\partial}{\partial x_j}(X_n^\lambda) = -2\lambda x_j X X_n^{\lambda-1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Dérivons l'identité de rang j, m_1 fois par rapport à $x_1, \ldots, (m_j + 1)$ fois par rapport à $x_j, \ldots, m_n$ fois par rapport à x_n; nous obtenons

$$(35) \qquad \frac{\partial^2 R}{\partial x_j^2} = -2\lambda x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left[A \frac{\partial^\mu (X_n^{\lambda-1})}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}}\right] - 2\lambda(m_j + 1)\left[A \frac{\partial^\mu (X_n^{\lambda-1})}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}}\right] \qquad (j = 1, 2, \ldots, n);$$

---

(1) Angelescu, *Thèse*, p. 78.
(2) F. Didon, *Ann. Éc. Norm.*, t. V, 1868, p. 235.
(3) *Ibid.*, p. 64.
(4) J. Kampé de Fériet, *Thèse*, p. 64.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

d'autre part, en partant de l'expression de $R^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$, nous voyons sans peine que

$$x_1\frac{\partial R}{\partial x_1}+\ldots+x_n\frac{\partial R}{\partial x_n}-(2\lambda-\mu)R=-2\lambda X_n^{\lambda-1}\frac{\partial^{\mu}(X_n^{\lambda-1})}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_n^{m_n}}.$$

En substituant cette expression dans l'équation (35), elle s'écrit

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x_j^2}=x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n}x_k\frac{\partial R}{\partial x_k}\right)-(2\lambda-\mu)R\right]+(m_j+1)\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n}x_k\frac{\partial R}{\partial x_k}\right)-(2\lambda-\mu)R\right],$$

ou, puisque $(2\lambda-\mu)=\mu+s-1$:

$$(36)\qquad \frac{\partial^2 R}{\partial x_j^2}-x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n}x_k\frac{\partial R}{\partial x_k}\right)-(\mu+s-1)R\right]-(m_j+1)\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n}x_k\frac{\partial R}{\partial x_k}\right)-(\mu+s-1)R\right]=0,$$

ou, les calculs étant développés :

$$(37)\qquad \frac{\partial^2 R}{\partial x_j^2}-x_j\left(\sum_{k=1}^{k=n}x_k\frac{\partial^2 R}{\partial x_j\,\partial x_k}\right)+(\mu+s-2)x_j\frac{\partial R}{\partial x_j}-(m_j+1)\left(\sum_{k=1}^{k=n}x_k\frac{\partial R}{\partial x_k}\right)+(m_j+1)(\mu+s-1)R=0.$$

Nous écrirons finalement *le système des n équations vérifiées par la fonction*

$$R^{s}_{m_1,\ldots,m_n}=X_n^{s-1}U^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$$

sous la forme plus condensée

$$(38)\qquad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial R}{\partial x_j}-x_j\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n}x_k\dfrac{\partial R}{\partial x_k}\right)-(\mu+s-1)R\right]\right)-m_j\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n}x_k\dfrac{\partial R}{\partial x_k}\right)-(\mu+s-1)R\right]=0\\ \qquad\qquad (j=1,2,\ldots,n).\end{array}\right.$$

Dans le cas spécial où $s=1$, d'où $R_{m_1,\ldots,m_n}=U_{m_1,\ldots,m_n}$, on retrouve le système donné par Didon pour ses polynomes

$$(39)\qquad \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial U}{\partial x_j}-x_j\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n}x_k\frac{\partial U}{\partial x_k}\right)-\mu U\right]\right)-m_j\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n}x_k\frac{\partial U}{\partial x_k}\right)-\mu U\right]=0.$$

La fonction $R^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$ vérifie encore évidemment *l'équation obtenue en faisant la somme des n équations* (38), soit

$$(40)\qquad \mu(\mu+n+s-1)R+\sum_{j=1}^{j=n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial R}{\partial x_j}-x_j\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n}x_k\frac{\partial R}{\partial x_k}\right)-(s-1)R\right]\right)=0.$$

Tandis que les n équations (38) dépendent séparément de chacun des indices $m_1,\ldots,m_n$ l'équation (40) ne dépend que de leur somme $m_1+\ldots+m_n=\mu$; *elle est donc commune à toutes les fonctions* $R^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$ *pour lesquelles* $m_1+\ldots+m_n$ *a la même valeur* μ.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Du système vérifié par la fonction $R^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ se déduit immédiatement celui du polynome $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$; il est d'une forme plus compliquée que celui de $R^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$; d'ailleurs il intervient moins fréquemment, car nous montrerons bientôt que c'est le système de $R^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ qui est étroitement lié à celui de $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ et joue avec lui un rôle symétrique.

En partant de

$$\frac{\partial R}{\partial x_j} = X_n^{\frac{s-1}{2}} \frac{\partial U}{\partial x_j} - (s-1) X_n^{\frac{s-1}{2}-1} x_j U$$

on a

$$\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k \frac{\partial R}{\partial x_k}\right) - (\mu + s - 1) R = X_n^{\frac{s-1}{2}} \left[\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k \frac{\partial U}{\partial x_k}\right) - \mu U\right] - (s-1) X_n^{\frac{s-1}{2}-1} U.$$

D'où, après quelques simplifications évidentes, le système [1] du polynome $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$:

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} &X_n \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial U}{\partial x_j} - x_j\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k \frac{\partial U}{\partial x_k}\right) - \mu U\right]\right\} - m_j X_n \left[\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k \frac{\partial U}{\partial x_k}\right) - \mu U\right] \\ &\qquad - (s-1)\left\{x_j \frac{\partial U}{\partial x_j} - x_j^2\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k \frac{\partial U}{\partial x_k}\right) - \mu U\right] - m_j U\right\} = 0 \\ &\qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right.$$

Remarquons que, pour $s = 1$, ce système se réduit effectivement au système de Didon (39), en le débarrassant de la quantité X_n qui se met alors en facteur.

Le polynome $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ vérifie, en outre, l'équation obtenue en faisant la somme des n équations (41), cette équation [qui peut aussi se déduire directement de l'équation (40)] s'écrit

$$(42)\qquad (\mu - n)(\mu + s - 1) U - \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial U}{\partial x_j} - x_j\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k \frac{\partial U}{\partial x_k}\right) + (s-1) U\right]\right\} = 0.$$

Alors que les n équations (41) dépendent séparément de chacun des indices $m_1, \ldots, m_n$ celle-ci ne contient que leur somme $\mu = m_1 + \ldots + m_n$; *elle est donc commune à tous les polynomes* $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ *de même degré* μ.

LXXXV. — Réduction des équations de la fonction $R^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ à celles de la fonction hypergéométrique F_A.

Les équations (38) peuvent aussi s'écrire

$$(43)\quad \frac{\partial^2 R}{\partial x_j^2} - x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k \frac{\partial R}{\partial x_k}\right) - (\mu + s - 1) R\right] - (m_j + 1)\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k \frac{\partial R}{\partial x_k}\right) - (\mu + s - 1) R\right] = 0.$$

Or si l'on prend les équations de la fonction $F_A(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ sous

[1] *Cf.* Angelescu, *Thèse*, p. 80.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

la forme (38-LXXIII)

$$\xi_j \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_j^2} + \gamma_j \frac{\partial F}{\partial \xi_j} - \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n} \xi_k \frac{\partial F}{\partial \xi_k}\right) + \alpha F\right] - \beta_j\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n} \xi_k \frac{\partial F}{\partial \xi_k}\right) + \alpha F\right] = 0,$$

on voit immédiatement qu'en y posant

$$\xi_1 = x_1^2, \quad \ldots, \quad \xi_n = x_n^2,$$

$$\alpha = -\frac{\mu+s-1}{2}; \quad \beta_1 = \frac{m_1+1}{2}, \quad \ldots, \quad \beta_n = \frac{m_n+1}{2}; \quad \gamma_1 = \ldots = \gamma_n = \frac{1}{2},$$

elles deviennent identiques aux équations (43).

Par conséquent *le système des n équations vérifiées par* $R^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n} = X_n^{\frac{1}{2}} U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ *se confond avec le système des n équations de la fonction hypergéométrique*

$$F_A\left(-\frac{\mu+s-1}{2}, \frac{m_1+1}{2}, \ldots, \frac{m_n+1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, x_1^2, \ldots, x_n^2\right).$$

Cette remarque avait été faite dans le cas de $s = 1$ par M. Lauricella; elle permet, en partant de l'intégrale générale du système (F_A) donnée par M. Lauricella (XXXIX), *d'écrire l'intégrale générale du système* (43) *en fonction de* 2^n *constantes arbitraires.*

LXXXVI. — Relations entre les systèmes d'équations aux dérivées partielles de la fonction $R^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ et du polynome $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$.

D'abord si l'on rapproche les équations vérifiées par la fonction $R^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$

$$(38)\quad \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial R}{\partial x_j} - x_j\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k \frac{\partial R}{\partial x_k}\right) - (\mu+s-1)R\right]\right\} - m_j\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k \frac{\partial R}{\partial x_k}\right) - (\mu+s-1)R\right] = 0,$$

de celles du polynome $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ (LXXVI)

$$(44)\quad \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial V}{\partial x_j} - x_j\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k \frac{\partial V}{\partial x_k}\right) + (\mu+n+s-1)V\right]\right\} - (m_j+1)\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k \frac{\partial V}{\partial x_k}\right) + (\mu+n+s-1)V\right] = 0,$$

la complète analogie de forme de ces deux systèmes saute aux yeux :
on passe des n équations vérifiées par le polynome $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ *aux n équations vérifiées par la fonction* $R^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ *en y remplaçant simplement* $m_1+1, \ldots, m_n+1$ *par* $-m_1, \ldots, -m_n$ *et* $s-1$ *par* $-(s-1)$.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Mais il existe entre ces deux systèmes un autre lien, mis en évidence par J. Kampé de Fériet [1] :

Les deux équations de même rang j ($j = 1, 2, \ldots, n$) des systèmes de $R^s_{m_1, \ldots, m_n}$ et de $V^s_{m_1, \ldots, m_n}$ sont adjointes [2] *l'une de l'autre.*

En effet, prenons ces équations sous leur forme développée

$$(37)\quad \frac{\partial^2 R}{\partial x_j^2} - x_j\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k \frac{\partial^2 R}{\partial x_j\, \partial x_k}\right) + (\mu + s - 2)x_j \frac{\partial R}{\partial x_j} - (m_j + 1)\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k \frac{\partial R}{\partial x_k}\right) - (m_j + 1)(\mu + s - 1)R = 0$$

et (LXXVI)

$$(45)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x_j^2} - x_j\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k \frac{\partial^2 V}{\partial x_j\, \partial x_k}\right) - (\mu + n - s)x_j \frac{\partial V}{\partial x_j} - m_j\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k \frac{\partial V}{\partial x_k}\right) + m_j(\mu + n - s - 1)V = 0.$$

L'équation adjointe de cette dernière est par définition

$$(46)\quad \frac{\partial}{\partial x_j^2}(R) - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial^2}{\partial x_j\, \partial x_k}(x_j x_k R) + (\mu + n + s)\frac{\partial}{\partial x_j}(x_j R) - m_j \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial}{\partial x_k}(x_k R) + m_j(\mu + n + s - 1)R = 0.$$

Or, en effectuant les calculs on trouve

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial}{\partial x_k}(x_k R) = nR + \sum_{k=1}^{k=n} x_k \frac{\partial R}{\partial x_k},$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial^2}{\partial x_j\, \partial x_k}(x_j x_k R) = (n + 2)x_j \frac{\partial R}{\partial x_j} + (n + 1)R + \sum_{k=1}^{k=n}\left(x_k \frac{\partial R}{\partial x_k} + x_j x_k \frac{\partial^2 R}{\partial x_j\, \partial x_k}\right).$$

En transportant ces expressions dans (46), elle devient

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x_j^2} - x_j\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k \frac{\partial^2 R}{\partial x_j\, \partial x_k}\right) + (\mu + n + s - n - 2)x_j \frac{\partial R}{\partial x_j}$$
$$- (m_j + 1)\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k \frac{\partial R}{\partial x_k}\right) + [m_j(\mu + n + s - 1) - nm_j - (n + 1) + (\mu + n + s)]R = 0.$$

En effectuant les réductions évidentes dans les coefficients de cette dernière équation, on aperçoit immédiatement qu'elle est identique à l'équation (37); ce qui démontre que l'équation (37) vérifiée par la fonction $R^s_{m_1, \ldots, m_n}$ est bien l'équation adjointe de l'équation (45) vérifiée par le polynome $V^s_{m_1, \ldots, m_n}$. Ce résultat est évidemment indépendant du rang j des deux équations choisies; les équations de $R^s_{m_1, \ldots, m_n}$ forment ainsi, avec celles de $V^s_{m_1, \ldots, m_n}$, n couples d'équations adjointes.

---

[1] J. Kampé de Fériet, *Thèse*, p. 66.

[2] Pour la définition de l'équation adjointe d'une équation aux dérivées partielles, *voir* XVIII.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Les deux équations obtenues en faisant la somme des n équations de $R^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ *et de* $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ *respectivement*

$$(40)\qquad \mu(\mu+n+s-1)R+\sum_{j=1}^{j=n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial R}{\partial x_j}-x_j\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n}x_k\frac{\partial R}{\partial x_k}\right)-(s-1)R\right]\right\}=0,$$

$$(\mu+n)(\mu+s-1)V+\sum_{j=1}^{j=n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial V}{\partial x_j}-x_j\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n}x_k\frac{\partial V}{\partial x_k}\right)+(s-1)V\right]\right\}=0$$

sont également adjointes l'une de l'autre.

Si l'on désigne par $\mathcal{A}(R)$ et $\mathcal{B}(V)$ les premiers membres de ces deux équations, on obtient facilement la relation

$$(47)\qquad V\mathcal{A}(R)-R\mathcal{B}(V)=\sum_{j=1}^{j=n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\left(V\frac{\partial R}{\partial x_j}-R\frac{\partial V}{\partial x_j}\right)-x_j\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n}x_k\left(V\frac{\partial R}{\partial x_k}-R\frac{\partial V}{\partial x_k}\right)-(s-1)VR\right]\right\}.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

CHAPITRE V.

DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION ARBITRAIRE EN SÉRIE DE POLYNOMES $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ ET $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$.

LXXXVII. — Calcul des coefficients du développement d'une fonction en série de polynomes $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$.

Grâce à l'adjonction des polynomes $U^s_{m_1,\ldots,m_n}$ au système des polynomes $V^s_{m_1,\ldots,m_n}$, nous pouvons maintenant utiliser *la méthode de Fourier* pour calculer les coefficients du développement (dans le domaine $X_n \geqq 0$) d'une fonction arbitraire en série de polynomes $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$

$$(1) \qquad F(x_1, \ldots, x_n) = \Sigma A_{m_1,\ldots,m_n} V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n).$$

En effet, pour calculer le coefficient $A_{m_1,\ldots,m_n}$, multiplions les deux membres de l'égalité (1) par

$$X_n^{\frac{s-1}{2}} U^s_{m_1,\ldots,m_n} dx_1 \ldots dx_n$$

et intégrons dans le domaine $X_n \geqq 0$. En admettant la possibilité d'intégrer terme à terme le développement qui figure au second membre (ce qui suppose implicitement sa convergence uniforme dans le domaine $X_n \geqq 0$), nous aurons à évaluer une série d'intégrales

$$\int_{(X_n \geqq 0)}^{n} X_n^{\frac{s-1}{2}} U^s_{m_1,\ldots,m_n} V^s_{q_1,\ldots,q_n} dx_1 \ldots dx_n.$$

Or, en vertu de la propriété d'orthogonalité des deux systèmes de polynomes U et V, toutes ces intégrales sont nulles sauf celle où

$$q_1 = m_1, \ldots, q_n = m_n$$

dont la valeur est donnée par la formule (13-LXXVIII).

Nous obtenons ainsi la valeur du coefficient $A_{m_1,\ldots,m_n}$ sous la forme

$$(2) \qquad \int_{(X_n \geqq 0)}^{n} X_n^{\frac{s-1}{2}} F . U^s_{m_1,\ldots,m_n} dx_1 \ldots dx_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{2\mu + n + s - 1} \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+s-1}{2}\right)} \frac{(s, \mu)}{(1, m_1)\ldots(1, m_n)} A_{m_1,\ldots,m_n}.$$

Remarquons que le facteur qui multiplie F sous le signe somme n'est pas autre chose que la fonction déjà rencontrée au paragraphe LXXXIV

$$R^s_{m_1,\ldots,m_n} = X_n^{\frac{s-1}{2}} U^s_{m_1,\ldots,m_n}.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Bien entendu, il faut faire sur cette formule la réserve, nécessaire chaque fois que l'on emploie la méthode de Fourier : c'est que la fonction F doit être telle, dans le domaine $X_n \geqq 0$, que l'intégrale du premier membre ait un sens.

Lorsque la fonction F possède des dérivées partielles, il est possible de mettre cette intégrale sous une forme souvent plus commode pour les calculs effectifs, en remplaçant le polynome $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ par son expression en fonction des dérivées de $X_n^{\mu+\frac{s-1}{2}}$.

En effet, la formule (34-LXXXIII) permet d'abord d'écrire

$$\int_{(X_n \geqq 0)}^{n} X_n^{\frac{s-1}{2}} F\, U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n} dx_1\, dx_n$$
$$= \frac{(-1)^{\mu}}{2^{\mu}} \frac{(s,\mu)}{\left(\frac{s+1}{2},\mu\right)} \frac{1}{(1,m_1)\ldots(1,m_n)} \int_{(X_n \geqq 0)}^{n} F \frac{\partial^{\mu}}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_n^{m_n}} \left[X_n^{\mu+\frac{s-1}{2}}\right] dx_1\ldots dx_n.$$

Puis une suite d'intégrations par parties (où les éléments tout intégrés, — nuls à la frontière du domaine $X_n = 0$, — disparaissent, conduit directement à cette nouvelle expression

$$(3)\qquad \int_{(X_n \geqq 0)}^{n} X^{\frac{s-1}{2}} F\, U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n} dx_1\ldots dx_n$$
$$= \frac{1}{2^{\mu}} \frac{(s,\mu)}{\left(\frac{s+1}{2},\mu\right)} \frac{1}{(1,m_1)\ldots(1,m_n)} \int_{(X_n \geqq 0)}^{n} X_n^{\mu+\frac{s-1}{2}} \frac{\partial^{\mu} F}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_n^{m_n}} dx_1\ldots dx_n,$$

la fonction F étant, bien entendu, supposée telle que, toutes les intégrales successives rencontrées au cours de la transformation et l'intégrale finale elle-même aient un sens.

En transportant cette valeur de l'intégrale dans la formule (2), on obtient ainsi le coefficient $A_{m_1,\ldots,m_n}$ sous la forme équivalente [1]

$$(4)\qquad \int_{(X_n \geqq 0)}^{n} X_n^{\mu+\frac{s-1}{2}} \frac{\partial^{\mu} F}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_n^{m_n}} dx_1\ldots dx_n = \frac{2^{\mu+1}\pi^{\frac{n}{2}}}{2\mu+n+s-1} \frac{\Gamma\left(\mu+\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+s-1}{2}\right)} A_{m_1,\ldots,m_n}.$$

Les deux expressions (2) et (4) des coefficients du développement d'une fonction arbitraire ont déjà été explicitement données :

1° Pour $n = 1$ et s quelconque, par les divers auteurs qui ont étudié les fonctions sphériques d'ordre supérieur $V_m^{(s)}(x)$;

2° Pour $n = 2$, et $s = 1$, puis $s = 2$, par Hermite [2] dans son étude des polynomes

$$V_{m,n}(x,y) = V^{(1)}_{m,n}(x,y)$$

et

$$\mathcal{V}_{m,n}(x,y) = V^{(2)}_{m,n}(x,y);$$

---

[1] J. Kampé de Fériet, *Thèse*, p. 70.

[2] Ch. Hermite, *Œuvres*, t. II, p. 325, 330 et 342.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

3° Pour n quelconque, $s = 1$ et $s = 2$, par Didon [1] dans ses recherches sur les polynomes

$$V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n)$$

et

$$\mathcal{V}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n).$$

Les formules (2) et (4) ont été étendues par M. Angelescu [2] au cas où s n'est pas un entier positif.

La relation (3) *permet d'étendre aux* $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ *une des propriétés caractéristiques des polynomes de Legendre* $V_m(x)$; à savoir que l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} P(x) V_m(x)\, dx,$$

où $P(x)$ désigne un polynome arbitraire de degré inférieur à m, est nulle.

Supposons, en effet, *que* F *soit un polynome* $P(x_1, \ldots, x_n)$ arbitraire, mais *de degré inférieur à* μ; comme

$$\frac{\partial^\mu P}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}} = 0$$

la relation (3) entraîne

$$\int_{(X_n=0)}^{n} X_n^{\frac{s-1}{2}} P\, U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}\, dx_1 \ldots dx_n = 0. \tag{5}$$

Nous aurons l'occasion de démontrer plus loin que cette propriété est caractéristique des polynomes $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$.

Au point de vue du développement d'un polynome $P(x_1, \ldots, x_n)$ *de degré* ν *en série de polynomes* $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$, *on en déduit immédiatement la conséquence suivante : ce développement est limité et il ne contient que les polynomes* $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ *dont le degré* μ *est au plus égal à* ν.

Le fait exprimé par la relation (5) permet aussi de démontrer que le système des polynomes $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ possède la même propriété d'orthogonalité que les $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ [formule (56-LXXVI)] : *l'intégrale*

$$\int_{(X_n=0)}^{n} X_n^{\frac{s-1}{2}} U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n} U'^{(s)}_{m'_1,\ldots,m'_n}\, dx_1 \ldots dx_n \tag{6}$$

n'est différente de zéro que si les polynomes étant de même degré

$$\mu = \mu'$$

tous les indices ont respectivement même parité

$$m'_1 = m_1 + 2i_1, \quad \ldots \quad m'_n = m_n + 2i_n, \quad i_1 + \ldots + i_n = 0.$$

En effet, d'après la formule (3), l'intégrale (6) se ramène à celle-ci :

$$\int_{(X_n=0)}^{n} X_n^{\mu + \frac{s}{2} - 1} \frac{\partial^\mu U^{(s)}_{m'_1,\ldots,m'_n}}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}}\, dx_1 \ldots dx_n.$$

---

[1] Didon, *Ann. Éc. Norm.*, 1868, p. 265 et 296.

[2] Angelescu, *Thèse*, p. 90.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Or, si les degrés μ et μ' des deux polynomes $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ et $U^{(s)}_{m'_1,\ldots,m'_n}$ sont différents, on peut toujours supposer que c'est μ' qui est inférieur à μ; il est alors clair que cette dernière intégrale est nulle. Si les deux polynomes sont de même degré $\mu = \mu'$, comme $U^{(s)}_{m'_1,\ldots,m'_n}$ a même parité que $x_1^{m'_1} \ldots x_n^{m'_n}$ (page 269), il est évident que la dérivée

$$\frac{\partial^\mu U^{(s)}_{m'_1,\ldots,m'_n}}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}}$$

n'est différente de zéro que si $m'_1, \ldots, m'_n$ ont respectivement même parité que $m_1, \ldots, m_n$.

La formule (3) permet aussi de retrouver très simplement le résultat fondamental relatif à la valeur de l'intégrale

$$\int_{(X_n \geqq 0)}^{n} X_n^{\frac{s-1}{2}} V^{(s)}_{q_1,\ldots,q_n} U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n} dx_1 \ldots dx_n$$

qu'elle ramène à l'intégrale

$$\frac{1}{2^\mu} \frac{(s, \mu)}{\left(\frac{s+1}{2}, \mu\right)} \frac{1}{(1, m_1)\ldots(1, m_n)} \int_{(X_n \geqq 0)}^{n} X_n^{\mu + \frac{s-1}{2}} \frac{\partial^\mu V^{(s)}_{q_1,\ldots,q_n}}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}} dx_1 \ldots dx_n.$$

Comme le terme du plus haut degré dans $V^{(s)}_{q_1,\ldots,q_n}$ est un terme en $x_1^{q_1} \ldots x_n^{q_n}$, (50-LXXVI) lorsque $q_1 + \ldots + q_n < \mu$ l'intégrale est nulle et pour

$$q_1 = m_1, \quad \ldots, \quad q_n = m_n$$

elle a pour valeur

$$\frac{(s, \mu)}{\left(\frac{s+1}{2}, \mu\right)} \frac{\left(\frac{n+s-1}{2}, \mu\right)}{(1, m_1)\ldots(1, m_n)} \int_{(X_n \geqq 0)}^{n} X_n^{\mu + \frac{s-1}{2}} dx_1 \ldots dx_n.$$

Cette dernière intégrale s'évalue aisément au moyen des fonctions Γ; en effectuant les calculs, on trouve un résultat identique à la formule (13-LXXVIII).

LXXXVIII. — Exemples de développement en série de polynomes $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$.

1° *Un polynome* $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ *s'exprime par une combinaison linéaire des polynomes* $V^{(s)}_{m'_1,\ldots,m'_n}$ *de même degré* μ.

En effet, si l'on développe le polynome donné sous la forme

$$U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n} = \Sigma A_{m'_1,\ldots,m'_n} V^{(s)}_{m'_1,\ldots,m'_n},$$

la formule (2) donne pour la valeur du coefficient $A_{m_1,\ldots,m'_n}$

$$CA_{m'_1,\ldots,m'_n} = \int_{(X_n \geqq 0)}^{n} X_n^{\frac{s-1}{2}} U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n} U^{(s)}_{m'_1,\ldots,m'_n} dx_1 \ldots dx_n.$$

Or, l'on vient de voir que cette intégrale n'est différente de zéro que si

$$m'_1 = m_1 + 2i_1 \qquad m'_n = m_n + 2i_n.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

les entiers $i_1, \ldots, i_n$ étant tels que

$$i_1 + \ldots + i_n = 0.$$

Nous pouvons donc écrire [1]

$$(7) \qquad U^{(s)}_{m_1, \ldots, m_n} = \sum_{i_1 + \ldots + i_n = 0} A_{m_1+2i_1, \ldots, m_n+2i_n} V^{(s)}_{m_1+2i_1, \ldots, m_n+2i_n}.$$

2° ***Développement du polynome homogène*** $(a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n)^\nu$.

Pour calculer les coefficients du développement

$$(a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n)^\nu = \sum_{\mu \leq \nu} A_{m_1, \ldots, m_n} V^{(s)}_{m_1, \ldots, m_n}$$

utilisons la formule (1); comme

$$\frac{\partial^\mu F}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}} = (-1)^\mu (-\nu, \mu) a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n} (a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n)^{\nu - \mu},$$

on est conduit à calculer l'intégrale

$$\int_{(X_n \geq 0)}^{n} (a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n)^\nu \, \mu X_n^{\mu + \frac{s-1}{2}} dx_1 \ldots dx_n.$$

Or, en faisant une substitution orthogonale sur les $x_1, \ldots, x_n$, cette intégrale se ramène à

$$(a_1^2 + \ldots + a_n^2)^{\frac{\nu-\mu}{2}} \int_{(X_n \geq 0)}^{n} x_1^{\nu-\mu} X_n^{\mu + \frac{s-1}{2}} dx_1 \ldots dx_n$$

qui, en effectuant les intégrations par rapport à $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2$, se réduit à son tour à celle-ci

$$\int_{-1}^{+1} x_1^{\nu-\mu} (1 - x_1^2)^{\mu + \frac{s+n}{2} - 1} dx_1.$$

Lorsque $\nu - \mu$ est impair, cette intégrale est nulle; lorsque $\nu - \mu$ est pair, elle s'exprime au moyen des fonctions Γ. Donc le développement ne contient que des polynomes $V^{(s)}_{m_1, \ldots, m_n}$ dont le degré μ a même parité que ν; on trouve, toutes réductions faites.

$$\frac{2^\mu (n+s-1)}{2\mu + n + s - 1} A_{m_1, \ldots, m_n} = (-1)^\mu \frac{(-\nu, \mu) \left(\frac{1}{2}, \frac{\nu-\mu}{2}\right)}{\left(\frac{n+s+1}{2}, \frac{\nu+\mu}{2}\right)} a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n} (a_1^2 + \ldots + a_n^2)^{\frac{\nu-\mu}{2}}$$

$$(\mu \leq \nu, \quad \nu - \mu \text{ pair}).$$

A titre de vérification, remarquons que si nous remplaçons les polynomes $V^{(s)}_{m_1, \ldots, m_n}$ par leur expression développée en $x_1, \ldots, x_n$, dans chaque polynome il y a un seul terme de degré $\mu = m_1 + \ldots + m_n$: le premier, soit

$$2^\mu \frac{\left(\frac{n+s-1}{2}, \mu\right)}{(1, m_1) \ldots (1, m_n)} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}.$$

---

[1] *Voir* dans J. Kampé de Fériet, *Thèse*, p. 85, l'expression effective des coefficients A pour $s = 1$.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Les seuls termes de degré ν dans le développement seront ainsi les premiers termes des polynomes $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ pour lesquels $\mu = \nu$. Or lorsque $\mu = \nu$ la formule générale donne

$$2^\nu \frac{n+s-1}{2\nu+n+s-1} A_{m_1,\ldots,m_n} = \frac{(-1)^\nu(-\nu,\nu)}{\left(\frac{n+s+1}{2},\nu\right)} a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}$$

ou

$$A_{m_1,\ldots,m_n} = \frac{1}{2^\nu}\frac{(1,\nu)}{\left(\frac{n+s-1}{2},\nu\right)} a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}.$$

L'ensemble des termes de degré ν dans le développement sera

$$\sum_{m_1+\ldots+m_n=\nu} \frac{1}{2^\nu}\frac{(1,\nu)}{\left(\frac{n+s-1}{2},\nu\right)} a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n} 2^\nu \frac{\left(\frac{n+s-1}{2},\nu\right)}{(1,m_1)\ldots(1,m_n)} x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}$$

ou

$$\sum_{m_1+\ldots+m_n=\nu} \frac{(1,\nu)}{(1,m_1)\ldots(1,m_n)}(a_1x_1)^{m_1}\ldots(a_nx_n)^{m_n},$$

c'est-à-dire précisément

$$(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)^\nu.$$

3° *Développement de la fonction* $e^{i(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)}$.

Pour calculer les coefficients du développement

$$e^{i(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)} = 2^{\frac{n+s-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+s-1}{2}\right)\sum A_{m_1,\ldots,m_n} V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n},$$

on peut encore utiliser avantageusement la formule (4); comme

$$\frac{\partial^\mu F}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_n^{m_n}} = i^\mu a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n} e^{i(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)};$$

cette formule donne ici

$$\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\mu+\frac{n+s-1}{2}} A_{m_1,\ldots,m_n} = \frac{i^\mu a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}}{2^{\mu+\frac{n+s-1}{2}}\Gamma\left(\mu+\frac{s+1}{2}\right)}\int_{(X_n\geq 0)}^n X_n^{\mu+\frac{s-1}{2}} e^{i(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)}\,dx_1\ldots dx_n.$$

En effectuant une substitution orthogonale sur les variables $x_1, \ldots, x_n$ l'intégrale se transforme en

$$\int_{(X_n\geq 0)}^n X_n^{\mu+\frac{s-1}{2}} e^{i\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}\,x_1}\,dx_1\ldots dx_n$$

ou, en intégrant par rapport aux variables $x_2, \ldots, x_n$,

$$\pi^{\frac{n-1}{2}}\frac{\Gamma\left(\mu+\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\mu+\frac{n+s}{2}\right)}\int_{-1}^{+1}(1-x_1^2)^{\mu+\frac{n+s}{2}-1} e^{i\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}\,x_1}\,dx_1.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

D'où

$$\frac{A_{m_1,\ldots,m_n}}{\mu+\frac{n+s-1}{2}}=\frac{i^{\mu}a_1^{m_1}\ldots a_{m_n}^{n}}{\sqrt{\pi}\,2^{\mu+\frac{n+s-1}{2}}\Gamma\left(\mu+\frac{n+s}{2}\right)}\int_{-1}^{+1}(1-x_1^2)^{\mu+\frac{n+s}{2}-1}e^{i\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}\,x_1}\,dx_1.$$

Si l'on rapproche de ce résultat l'expression classique [1] d'une fonction J_λ de Bessel sous forme d'intégrale définie

$$u^{-\lambda}J_\lambda(u)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2^\lambda\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}e^{iux}\,dx$$

on obtient immédiatement cette valeur remarquable du coefficient $A_{m_1,\ldots,m_n}$

$$A_{m_1,\ldots,m_n}=i^{\mu}\left(\mu+\frac{n+s-1}{2}\right)(a_1^2+\ldots+a_n^2)^{-\frac{1}{2}\left(\mu+\frac{n+s-1}{2}\right)}J_{\mu+\frac{n+s-1}{2}}\left(\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}\right)a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n};$$

lorsque $n=1$, ce développement a été donné notamment par Hobson [2].

LXXXIX. — Calcul des coefficients du développement d'une fonction en série de polynomes $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$.

Au lieu de développer dans le domaine $X_n\geqq 0$, une fonction arbitraire $F(x_1,\ldots,x_n)$ en série de polynomes $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$

$$(1)\qquad F(x_1,\ldots,x_n)=\Sigma A_{m_1,\ldots,m_n}V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n},$$

on peut chercher à la représenter, dans le même domaine, par une série de polynomes $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$

$$(8)\qquad F(x_1,\ldots,x_n)=\Sigma B_{m_1,\ldots,m_n}U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n).$$

La méthode de Fourier s'applique au calcul des coefficients $B_{m_1,\ldots,m_n}$ comme à celui des $A_{m_1,\ldots,m_n}$; il suffit de multiplier les deux membres de (8) par

$$X_n^{\frac{s-1}{2}}V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}dx_1\ldots dx_n$$

et de les intégrer dans le domaine $X_n\geqq 0$; en intégrant terme à terme le développement, toutes les intégrales s'annulent sauf une et l'on obtient

$$(9)\qquad \int_{(X_n\geqq 0)}^{n}X_n^{\frac{s-1}{2}}F.V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}dx_1\ldots dx_n=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{2\mu+n+s-1}\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+s-1}{2}\right)}\frac{(s,\mu)}{(1,m_1)\ldots(1,m_n)}B_{m_1,\ldots,m_n}.$$

D'ailleurs si l'on connaît déjà le développement d'une fonction $F(x_1,\ldots,x_n)$ sous la forme (1)

---

[1] *Encycl. Sc. math.*, t. II, vol. 5, fasc. 2, p. 211.

[2] E.-W. Hobson, *Proc. of the London Math. Soc.*, t. XXV, 1893, p. 59.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

il n'est pas indispensable pour la développer sous la forme (8) de calculer les intégrales de Fourier (9).

En effet dans les séries (1) et (8) les deux groupes homogènes de même degré μ doivent être équivalents

$$\sum_{m_1+\ldots+m_n=\mu} A_{m_1,\ldots,m_n} V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n} = \sum_{m_1+\ldots+m_n=\mu} B_{m_1,\ldots,m_n} U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$$

puisque les U s'expriment linéairement en fonction des V de même degré; en remplaçant les U par leur expression (7) en fonction des V, une identification permet de calculer les coefficients $A_{m_1,\ldots,m_n}$ en fonction linéaire des $B_{m_1,\ldots,m_n}$, ou réciproquement.

XC. — Relation entre le développement d'une fonction en série de polynomes $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ et la solution du problème de Dirichlet pour le domaine intérieur a une hypersphère.

La solution du problème de Dirichlet pour le domaine intérieur à l'hypersphère S

$$z_1^2+\ldots+z_{n+s+1}^2 = r^2 = 1$$

est connue; nous avons montré notamment que, dans la portion de ce domaine située sur la multiplicité linéaire à n dimensions

$$z_{n+1}=\ldots=z_{n+s+1}=0,$$

la fonction harmonique $G(z_1, \ldots, z_{n+s+1})$, se réduisant sur S à une fonction donnée $F(x_1, \ldots, x_n)$, admet le développement convergent (55-LXXVI)

$$2\pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+s-1}{2}\right)} G(z_1, \ldots, z_n, 0, \ldots, 0)$$
$$= \Sigma(2\mu+n+s-1) z_1^{m_1}\ldots z_n^{m_n} \int_{(X_n\geq 0)}^{n} X_n^{\frac{s-1}{2}} F.V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n} dx_1\ldots dx_n.$$

Supposons que la fonction $F(x_1, \ldots, x_n)$ puisse, par la méthode de Fourier, être développée dans le domaine $X_n \geq 0$ sous la forme

$$(8) \qquad F(x_1, \ldots, x_n) = \Sigma B_{m_1,\ldots,m_n} U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n).$$

En remplaçant dans le développement de $G(z_1, \ldots, z_n, 0, \ldots, 0)$ l'intégrale

$$\int_{(X_n\geq 0)}^{n} X_n^{\frac{s-1}{2}} F V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n} dx_1\ldots dx_n$$

par sa valeur (9) en fonction de $B_{m_1,\ldots,m_n}$, nous obtenons

$$(10) \qquad G(z_1, \ldots, z_n, 0, \ldots, 0) = \Sigma B_{m_1,\ldots,m_n} \frac{(s, \mu)}{(1, m_1)\ldots(1, m_n)} z_1^{m_1}\ldots z_n^{m_n}.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Si $G(z_1, \ldots, z_{n+s+1})$ *désigne la solution du problème de Dirichlet pour le domaine* $r < 1$ *avec la condition à la frontière*

$$[G(z_1, \ldots, z_{n+s+1})]_{r=1} = F(x_1, \ldots, x_n),$$

entre les coefficients des deux développements

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \Sigma B_{m_1, \ldots, m_n} U^{s}_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n), \tag{8}$$

$$G(z_1, \ldots, z_n, 0, \ldots, 0) = \Sigma K_{m_1, \ldots, m_n} z_1^{m_1} \ldots z_n^{m_n} \tag{11}$$

existe donc la relation très simple (1)

$$K_{m_1, \ldots, m_n} = \frac{(s, \mu)}{(1, m_1) \ldots (1, m_n)} B_{m_1, \ldots, m_n}. \tag{12}$$

En vertu de cette relation, l'un des deux développements étant connu, on en déduit immédiatement l'autre.

On parvient encore aisément à ce résultat, sans s'appuyer sur la formule (55-LXXVI) qui suppose connue la solution du problème de Dirichlet pour le domaine intérieur à S.

En effet, la fonction

$$\begin{aligned} G(z_1, \ldots, z_{n+s+1}) &= \Sigma B_{m_1, \ldots, m_n} r^{\mu} U^{(s)}_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n) \\ &= \Sigma B_{m_1, \ldots, m_n} V^{(s)}_{m_1, \ldots, m_n}(z_1, \ldots, z_{n+s+1}) \end{aligned} \tag{13}$$

est évidemment harmonique à l'intérieur de S et se réduit sur S à

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \Sigma B_{m_1, \ldots, m_n} U^{s}_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n).$$

Comme d'autre part [formule (9-LXXVIII)], on a

$$V^{s}_{m_1, \ldots, m_n}(z_1, \ldots, z_n, 0, \ldots, 0) = \frac{(s, \mu)}{(1, m_1) \ldots (1, m_n)} z_1^{m_1} \ldots z_n^{m_n}$$

sur la multiplicité $z_{n+1} = 0, \ldots, z_{n+s+1} = 0$, le développement (13) devient

$$G(z_1, \ldots, z_n, 0, \ldots, 0) = \Sigma B_{m_1, \ldots, m_n} \frac{(s, \mu)}{(1, m_1) \ldots (1, m_n)} z_1^{m_1} \ldots z_n^{m_n}$$

et nous retrouvons ainsi le développement (10).

La liaison mise en évidence entre les coefficients des deux développements (8) et (11) n'est intéressante, au point de vue du calcul des coefficients $B_{m_1, \ldots, m_n}$, que si l'on a su former la solution du problème de Dirichlet pour le domaine intérieur à S avec la condition

$$[G(z_1, \ldots, z_{n+s+1})]_{r=1} = F(x_1, \ldots, x_n)$$

sans utiliser la formule (55-LXXVI) dont l'emploi nécessite précisément les mêmes calculs que la formation directe des coefficients $B_{m_1, \ldots, m_n}$ par la méthode de Fourier.

---

(1) J. Kampé de Fériet, *Thèse*, p. 72 et 73.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

XCI. — Exemple de développement en série de polynomes $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$.

Pour donner un exemple, où la méthode du paragraphe précédent réussit, cherchons à construire une fonction harmonique de la forme

$$\Phi(z_1, \ldots, z_{n+s+1}) = \varphi_1(z_1)\ldots\varphi_n(z_n)\,\psi\left(\sqrt{z_{n+1}^2+\ldots+z_{n+s+1}^2}\right).$$

Les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ et ψ étant déterminées, nous calculerons le développement

$$\Phi(z_1, \ldots, z_n, 0, \ldots, 0) = \varphi_1(z_1)\ldots\varphi_n(z_n)\psi(0) = \Sigma K_{m_1,\ldots,m_n} z_1^{m_1}\ldots z_n^{m_n},$$

d'où nous tirerons, par la formule (12), le développement de la fonction

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1)\ldots\varphi_n(x_n)\,\psi(\sqrt{X_n})$$

en série de polynomes $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$.

Or, on trouve aisément que

$$\frac{1}{\varphi_1\ldots\varphi_n}\Delta^2\Phi = \left[\frac{\varphi_1''}{\varphi_1}+\ldots+\frac{\varphi_n''}{\varphi_n}\right]\psi + \frac{s}{\sqrt{z_{n+1}^2+\ldots+z_{n+s+1}^2}}\psi' + \psi''.$$

Pour que l'on ait

$$\Delta^2\Phi = 0$$

il suffit donc d'imposer aux fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi$ les conditions

$$\frac{\varphi_1''}{\varphi_1} = a_1^2, \qquad \ldots, \qquad \frac{\varphi_n''}{\varphi_n} = a_n^2$$

et

$$[a_1^2+\ldots+a_n^2]\,\psi + \frac{s}{\sqrt{z_{n+1}^2+\ldots+z_{n+s+1}^2}}\psi' + \psi'' = 0;$$

les premières conditions sont vérifiées si l'on prend

$$\varphi_1(z_1) = e^{a_1 z_1}, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n(z_n) = e^{a_n z_n};$$

soit ensuite $J_\lambda(u)$ la fonction de Bessel [1] de première espèce, posons

$$G_\lambda(u) = \Gamma(\lambda+1)\left(\frac{u}{2}\right)^{-\lambda} J_\lambda(u),$$

cette fonction vérifie l'équation

$$G_\lambda + \frac{2\lambda+1}{u}G_\lambda' + G_\lambda'' = 0$$

et l'on a

$$G_\lambda(0) = 1.$$

On peut par conséquent prendre pour ψ :

$$\psi\left(\sqrt{z_{n+1}^2+\ldots+z_{n+s+1}^2}\right) = G_{\frac{s-1}{2}}\left[A_n\sqrt{z_{n+1}^2+\ldots+z_{n+s+1}^2}\right]$$

---

[1] Voir *Encycl. Sc. math.* (édition française), t. II, vol. 5, fasc. 2.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

où

$$A_n = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}.$$

On obtient ainsi pour la fonction harmonique cherchée

$$\Phi(z_1, \ldots, z_{n+s+1}) = e^{a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n} G_{\frac{s-1}{2}}\left[A_n \sqrt{z_{n+1}^2 + \ldots + z_{n+s+1}^2}\right].$$

Sur la multiplicité $z_{n+1} = \ldots = z_{n+s+1} = 0$, on a

$$\Phi(z_1, \ldots, z_n, 0, \ldots, 0) = e^{a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n} G_{\frac{s-1}{2}}(0),$$

d'où l'on tire immédiatement le développement

$$\Phi(z_1, \ldots, z_n, 0, \ldots, 0) = \sum \frac{a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n}}{(1, m_1) \ldots (1, m_n)} z_1^{m_1} \ldots z_n^{m_n}.$$

Sur S, Φ devient égale à la fonction

$$F(x_1, \ldots, x_n) = e^{a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n} G_{\frac{s-1}{2}}\left[A_n \sqrt{X_n}\right]$$

dont on a, par la règle du paragraphe précédent, le développement sous la forme

$$(14) \qquad e^{a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n} G_{\frac{s-1}{2}}\left[A_n \sqrt{X_n}\right] = \sum \frac{a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n}}{(s, \mu)} U^{(s)}_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n),$$

que l'on peut aussi écrire en faisant réapparaître la fonction J de Bessel

$$(15) \qquad e^{a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n} J_{\frac{s-1}{2}}\left[A_n \sqrt{X_n}\right] = \left(\frac{A_n}{2}\sqrt{X_n}\right)^{\frac{s-1}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \sum \frac{a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n}}{(s, \mu)} U^{(s)}_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n).$$

Dans le cas de $n = 1$, ce développement a été donné par L. Gegenbauer [1], notamment; on peut aussi en rapprocher un résultat dû à E.-W. Hobson [2].

En remplaçant dans la relation (14), $G_{\frac{s-1}{2}}$ par son expression par l'intégrale définie classique

$$G_\lambda(u) = \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi e^{iu\cos\omega} \sin^{2\lambda}\omega \, d\omega,$$

on retrouve l'expression des polynomes $U^{(s)}_{m_1, \ldots, m_n}$ par des intégrales définies données au paragraphe LXXXII.

---

[1] L. Gegenbauer, *Monatsh. Math. Phys.*, t. 10, 1889, p. 189.

[2] E.-W. Hobson, *On Bessels Functions and Relations connecting them with Hyperspherical and Spherica Harmonics* (*Proceedings of the London Math. Soc.*, t. 25, 1893, p. 49).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

XCII. — Détermination du polynome de degré p qui approche le plus d'une fonction donnée $F(x_1, \ldots, x_n)$ dans le domaine $X_n \geq 0$.

Les polynomes $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ et $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ permettent d'étendre aux fonctions de n variables les résultats classiques de Tchebycheff sur la meilleure approximation des fonctions d'une variable par des polynomes.

Soient $F(x)$ une fonction définie dans l'intervalle $(-1, +1)$ et $P_n(x)$ un polynome de degré p; Tchebycheff prend pour mesure de l'écart entre la fonction donnée et ce polynome dans l'intervalle $(-1, +1)$ l'intégrale

$$J = \int_{-1}^{+1} [F(x) - P_p(x)]^2 \, dx. \tag{16}$$

Le polynome de degré p qui rend minima cette intégrale est (au sens de Tchebycheff) le polynome de degré p qui approche le plus de $F(x)$ dans l'intervalle $(-1, +1)$.

Or un polynome de degré p peut toujours s'exprimer linéairement au moyen des polynomes de Legendre de degré inférieur ou égal à p

$$P_p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 V_1(x) + \ldots + \alpha_p V_p(x),$$

$$\alpha_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{+1} V_k(x) P_p(x) \, dx.$$

Quand $P_p(x)$ est mis sous cette forme, l'intégrale J devient une fonction du second degré des $(p+1)$ indéterminées

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \ldots, \quad \alpha_p.$$

Pour que J soit minima, il faut choisir ces indéterminées de façon que

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_0} = \frac{\partial J}{\partial \alpha_1} = \ldots = \frac{\partial J}{\partial \alpha_p} = 0.$$

Or

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_k} = -2 \int_{-1}^{+1} V_k(x) [F(x) - P_p(x)] \, dx.$$

D'où les $(p+1)$ conditions

$$\int_{-1}^{+1} V_k(x) P_p(x) \, dx = \int_{-1}^{+1} V_k(x) F(x) \, dx \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, p). \tag{17}$$

Si ces conditions sont vérifiées, on aura effectivement un minimum de J, car on a d'autre part :

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} = 2 \int_{-1}^{+1} V_j(x) V_k(x) \, dx = 0 \qquad (k \neq j),$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \alpha_k^2} = 2 \int_{-1}^{+1} V_k(x)^2 \, dx = \frac{4}{2k+1} > 0.$$

Supposons la fonction $F(x)$ développable, par la méthode de Fourier, en série de polynomes

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

de Legendre dans l'intervalle $(-1, +1)$, soit

$$F(x) = \sum_{k=0}^{k=\infty} A_k V_k(x),$$

$$A_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{+1} V_k(x) F(x)\, dx.$$

Les conditions (17) s'écrivent donc simplement

$$\alpha_k = A_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, p),$$

d'où

$$P_p(x) = \sum_{k=0}^{k=p} A_k V_k(x).$$

Le polynome de degré p qui approche le plus d'une fonction donnée $F(x)$ dans l'intervalle $(-1, +1)$ s'obtient en limitant au terme d'indice p le développement de cette fonction en série de polynomes de Legendre.

D'une manière plus générale le polynome de degré P qui rend minima l'intégrale

$$J = \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^{\frac{s-1}{2}} [F(x) - P_p(x)]^2\, dx$$

s'obtient en limitant le développement de $F(x)$ en série de polynomes $V_n^s(x)$ au terme d'indice p; la démonstration de ce fait est identique à la précédente.

L'extension de ce résultat aux fonctions de plusieurs variables est aisée. Soit $F(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction définie dans le domaine $X_n \geq 0$; proposons-nous de déterminer le polynome de degré p, $P_p(x_1, \ldots, x_n)$ qui rend minima l'intégrale

$$J = \int_{(X_n \geq 0)}^{n} X_n^{\frac{s-1}{2}} [F(x_1, \ldots, x_n) - P_p(x_1, \ldots, x_n)]^2\, dx_1 \ldots dx_n. \tag{18}$$

Dans le cas particulier où $s = 1$, on peut dire que l'intégrale

$$J = \int_{(X_n \geq 0)}^{n} [F(x_1, \ldots, x_n) - P_p(x_1, \ldots, x_n)]^2\, dx_1 \ldots dx_n$$

mesure l'écart entre la fonction F et le polynome P_p, dans le domaine $X_n \geq 0$:

le polynome P_p qui la rend minima est le polynome de degré p qui s'écarte le moins de $F(x_1, \ldots, x_n)$ dans le domaine $X_n \geq 0$.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Un polynome de degré p peut toujours s'exprimer linéairement, sous deux formes équivalentes, au moyen des polynomes $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ ou $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ de degré inférieur ou égal à p

$$(19)\qquad P_p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{m_1+\ldots+m_n=0}^{m_1+\ldots+m_n=p} \alpha_{m_1,\ldots,m_n} V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n},$$

$$(20)\qquad P_p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{m_1+\ldots+m_n=0}^{m_1+\ldots+m_n=p} \beta_{m_1,\ldots,m_n} U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}.$$

Quand on remplace P_p par l'une ou l'autre de ces deux expressions dans l'intégrale (18), elle devient une fonction du second degré des indéterminées $\alpha_{m_1,\ldots,m_n}$ ou $\beta_{m_1,\ldots,m_n}$; pour que J soit minima, il faudra choisir les indéterminées $\alpha_{m_1,\ldots,m_n}$ (pour fixer les idées) de manière que

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_{m_1,\ldots,m_n}} = 0 \qquad (0 \leq m_1+\ldots+m_n \leq p).$$

Or

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_{m_1,\ldots,m_n}} = -2\int_{(X_n \geq 0)}^{n} X_n^{\frac{s-1}{2}} V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}[F - P_p]\, dx_1 \ldots dx_n.$$

D'où les conditions du minimum

$$(21)\qquad \int_{(X_n \geq 0)}^{n} X_n^{\frac{s-1}{2}} V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n} P_p\, dx_1 \ldots dx_n = \int_{(X_n \leq 0)}^{n} X_n^{\frac{s-1}{2}} V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n} F\, dx_1 \ldots dx_n$$
$$(0 \leq m_1+\ldots+m_n \leq p).$$

Supposons maintenant la fonction $F(x_1, \ldots, x_n)$ développable par la méthode de Fourier en série de polynomes $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ dans le domaine $X_n \geq 0$; soit

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{m_1+\ldots+m_n=0}^{m_1+\ldots+m_n=\infty} B_{m_1,\ldots,m_n} U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}.$$

Les relations (21) [si l'on se reporte à la formule (9) qui donne l'expression des coefficients du développement d'une fonction] s'écrivent donc simplement

$$\beta_{m_1,\ldots,m_n} = B_{m_1,\ldots,m_n} \qquad (0 \leq m_1+\ldots+m_n \leq p);$$

d'où

$$(21)\qquad P_p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{m_1+\ldots+m_n=0}^{m_1+\ldots+m_n=p} B_{m_1,\ldots,m_n} U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}.$$

En partant, par symétrie, du développement de $F(x_1, \ldots, x_n)$ sous la forme

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{m_1+\ldots+m_n=0}^{m_1+\ldots+m_n=\infty} A_{m_1,\ldots,m_n} V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

on obtiendrait de même pour P_p la forme, équivalente à la première,

$$(22)\qquad P_p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{m_1+\ldots+m_n=0}^{m_1+\ldots+m_n=p} A_{m_1,\ldots,m_n} V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}.$$

Le polynome de degré p qui rend minima l'intégrale J *s'obtient donc en limitant aux termes d'indices $m_1 + \ldots + m_n = p$ l'un ou l'autre des deux développements équivalents de la fonction* $F(x_1, \ldots, x_n)$ *en série de polynomes* $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ *ou* $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$.

XCIII. — Convergence des développements d'une fonction en série de polynomes $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ et $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ dans le domaine $X_n \geqq 0$.

Étant donnée une fonction $F(x_1, \ldots, x_n)$, définie dans le domaine $X_n > 0$, supposons que l'on ait pu former l'un ou l'autre des deux développements

$$(1)\qquad F(x_1, \ldots, x_n) = \Sigma A_{m_1,\ldots,m_n} V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n},$$

$$(8)\qquad F(x_1, \ldots, x_n) = \Sigma B_{m_1,\ldots,m_n} U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n},$$

les coefficients $A_{m_1,\ldots,m_n}$ ou $B_{m_1,\ldots,m_n}$ étant calculés par les formules (2) ou (9).

On est naturellement conduit à se poser les questions suivantes :

1° A quelles conditions les séries (1) ou (8) convergent-elles dans le domaine $X_n \geqq 0$; convergent-elles uniformément ?

2° Si ces séries convergent, à quelles conditions représentent-elles la fonction $F(x_1, \ldots, x_n)$ dont on est parti pour le calcul des coefficients ?

On est loin de pouvoir même esquisser une réponse générale à ces deux questions, dans l'état actuel des connaissances sur les développements d'une fonction de plusieurs variables en série de polynomes par la méthode de Fourier.

Tandis que pour le développement d'une fonction d'une variable en série de polynomes $V_n^{(s)}(x)$, et spécialement de polynomes de Legendre $V_n(x)$, des travaux approfondis (de Darboux, Heine, Burkhardt, la Vallée Poussin, Kogbetliantz, etc.) ont permis d'établir des critères extrêmement généraux de convergence et de construire des procédés de sommation de plus en plus puissants, on ne possède jusqu'à présent aucune indication un peu générale sur les conditions de convergence des séries de polynomes $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ ou $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$.

Nous devrons donc nous borner à signaler un cas, à vrai dire intéressant pour la pratique, où l'on peut affirmer la convergence du développement d'une fonction $F(x_1, \ldots, x_n)$ en série de polynomes $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$: c'est celui *où les dérivées partielles de la fonction* F *sont bornées dans leur ensemble dans le domaine* $X_n > 0$.

Supposons d'abord que l'on ait

$$(23)\qquad \left| \frac{\partial^q F}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}} \right| < H_{m_1,\ldots,m_n}.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Déterminons les coefficients $A_{m_1,\ldots,m_n}$ du développement (1) par la formule (4)

$$\frac{2^{\mu+1}\pi^{\frac{n}{2}}}{2\mu+n+s-1}\,\frac{\Gamma\left(\mu+\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+s-1}{2}\right)}\,A_{m_1,\ldots,m_n}=\int_{(X_n\geqq 0)}^{n} X_n^{\mu+\frac{s-1}{2}}\,\frac{\partial^\mu F}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_n^{m_n}}\,dx_1\ldots dx_n.$$

En vertu de la condition (23)

$$\int_{(X_n\geqq 0)}^{n} X_n^{\mu+\frac{s-1}{2}}\,\frac{\partial^\mu F}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_n^{m_n}}\,dx_1\ldots dx_n<H_{m_1,\ldots,m_n}\int_{(X_n\geqq 0)}^{n} X_n^{\mu+\frac{s-1}{2}}\,dx_1\ldots dx_n;$$

d'où, l'intégrale du second membre s'évaluant aisément,

$$\int_{(X_n\geqq 0)}^{n} X_n^{\mu+\frac{s-1}{2}}\,\frac{\partial^\mu F}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_n^{m_n}}\,dx_1\ldots dx_n<H_{m_1,\ldots,m_n}\,\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{2\mu+n+s-1}\,\frac{\Gamma\left(\mu+\frac{s+1}{2}\right)}{\left(\frac{n+s-1}{2},\,\mu\right)\Gamma\left(\frac{n+s-1}{2}\right)}.$$

Donc

$$A_{m_1,\ldots,m_n}<\frac{1}{2^\mu}\,\frac{H_{m_1,\ldots,m_n}}{\left(\frac{n+s-1}{2},\,\mu\right)}.$$

Si les dérivées sont bornées dans leur ensemble, on pourra toujours trouver un nombre H tel que

$$H_{m_1,\ldots,m_n}\leqq\frac{\left(\frac{n+s-1}{2},\,\mu\right)}{n^{\frac{\mu}{2}}}\,H;$$

d'où

$$A_{m_1,\ldots,m_n}<\frac{H}{2^\mu n^{\frac{\mu}{2}}}.$$

Par conséquent la série (1) admet comme majorante la série

$$H\sum\frac{1}{2^\mu n^{\frac{\mu}{2}}}\,V^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$$

qui s'identifie avec la fonction génératrice

$$H(1-2a_1x_1-\ldots-2a_nx_n+a_1^2+\ldots+a_n^2)^{-\frac{n+s-1}{2}}=H\Sigma a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$$

en faisant

$$a_1=a_2=\ldots=a_n=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Or, comme

$$a_1^2+\ldots+a_n^2=\frac{1}{2^2}<1,$$

le développement en série de la fonction génératrice est convergent; il en est donc *a fortiori* de même de la proposée.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

CHAPITRE VI.

LES FONCTIONS HYPERSPHÉRIQUES D'ORDRE QUELCONQUE.

XCIV. — Résultats acquis pour les fonctions hypersphériques zonales.

Nous étudierons dans ce Chapitre les fonctions hypersphériques d'ordre k quelconque $Y_\mu^{(k)}$ $(0 \leq k \leq \mu)$, dont la définition a été donnée au Chapitre II; nos notations restent celles de ce Chapitre : ainsi nous opérons dans l'espace E_{n+2} à $n+2$ dimensions, où les coordonnées rectangulaires d'un point sont désignées par $z_1, \ldots, z_{n+2}$ et ses coordonnées zonales par $r, x_1, \ldots, x_n, \varphi$.

Des résultats acquis aux Chapitres II et III se dégage la conclusion suivante :

Les fonctions hypersphériques zonales (ou d'ordre $k = 0$) sont des polynomes en $x_1, \ldots, x_n$, le nombre des fonctions zonales $Y_\mu^{(0)}(x_1, \ldots, x_n)$ d'un degré μ donné, linéairement indépendantes, est $\frac{(n, \mu)}{(1, \mu)}$.

Pour former le système des $\frac{(n, \mu)}{(1, \mu)}$ *fonctions hypersphériques zonales d'un degré* μ *donné, linéairement indépendantes, on peut prendre l'un ou l'autre des deux systèmes de polynomes*

$$V_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n) \qquad V^1_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n)$$

ou

$$U_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n) \qquad U^1_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n)$$

dont le degré $m_1 + \ldots + m_n$ *est égal à* μ.

L'un ou l'autre de ces deux systèmes [nous savons qu'ils sont équivalents, puisque nous avons démontré, (LXXXVIII-1°,) qu'un polynome U est une combinaison linéaire des polynomes V de même degré] *forme un système complet de polynomes zonaux, c'est-à-dire qu'une fonction zonale arbitraire s'exprime par une combinaison linéaire des polynomes* U *ou* V.

En effet, le polynome zonal le plus général de degré μ a pour expression

$$Z_\mu^0(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_\mu(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + (-1)^j \frac{X_n^j}{2^{2j}} \frac{\Delta^{2j}[\varphi_\mu(x_1, \ldots, x_n)]}{(1, j)^2} + \ldots,$$

φ_μ désignant un polynome homogène de degré μ entièrement arbitraire. [Cette expression se tire de la formule générale (¶¶-LXIV) en y faisant $k = 0$.]

Soit

$$\varphi_\mu = \sum_{m_1 + \ldots + m_n = \mu} a_{m_1, \ldots, m_n} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n},$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

d'où

$$\Delta^{2j}\varphi_\mu = \sum_{m_1+\ldots+m_n=\mu} a_{m_1,\ldots,m_n}\,\Delta^{2j}(x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}),$$

et par conséquent

$$Z_\mu^0 = \sum_{m_1+\ldots+m_n=\mu} a_{m_1,\ldots,m_n}\left[x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}+\ldots+(-1)^j\frac{X_n^j}{2^{2j}}\frac{\Delta^{2j}(x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n})}{(1,j)^2}+\ldots\right].$$

Si nous nous reportons maintenant à l'expression (11-LXXVIII) du polynome

$$U_{m_1,\ldots,m_n} = \frac{(1,\mu)}{(1,m_1)\ldots(1,m_n)}\left[x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}+\ldots+(-1)^j\frac{X_n^j}{2^{2j}}\frac{\Delta^{2j}(x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n})}{(1,j)^2}+\ldots\right],$$

nous voyons immédiatement que le polynome zonal arbitraire se réduit effectivement à une combinaison linéaire des polynomes U de degré μ

$$Z_\mu^0 = \sum_{m_1+\ldots+m_n=\mu} a_{m_1,\ldots,m_n}\frac{(1,m_1)\ldots(1,m_n)}{(1,\mu)}U_{m_1,\ldots,m_n}.$$

En résumé, il y a identité complète entre le système des fonctions hypersphériques zonales $Y_\mu^{(0)}(x_1,\ldots,x_n)$ *et les deux systèmes de polynomes* U *et* V, *définis par les développements*

$$[1-2a_1x_1-\ldots-2a_nx_n+a_1^2+\ldots+a_n^2]^{-\frac{n}{2}} = \Sigma\, a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n)$$

et

$$[(a_1x_1+\ldots+a_nx_n-1)^2+(a_1^2+\ldots+a_n^2)(1-x_1^2-\ldots-x_n^2)]^{-\frac{1}{2}} = \Sigma\, a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}U_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n).$$

XCV. — Expression des fonctions hypersphériques d'ordre k au moyen des polynomes $U_{m_1,\ldots,m_n}^{(k)}$.

Les fonctions hypersphériques de degré μ et d'ordre k, $Y_\mu^k(x_1,\ldots,x_n,\varphi)$, linéairement indépendantes, sont au nombre de

(45-LXIV) $$N_\mu^k = 2\frac{(n,\mu-k)}{(1,\mu-k)},$$

et nous savons qu'en posant

$$Y_\mu^k(x_1,\ldots,x_n,\varphi) = N_n^k Z_\mu^k(x_1,\ldots,x_n)e^{-ik\varphi},$$

le polynome Z_μ^k a pour expression générale

(46-LXIV) $$Z_\mu^k = \varphi_{\mu-k}(x_1,\ldots,x_n)+\ldots+(-1)^j\frac{X_n^j}{2^{2j}}\frac{\Delta^{2j}\varphi_{\mu-k}(x_1,\ldots,x_n)}{(1,j)(k+1,j)}+\ldots,$$

où $\varphi_{\mu-k}$ désigne un polynome arbitraire de degré $\mu-k$.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

De même qu'un polynome zonal $Z_\mu^{(0)}$ *s'exprime par une combinaison linéaire des polynomes* $U_{m_1,\ldots,m_n}$ *de degré* $m_1+\ldots+m_n=\mu$, *le polynome* $Z_\mu^{(k)}$ *le plus général s'exprime par une combinaison linéaire de polynomes* $U_{h_1,\ldots,h_n}^{(2k+1)}$ *dont le degré* $h_1+\ldots+h_n=\mu+k$.

Ce résultat remarquable montre que les polynomes $U_{m_1,\ldots,m_n}^{(s)}$ *(où* $s=2k+1$*) jouent dans la formation des fonctions sphériques d'ordre k quelconque exactement le même rôle que les polynomes* $U_{m_1,\ldots,m_n}$ *(pour lesquels* $s=1$*) par rapport aux fonctions sphériques zonales* ($k=0$). *Ce fait justifie à lui seul l'introduction, dans l'étude du potentiel dans l'espace à* $n+2$ *dimensions, des polynomes* $U^{(s)}$ *qui dérivent du potentiel dans l'espace à* $n+s+1$ *dimensions.*

La proposition précédente constitue l'extension aux fonctions hypersphériques de la proposition bien connue de la théorie des fonctions sphériques :

Une fonction sphérique de degré μ et d'ordre k est de la forme

$$Y_\mu^k(x,\varphi)=(1-x^2)^{\frac{k}{2}}\,U_{\mu-k}^{(2k+1)}(x)\,e^{\pm ki\varphi}.$$

C'est ainsi, d'ailleurs, que les fonctions sphériques d'ordre supérieur $U_m^{(s)}(x)$ (selon la locution de Heine), qui dérivent du potentiel dans l'espace à $s+2$ dimensions, s'introduisent d'une façon toute naturelle, parallèlement aux polynomes de Legendre, dans l'étude du potentiel de l'espace ordinaire.

La démonstration de cette proposition fondamentale est aisée; en effet le polynome homogène $\varphi_{\mu-k}$ arbitraire qui figure dans l'expression de $Z_\mu^{(k)}$ est de la forme

$$\varphi_{\mu-k}=\sum_{h_1+\ldots+h_n=\mu-k} a_{h_1,\ldots,h_n}x_1^{h_1}\ldots x_n^{h_n},$$

d'où

$$\Delta^{2j}\varphi_{\mu-k}=\sum_{h_1+\ldots+h_n=\mu-k} a_{h_1,\ldots,h_n}\Delta^{2j}(x_1^{h_1}\ldots x_n^{h_n}).$$

Par conséquent

$$(1)\qquad Z_\mu^{(k)}=\sum_{h_1+\ldots+h_n=\mu-k} a_{h_1,\ldots,h_n}\left[x_1^{h_1}\ldots x_n^{h_n}+\ldots+(-1)^j\frac{X_n^j}{2^{2j}}\frac{\Delta^{2j}(x_1^{h_1}\ldots x_n^{h_n})}{(1,j)(k+1,j)}+\ldots\right].$$

Rapprochons de ceci l'expression générale (11-LXXVIII), du polynome

$$U_{m_1,\ldots,m_n}^{(s)}=\frac{(s,\mu)}{(1,m_1)\ldots(1,m_n)}\left[x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}+\ldots+(-1)^j\frac{X_n^j}{2^{2j}}\frac{\Delta^{2j}(x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n})}{(1,j)\left(\frac{s+1}{2},j\right)}+\ldots\right];$$

un simple coup d'œil montre que la quantité entre crochets dans le développement de $Z_\mu^{(k)}$ est tout simplement, à un facteur constant près, le polynome

$$U_{h_1,\ldots,h_n}^{(2k+1)}(x_1,\ldots,x_n);$$

d'où

$$(2)\qquad Z_\mu^{(k)}=\sum_{h_1+\ldots+h_n=\mu-k} a_{m_1,\ldots,m_n}\frac{(1,h_1)\ldots(1,h_n)}{(2k+1,\mu-k)}U_{h_1,\ldots,h_n}^{(2k+1)}.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Le polynome $Z_\mu^{(k)}$ le plus général s'exprime donc effectivement par une combinaison linéaire des polynomes $U^{(2k+1)}$ de degré $\mu - k$.

En particulier, en posant

$$(3) \qquad Q^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n}(x_1,\ldots,x_n) = X_n^{\frac{k}{2}}\, U^{(2k+1)}_{h_1,\ldots,h_n}(x_1,\ldots,x_n) \qquad (h_1+\ldots+h_n=\mu-k),$$

la fonction

$$(4) \qquad Y_\mu^{(k)}(x_1,\ldots,x_n,\varphi) = Q^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n}\, e^{\pm ki\varphi}$$

est une fonction hypersphérique de degré μ et d'ordre k. D'après ce qui précède, toute fonction hypersphérique de même degré et de même ordre s'exprime par une combinaison linéaire de ces *fonctions spéciales.*

En donnant, dans ces fonctions spéciales, aux entiers positifs $h_1, \ldots, h_n$ toutes les valeurs compatibles avec la relation $h_1+\ldots+h_n=\mu-k$, on obtient le système complet des $2\frac{(n,\mu-k)}{(1,\mu-k)}$ fonctions hypersphériques de degré μ et d'ordre k linéairement indépendantes.

En effet, il y a évidemment $\frac{(n,\mu-k)}{(1,\mu-k)}$ polynomes $U^{(2k+1)}_{h_1,\ldots,h_n}$ de degré $\mu-k$ et à chaque polynome correspondent deux déterminations de $Y_\mu^{(k)}$ selon que l'on prend le signe + ou — dans $e^{\pm ki\varphi}$.

Les fonctions hypersphériques spéciales $Y_\mu^{(k)}$ de la forme (4) s'expriment au moyen des dérivées partielles de X_n sous une forme remarquable, qui généralise l'expression classique (due à Jacobi) d'une fonction sphérique

$$Y_\mu^{(k)}(x,\varphi) = (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^{\mu-k}}{dx^{\mu-k}}\left[(1-x^2)^\mu\right] e^{\pm ki\varphi}.$$

Il suffit pour le démontrer de se rappeler l'expression donnée pour $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$

$$(34\text{-LXXXIII}) \qquad U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n} = \frac{(-1)^\mu}{2^\mu}\,\frac{(s,\mu)}{\left(\frac{s+1}{2},\mu\right)}\,\frac{X_n^{\frac{1-s}{2}}}{(1,m_1)\ldots(1,m_n)}\,\frac{\partial^\mu}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_n^{m_n}}\left[X_n^{\mu+\frac{s-1}{2}}\right],$$

et l'on obtient immédiatement

$$(5) \qquad Q^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n} = \frac{(-1)^{\mu-k}}{2^{\mu-k}}\,\frac{(2k+1,\mu-k)}{(k+1,\mu-k)}\,\frac{X_n^{\frac{k}{2}}}{(1,h_1)\ldots(1,h_n)}\,\frac{\partial^{\mu-k}}{\partial x_1^{h_1}\ldots\partial x_n^{h_n}}\left[X_n^\mu\right].$$

Il est clair qu'à chacune des propositions établies au Chapitre IV au sujet des polynomes $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$, on peut immédiatement faire correspondre une propriété corrélative des fonctions hypersphériques spéciales de la forme actuellement considérée.

Nous retiendrons seulement la remarque suivante : le polynome $U^{(2k+1)}_{h_1,\ldots,h_n}$ vérifie un système de n équations aux dérivées partielles; l'équation obtenue en faisant la somme de ces

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

n équations se déduit de la formule (42-LXXXIV)

$$(6)\qquad (\mu - k + n)(\mu + k)U + \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial U}{\partial x_j} - x_j\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k \frac{\partial U}{\partial x_k}\right) + 2kU\right]\right\} = 0.$$

Or, d'autre part, une fonction d'ordre k quelconque étant mise sous la forme

$$Y_\mu^{k} = X_n^{2k} Z_\mu^{k}\, e^{+ki\varphi},$$

nous savons (50-LXV) que le polynome $Z_\mu^{(k)}$ vérifie l'équation

$$(7)\qquad (\mu + k)(\mu - k + n)Z + \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial Z}{\partial x_j} - x_j\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k \frac{\partial Z}{\partial x_k}\right) + 2kZ\right]\right\} = 0.$$

Les deux équations (6) et (7) sont identiques ; *ce fait permet donc d'interpréter l'équation obtenue en faisant la somme des n équations vérifiées par le polynome $U_{h_1,\ldots,h_n}^{(2k+1)}$: cette équation exprime simplement que la fonction*

$$X_n^{2k} U_{h_1,\ldots,h_n}^{2k+1} e^{+ki\varphi}$$

est une fonction hypersphérique de degré μ.

XCVI. — Expression des fonctions hypersphériques d'ordre k au moyen des polynomes $V_{m_1,\ldots,m_n}^{(s)}$.

Les polynomes $U_{m_1,\ldots,m_n}^{(s)}$ et $V_{m_1,\ldots,m_n}^{(s)}$ s'exprimant linéairement les uns en fonction des autres, il est clair qu'aux fonctions hypersphériques construites avec les polynomes $U_{h_1,\ldots,h_n}^{(2k+1)}$ on pourra substituer un système équivalent de fonctions hypersphériques formées avec les polynomes $V_{h_1,\ldots,h_n}^{(2k+1)}$.

Nous parviendrons directement à l'expression de ces nouvelles fonctions en partant de la généralisation de la formule d'Hobson (19-LXIX), qui donne l'expression du polynome harmonique

$$H'_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2}) = \frac{(-1)^\mu}{2^\mu\left(\frac{n}{2}, \mu\right)} r^{n+2\mu} f_\mu\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_{n+2}}\right)\frac{1}{r^n}$$

sous la forme

$$H'_\mu = f_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2}) + \ldots + \left(\frac{r^2}{2}\right)^{2j} \frac{\Delta^{2j} f_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2})}{(1, j)\left(-\frac{n}{2} - \mu + 1, j\right)} + \ldots$$

En choisissant le polynome f_μ homogène de degré μ de la manière suivante

$$(8)\qquad f_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2}) = C z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}(z_{n+1} + i z_{n+2})^k \qquad (h_1 + \ldots + h_n = \mu - k),$$

le polynome H'_μ que l'on obtient contiendra $(z_{n+1} \pm i z_{n+2})^k$ en facteur, car

$$\Delta^2[z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}(z_{n+1} + i z_{n+2})^k] = (z_{n+1} \pm i z_{n+2})^k \Delta^2(z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}),$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

puisque

$$\Delta^2[(z_{n+1} \pm i z_{n+2})^k] = 0;$$

donc d'une manière générale

$$\Delta^{2j}[z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}(z_{n+1} \pm i z_{n+2})^k] = (z_{n+1} \pm i z_{n+2})^k \Delta^{2j}(z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}).$$

Par conséquent, on trouve pour le polynome H_μ l'expression suivante :

$$(9) \qquad H'_\mu = C(z_{n+1} \pm i z_{n+2})^k \left[z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n} + \ldots + \binom{r}{2}^{2j} \frac{\Delta^{2j}(z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n})}{(1, j)\left(-\frac{n}{2} - \mu + 1, j\right)} + \ldots \right].$$

Comme ce polynome harmonique contient $(z_{n+1} \pm i z_{n+2})^k$ en facteur, la fonction hypersphérique qui s'en déduit par la relation

$$(10) \qquad H'_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2}) = r^\mu Y_\mu(x_1, \ldots, x_n, \varphi)$$

est par définition une fonction hypersphérique de degré μ et d'ordre k.

Or, de (9), on déduit immédiatement son expression

$$(11) \qquad Y_\mu^{(k)} = C X_n^{\frac{k}{2}} e^{\pm k i \varphi} \left[x_1^{h_1} \ldots x_n^{h_n} + \ldots + \frac{\Delta^{2j}(x_1^{h_1} \ldots x_n^{h_n})}{(1, j)\left(-\frac{n}{2} - \mu + 1, j\right)} + \ldots \right].$$

Si l'on en rapproche simplement l'expression générale (50-LXXVI), d'un polynome $V^{(s)}$

$$V^s_{m_1, \ldots, m_n} = 2^\mu \frac{\left(\frac{n+s-1}{2}, \mu\right)}{(1, m_1) \ldots (1, m_n)} \left[x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n} + \ldots + \frac{\Delta^{2j}(x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n})}{(1, j)\left(-\frac{n+s-3}{2} - \mu, j\right)} + \ldots \right],$$

on voit immédiatement qu'en choisissant la constante C de la manière suivante

$$C = 2^{\mu - k} \frac{\left(\frac{n}{2} + k, \mu - k\right)}{(1, h_1) \ldots (1, h_n)},$$

la fonction $Y_\mu^{(k)}$ s'exprime ainsi :

$$(12) \qquad Y_\mu^{(k)}(x_1, \ldots, x_n, \varphi) = X_n^{\frac{k}{2}} V^{2k+1}_{h_1, \ldots, h_n} e^{\pm k i \varphi} \qquad (h_1 + \ldots + h_n = \mu - k).$$

Au système complet de fonctions hypersphériques formées avec les fonctions

$$Q^{(\mu, k)}_{h_1, \ldots, h_n} = X_n^{\frac{k}{2}} U^{(2k+1)}_{h_1, \ldots, h_n}(x_1, \ldots, x_n),$$

on peut donc adjoindre le système complet équivalent formé avec les fonctions

$$(13) \qquad P^{(\mu, k)}_{h_1, \ldots, h_n} = X_n^{\frac{k}{2}} V^{(2k+1)}_{h_1, \ldots, h_n}(x_1, \ldots, x_n).$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Nous possédons ainsi deux systèmes complets constitués par les $2\binom{n,\ \mu-k}{1,\ \mu-k}$ fonctions

$$P^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n}\, e^{+ki\varphi} \qquad \text{et} \qquad P^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n}\, e^{-ki\varphi} \qquad (h_1+\ldots+h_n=\mu-k),$$

et les $2\binom{n,\ \mu-k}{1,\ \mu-k}$ fonctions

$$Q^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n}\, e^{+ki\varphi} \qquad \text{et} \qquad Q^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n}\, e^{-ki\varphi} \qquad (h_1+\ldots+h_n=\mu-k).$$

Toute fonction hypersphérique de degré μ et d'ordre k peut s'exprimer sous deux formes équivalentes au moyen de ces fonctions spéciales

$$(14)\qquad Y^{(k)}_{\mu}(x_1,\ldots,x_n,\varphi)=\sum_{h_1+\ldots+h_n=\mu-k}\left[M_{h_1,\ldots,h_n}\, e^{+ki\varphi}+M'_{h_1,\ldots,h_n}\, e^{-ki\varphi}\right]P^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n}$$

ou [1]

$$(14\ bis)\qquad Y^{(k)}_{\mu}(x_1,\ldots,x_n,\varphi)=\sum_{h_1+\ldots+h_n=\mu-k}A_{h_1,\ldots,h_n}\, P^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n}\cos k(\varphi-\varphi_{h_1,\ldots,h_n}),$$

et d'autre part

$$(15)\qquad Y^{(k)}_{\mu}(x_1,\ldots,x_n,\varphi)=\sum_{h_1+\ldots+h_n=\mu-k}\left[N_{h_1,\ldots,h_n}\, e^{+ki\varphi}+N'_{h_1,\ldots,h_n}\, e^{-ki\varphi}\right]Q^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n}$$

ou [1]

$$(15\ bis)\qquad Y^{(k)}_{\mu}(x_1,\ldots,x_n,\varphi)=\sum_{h_1+\ldots+h_n=\mu-k}B_{h_1,\ldots,h_n}\, Q^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n}\cos k(\varphi-\psi_{h_1,\ldots,h_n}),$$

chacune de ces deux expressions contenant $2\binom{n,\ \mu-k}{1,\ \mu-k}$ constantes.

De même que l'expression (5) des fonctions $Q^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n}$, au moyen des dérivées partielles de X_n généralise l'une des propriétés les plus connues des fonctions sphériques d'ordre k, il est possible de déduire les fonctions $P^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n}$ des fonctions d'ordre zéro

$$P^{(\mu,0)}_{m_1,\ldots,m_n}=V_{m_1,\ldots,m_n}$$

par une formule qui généralise l'expression classique (donnée par Jacobi) d'une fonction sphérique d'ordre k au moyen de la dérivée $k^{\text{ième}}$ d'un polynome de Legendre

$$P^{(\mu,k)}(x)=\frac{1}{2^k}\,\frac{(1-x^2)^{\frac{k}{2}}}{\left(\frac{1}{2},\ k\right)}\,\frac{d^k}{dx^k}V_{\mu}(x).$$

---

[1] On passe des deux formes équivalentes (14) à (14 *bis*) en posant

$$M_{h_1,\ldots,h_n}+M'_{h_1,\ldots,h_n}=A_{h_1,\ldots,h_n}\cos k\varphi_{h_1,\ldots,h_n}$$

et

$$i(M_{h_1,\ldots,h_n}-M'_{h_1,\ldots,h_n})=A_{h_1,\ldots,h_n}\sin k\varphi_{h_1,\ldots,h_n},$$

et par une transformation analogue des deux formes équivalentes (15) à (15 *bis*).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

En effet, on a par définition

$$P^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n} = X_n^{2\overset{k}{2}} V^{2k+1}_{h_1,\ldots,h_n}.$$

Or nous avons établi (57-LXXVI), que la dérivée partielle d'un polynome $V_{m_1,\ldots,m_n}$ a pour valeur

$$\frac{\partial^k V_{m_1,\ldots,m_n}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}} = 2^k \binom{n}{2}, k\Big) V^{2k}_{m_1-k_1,\ldots,m_n-k_n}.$$

Si donc nous assujettissons les entiers $m_1, \ldots, m_n$ et $k_1, \ldots, k_n$ aux conditions

$$(16)\qquad \begin{aligned} &m_1+\ldots+m_n=\mu, \qquad k_1+\ldots+k_n=k,\\ &m_1-k_1=h_1, \qquad \ldots, \qquad m_n-k_n=h_n, \end{aligned}$$

nous obtenons immédiatement cette expression

$$(17)\qquad P^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n} = \frac{1}{2^k}\,\frac{X_n^{2\overset{k}{2}}}{\binom{n}{2}, k)}\,\frac{\partial^k V_{m_1,\ldots,m_n}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}.$$

Cette formule généralise bien la propriété connue des fonctions sphériques, mais cependant avec une modification intéressante : elle permet, en effet, de déduire une fonction donnée $P^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n}$ de plusieurs manières différentes des polynomes $V_{m_1,\ldots,m_n}$. Ceci résulte du fait que les relations (16) liant les $2n$ entiers $m_1, \ldots, m_n, k_1, \ldots, k_n$ sont seulement au nombre de $n+1$ indépendantes (à cause de la relation $h_1+\ldots+h_n=\mu-k$ qui lie les nombres h).

Prenons un exemple concret; soit à déduire la fonction $P^{(4,2)}_{1,1}(x_1, x_2)$ d'un polynome

$$V_{m_1,m_2}(x_1, x_2);$$

nous avons les relations (dont trois indépendantes)

$$m_1+m_2=4, \qquad k_1+k_2=2, \qquad m_1-k_1=1, \qquad m_2-k_2=1;$$

d'où

$$m_2=4-m_1, \qquad k_1=m_1-1, \qquad k_2=3-m_1$$

ne sont acceptables que les valeurs de m_1 rendant m_2, k_1 k_2 entiers positifs ou nuls

$$m_1=1, \qquad m_1=2, \qquad m_1=3.$$

Donc

$$2^3(1-x_1^2-x_2^2)P^{(4,2)}_{1,1}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 V_{1,3}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 V_{2,2}}{\partial x_1\,\partial x_2} = \frac{\partial^2 V_{3,1}}{\partial x_1^2}.$$

Remarquons en passant que, — les polynomes $U_{m_1,\ldots,m_n}$ étant des combinaisons linéaires des polynomes $V_{m_1,\ldots,m_n}$ de même degré, — les fonctions $R^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n}$ déduites des U comme les $P^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n}$ le sont des V

$$(18)\qquad R^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n} = \frac{1}{2^k}\,\frac{X_n^{2\overset{k}{2}}}{\binom{n}{2}, k)}\,\frac{\partial^k U_{m_1,\ldots,m_n}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

forment aussi un système complet de fonctions hypersphériques de degré μ et d'ordre k; mais l'introduction de ce troisième système ne paraît pas apporter d'élément intéressant.

A toutes les propriétés établies aux dernières pages du Chapitre III pour les polynomes $V^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$, on peut évidemment faire correspondre une propriété des fonctions

$$P^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n} = X_n^{\frac{k}{2}} V^{2k+1}_{h_1,\ldots,h_n}.$$

Retenons seulement celle-ci; le polynome $V^{(2k+1)}_{h_1,\ldots,h_n}$ vérifie un système de n équations aux dérivées partielles; l'équation (54-LXXVI) obtenue en faisant leur somme s'écrit

$$(19)\qquad (\mu - k + n)(\mu + k)V + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial V}{\partial x_j} - x_j\left[\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k \frac{\partial V}{\partial x_k}\right) + 2kV\right]\right\} = 0.$$

Cette équation est identique à l'équation (6) vérifiée par $U^{(2k+1)}_{h_1,\ldots,h_n}$; la même remarque lui est donc applicable : c'est l'équation qui exprime que

$$X_n^{\frac{k}{2}} V^{2k+1}_{h_1,\ldots,h_n} e^{-kt\varphi}$$

est une fonction hypersphérique de degré μ.

XCVII. — Propriété d'orthogonalité des deux systèmes $P^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n}$ et $Q^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n}$. Développement d'une fonction arbitraire en série de fonctions hypersphériques.

L'intérêt de la considération simultanée des deux systèmes complets

$$P^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n} = X_n^{\frac{k}{2}} V^{2k+1}_{h_1,\ldots,h_n}$$

et

$$Q^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n} = X_n^{\frac{k}{2}} U^{2k+1}_{h_1,\ldots,h_n}$$

réside dans le fait que ces deux systèmes sont orthogonaux dans le domaine $X_n \geq 0$. Cette propriété fondamentale découle directement de la propriété d'orthogonalité démontrée au Chapitre IV pour les deux systèmes de polynomes $V^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$ et $U^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$.

Considérons, en effet, l'intégrale

$$I = \int_{(X_n \geq 0)}^{n} P^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n} Q^{(\mu,k)}_{j_1,\ldots,j_n}\, dx_1 \ldots dx_n$$
$$(h_1 + \ldots + h_n = j_1 + \ldots + j_n = \mu - k),$$

on a évidemment

$$I = \int_{(X_n \geq 0)}^{n} X_n^k V^{2k+1}_{h_1,\ldots,h_n} U^{2k+1}_{j_1,\ldots,j_n}\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Or cette intégrale s'identifie avec l'intégrale (12-LXXVIII) en faisant $s = 2k + 1$.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Par conséquent, en se basant sur ce qui a été établi pour cette dernière intégrale, on peut énoncer la proposition suivante [1] :

l'intégrale

$$(20)\qquad \int_{(X_n \geq 0)}^{n} P^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n} Q^{(\mu,k)}_{j_1,\ldots,j_n}\, dx_1 \ldots dx_n$$
$$(h_1+\ldots+h_n = j_1+\ldots+j_n = \mu - k)$$

est nulle tant que l'on n'a pas à la fois

$$h_1 = j_1, \quad \ldots \quad h_n = j_n.$$

Dans ce cas, elle a pour valeur

$$(21)\qquad \int_{(X_n \geq 0)}^{n} P^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n} Q^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n}\, dx_1 \ldots dx_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{2\mu+n} \frac{\Phi(1,k)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)} \frac{(2k+1,\ \mu-k)}{(1,h_1),\ldots(1,h_n)}.$$

De même que la propriété d'orthogonalité des deux systèmes de polynomes $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ et $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ permet le calcul, par la méthode de Fourier, des coefficients des deux développements d'une fonction $F(x_1,\ldots,x_n)$ en série de polymones $V^{(s)}$ ou $U^{(s)}$, *la propriété d'orthogonalité des deux systèmes de fonctions* $P^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n}$ *et* $Q^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n}$ *permet de calculer les coefficients du développement d'une fonction* $\Phi(x_1,\ldots,x_n,\varphi)$ *donnée arbitrairement sur l'hypersphère* S :

$$(X_n \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi)$$

en une série de fonctions hypersphériques

$$(22)\qquad \Phi(x_1,\ldots,x_n,\varphi) = \sum_{\mu=0}^{\mu=+\infty} \left[\sum_{k=0}^{k=\mu} Y^{(k)}_{\mu}(x_1,\ldots,x_n,\varphi) \right].$$

Le problème consiste, la fonction Φ étant donnée, à déterminer les

$$2\frac{(n,\ \mu-k)}{(1,\ \mu-k)}$$

constantes contenues dans la fonction hypersphérique $Y^{(k)}_{\mu}$.

Or la fonction $Y^{(k)}_{\mu}$ peut se mettre sous l'une ou l'autre des deux formes équivalentes (formules (14 *bis*) et (15 *bis*) :

$$(23)\qquad Y^{(k)}_{\mu} = \sum_{h_1+\ldots+h_n=\mu-k} A^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n} P^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n} \cos k\left(\varphi - \varphi^{\mu,k}_{h_1,\ldots,h_n}\right)$$

ou

$$(24)\qquad Y^{(k)}_{\mu} = \sum_{h_1+\ldots+h_n=\mu-k} B^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n} Q^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n} \cos k\left(\varphi - \psi^{\mu,k}_{h_1,\ldots,h_n}\right).$$

---

[1] J. Kampé de Fériet, *Thèse*, p. 98.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

En appliquant la méthode de Fourier, il est aisé de calculer les constantes qui figurent dans l'une ou l'autre expression des fonctions $Y_\mu^{(k)}$.

Pour obtenir les constantes $A_{h_1,\ldots,h_n}^{(\mu,k)}$ et $\varphi_{h_1,\ldots,h_n}^{(\mu,k)}$, multiplions les deux membres de (22) par

$$Q_{h_1,\ldots,h_n}^{(\mu,k)}(x_1,\ldots,x_n)e^{ki\varphi}\,d\varphi.dx_1\ldots dx_n;$$

puis admettons la possibilité d'intégrer terme à terme le développement du second membre dans le domaine

$$X_n \geqq 0, \qquad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi.$$

En vertu de la propriété d'orthogonalité, il n'y aura qu'une seule des intégrales figurant au second membre qui sera différente de zéro; ce qui donne

$$(25)\qquad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{(X_n \geqq 0)}^{n} \Phi Q_{h_1,\ldots,h_n}^{(\mu,k)} e^{ki\varphi}\,dx_1\ldots dx_n = CA_{h_1,\ldots,h_n}^{(\mu,k)} e^{ki\varphi_{h_1,\ldots,h_n}^{(\mu,k)}}.$$

la constante C ayant pour valeur

$$(26)\qquad \begin{cases} C = \dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}+1}}{2\mu+n}\,\dfrac{(1,k)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}\,\dfrac{(2k+1,\mu-k)}{(1,h_1)\ldots(1,h_n)} & \text{pour } k>0, \\[2ex] C = \dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}+1}}{2\mu+n}\,\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,\dfrac{(1,\mu)}{(1,h_1)\ldots(1,h_n)} & \text{pour } k=0. \end{cases}$$

La formule (25), quand on la décompose en ses parties réelle et imaginaire, donne deux équations pour déterminer les deux constantes $A_{h_1,\ldots,h_n}^{(\mu,k)}$ et $\varphi_{h_1,\ldots,h_n}^{(\mu,k)}$.

Par un calcul symétrique de celui-là, on obtient pour déterminer les constantes $B_{h_1,\ldots,h_n}^{(\mu,k)}$ et $\psi_{h_1,\ldots,h_n}^{(\mu,k)}$ la relation

$$(27)\qquad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{(X_n \geqq 0)}^{n} \Phi P_{h_1,\ldots,h_n}^{(\mu,k)} e^{ki\varphi}\,dx_1\ldots dx_n = CB_{h_1,\ldots,h_n}^{(\mu,k)} e^{ki\psi_{h_1,\ldots,h_n}^{(\mu,k)}}.$$

Une fonction $\Phi(x_1,\ldots,x_n,\varphi)$ étant donnée dans le domaine $(X_n \geqq 0,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$, les formules (25) ou (27) fournissent l'expression des coefficients de son développement en série de fonctions hypersphériques.

Dans le cas particulier où Φ ne dépend pas de φ, les intégrales (25) ou (27) où k est différent de 0 sont nulles; le développement (22) se réduit à

$$\Phi(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\mu=0}^{\mu=+\infty} Y_\mu^{(0)}(x_1,\ldots,x_n)$$

et les expressions (23) et (24) deviennent

$$Y_\mu^{(0)} = \sum_{h_1+\ldots+h_n=\mu} A_{h_1,\ldots,h_n}^{(\mu,0)} P_{h_1,\ldots,h_n}^{(\mu,0)} = \sum_{h_1+\ldots+h_n=\mu} A_{h_1,\ldots,h_n}^{(\mu,0)} V_{h_1,\ldots,h_n}(x_1,\ldots,x_n)$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

et

$$Y_\mu^0 = \sum_{h_1+\ldots+h_n=\mu} B^{(\mu,0)}_{h_1,\ldots,h_n} Q^{(\mu,0)}_{h_1,\ldots,h_n} = \sum_{h_1+\ldots+h_n=\mu} B^{(\mu,0)}_{h_1,\ldots,h_n} U_{h_1,\ldots,h_n}(x_1, \ldots, x_n).$$

Les deux développements équivalents de la fonction Φ ne contiennent plus que les polynomes zonaux $V_{m_1,\ldots,m_n}$ et $U_{m_1,\ldots,m_n}$; ils rentrent alors comme cas particuliers dans les développements étudiés au Chapitre V.

XCVIII. — Développement en série de la solution du problème de Dirichlet pour les domaines intérieur et extérieur a l'hypersphère S.

Le problème de Dirichlet pour les domaines intérieur ou extérieur à l'hypersphère S

$$z_1^2 + \ldots + z_{n+2}^2 = r^2 = 1$$

consiste (LV) à déterminer une fonction $F(z_1, \ldots, z_{n+2})$ harmonique à l'intérieur ou à l'extérieur de S et se réduisant sur S à une fonction donnée

$$[F(z_1, \ldots, z_{n+2})]_{r=1} = \Phi(x_1, \ldots, x_n, \varphi).$$

Or les résultats du paragraphe précédent permettent de calculer les coefficients qui figurent dans le développement de la fonction donnée Φ en série de fonctions hypersphériques

$$(22) \qquad \Phi(x_1, \ldots, x_n, \varphi) = \sum_{\mu=0}^{\mu=+\infty} \left[\sum_{k=0}^{k=\mu} Y_\mu^{(k)}(x_1, \ldots, x_n, \varphi) \right].$$

Les constantes qui figurent dans les fonctions $Y_\mu^{(k)}$ se calculent, dès que la fonction $\Phi(x_1, \ldots, x_n, \varphi)$ est connue, par les formules (25) ou (27).

Donc, d'après la définition même (LIX) des fonctions hypersphériques, *la solution du problème de Dirichlet pour le domaine intérieur à* S *est donnée par la série de polynomes harmoniques*

$$(29) \qquad F_i(z_1, \ldots, z_{n+2}) = \sum_{\mu=0}^{\mu=+\infty} r^\mu \left[\sum_{k=0}^{k=\mu} Y_\mu^k(x_1, \ldots, x_n, \varphi) \right]$$

et pour le domaine extérieur par la série de fonctions harmoniques

$$(30) \qquad F_e(z_1, \ldots, z_{n+2}) = \sum_{\mu=0}^{\mu=+\infty} \frac{1}{r^{n+\mu}} \left[\sum_{k=0}^{k=\mu} Y_\mu^k(x_1, \ldots, x_n, \varphi) \right].$$

Considérons notamment la valeur de la solution F_i du problème intérieur en un point M dont nous désignerons les coordonnées rectangulaires par $a_1, \ldots, a_{n+2}$ et les coordonnées zonales par $a, x'_1, \ldots, x'_n, \varphi'$:

$$a_1 = a x'_1, \quad \ldots, \quad a_n = a x'_n, \quad a_{n+1} = a\sqrt{X'_n}\cos\varphi', \quad a_{n+2} = a\sqrt{X'_n}\sin\varphi'$$
$$(X'_n = 1 - x'^2_1 - \ldots - x'^2_n);$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

la formule (29) s'écrit

$$(29\,bis)\qquad F_i(a_1, \ldots, a_{n+2}) = \sum_{\mu=0}^{\mu=+\infty} a^\mu \left[\sum_{k=0}^{k=\mu} Y_\mu'^k(x'_1, \ldots, x'_n, \varphi')\right].$$

Or, la formule (18-I.X) donne, pour la solution du problème intérieur, un développement qui s'écrit avec nos notations actuelles

$$(30)\qquad \frac{4\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} F_i(a_1, \ldots, a_{n+2}) = \sum_{\mu=0}^{\mu=+\infty} (2\mu+n) a^\mu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{(X_n \geq 0)}^{n} \Phi V_\mu^{(n)}(\cos\gamma)\, dx_1 \ldots dx_n,$$

$$\cos\gamma = x_1 x'_1 + \ldots + x_n x'_n + \sqrt{X_n}\sqrt{X'_n}\cos(\varphi - \varphi').$$

Les deux solutions (29 *bis*) et (30) du problème de Dirichlet doivent être identiques; leur rapprochement conduit à cette expression du groupe des fonctions $Y_\mu'^k$ de degré μ :

$$(31)\qquad \frac{4\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \sum_{k=0}^{k=\mu} Y_\mu'^k(x'_1, \ldots, x'_n, \varphi') = (2\mu+n) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{(X_n \geq 0)}^{n} \Phi V_\mu^{(n)}(\cos\gamma)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Effectivement cette relation est exacte : c'est une simple conséquence de la propriété fondamentale des fonctions hypersphériques exprimée par les relations (21-I XI)

$$(32)\qquad \int_S Y_\mu V_{\mu'}^{(n)}(\cos\gamma)\, d\omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{(X_n \geq 0)}^{n} Y_\mu(x_1, \ldots, x_n, \varphi) V_{\mu'}^{(n)}(\cos\gamma)\, dx_1 \ldots dx_n = 0$$

$$\text{pour } \mu \neq \mu'$$

et

$$\int_S Y_\mu V_\mu^{(n)}(\cos\gamma)\, d\omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{(X_n \geq 0)}^{n} Y_\mu(x_1, \ldots, x_n, \varphi) V_\mu^{(n)}(\cos\gamma)\, dx_1 \ldots dx_n$$

$$(33)\qquad = \frac{4\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{2\mu+n} Y_\mu(x'_1, \ldots, x'_n, \varphi').$$

Dans le deuxième membre de l'équation (31), remplaçons Φ par son développement (22),

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{(X_n \geq 0)}^{n} \Phi V_\mu^{(n)}(\cos\gamma)\, dx_1 \ldots dx_n$$
$$= \sum_{\mu'=0}^{\mu'=+\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{(X_n \geq 0)}^{n} \left[\sum_{k=0}^{k=\mu'} Y_{\mu'}^k(x_1, \ldots, x_n, \varphi)\right] V_\mu^{(n)}(\cos\gamma)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Dans ce développement, seul le terme où $\mu' = \mu$ sera, d'après (32), différent de zéro; et d'après (33), on a

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{(X_n \geq 0)}^{n} \Phi V_\mu^{(n)}(\cos\gamma)\, dx_1 \ldots dx_n = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{(X_n \geq 0)}^{n} \left[\sum_{k=0}^{k=\mu} Y_\mu^k(x_1, \ldots, x_n, \varphi)\right] V_\mu^{(n)}(\cos\gamma)\, dx_1 \ldots dx_n$$
$$= \frac{4\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{2\mu+n} \left[\sum_{k=0}^{k=\mu} Y_\mu'^k(x'_1, \ldots, x'_n, \varphi')\right],$$

résultat identique à la formule (31).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

XCIX. — Développement du polynome $V_\mu^{(n)}[x_1 x'_1 + \ldots + x_n x'_n + \sqrt{X_n}\sqrt{X'_n}\cos(\varphi - \varphi')]$.

Le polynome

$$V_\mu^{(n)}(\cos\gamma) = V_\mu^{(n)}[x_1 x'_1 + \ldots + x_n x'_n + \sqrt{X_n}\sqrt{X'_n}\cos(\varphi - \varphi')]$$

est une fonction hypersphérique de degré μ, par rapport à l'un ou l'autre des deux systèmes de variables $(x_1, \ldots, x_n, \varphi)$ et $(x'_1, \ldots, x'_n, \varphi')$; il est donc clair qu'on peut le représenter par une somme de fonctions hypersphériques spéciales de même degré μ; par exemple

$$(34) \qquad V_\mu^{(n)}(\cos\gamma) = \sum_{k=0}^{k=\mu}\left[\sum_{h_1+\ldots+h_n=\mu-k} B_{h_1,\ldots,h_n}^{(\mu,k)} Q_{h_1,\ldots,h_n}^{(\mu,k)}(x_1, \ldots, x_n)\right]\cos k(\varphi - \varphi').$$

Les coefficients de ce développement sont donnés par la formule (27)

$$CB_{h_1,\ldots,h_n}^{(\mu,k)} e^{ki\varphi'} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{(X_n=0)}^{n} V_\mu^{(n)}(\cos\gamma) P_{h_1,\ldots,h_n}^{(\mu,k)}(x_1, \ldots, x_n)\, e^{ki\varphi}\, dx_1 \ldots dx_n$$

avec

$$C = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}+1}}{2\mu+n}\,\frac{(1, k)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}\,\frac{(2k+1, \mu-k)}{(1, h_1)\ldots(1, h_n)}$$

(pour $k > 0$; pour $k = 0$, il faut doubler cette valeur de C).

Or $P_{h_1,\ldots,h_n}^{(\mu,k)}(x_1, \ldots, x_n)\, e^{ki\varphi}$ étant une fonction hypersphérique de degré μ, on a en vertu de la formule (33)

$$(35) \qquad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{(X_n=0)}^{n} V_\mu^{(n)}(\cos\gamma) P_{h_1,\ldots,h_n}^{(\mu,k)}(x_1, \ldots, x_n)\, e^{ki\varphi}\, dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \frac{4\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,\frac{1}{2\mu+n}\, P_{h_1,\ldots,h_n}^{(\mu,k)}(x'_1, \ldots, x'_n)\, e^{ki\varphi'}.$$

On en déduit immédiatement la valeur du coefficient $B_{h_1,\ldots,h_n}^{(\mu,k)}$

$$(36) \qquad B_{h_1,\ldots,h_n}^{(\mu,k)} = 2\,\frac{\left(\frac{n}{2}, k\right)}{(2k+1, \mu-k)}\,\frac{(1, h_1)\ldots(1, h_n)}{(1, k)}\, P_{h_1,\ldots,h_n}^{(\mu,k)}(x'_1, \ldots, x'_n)$$

ou

$$(36\,bis) \qquad B_{h_1,\ldots,h_n}^{(\mu,k)} = 2\,\frac{\left(\frac{n}{2}, k\right)}{(1, \mu+k)}\,\frac{(1, 2k)}{(1, k)}(1, h_1)\ldots(1, h_n)\, P_{h_1,\ldots,h_n}^{(\mu,k)}(x'_1, \ldots, x'_n)$$

(pour $k = 0$, il faut prendre la moitié de cette valeur).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Nous obtenons ainsi le développement cherché [1]

$$(37)\quad V_\mu^{(n)}(\cos\gamma) = \sum_{k=0}^{k=\mu}{}' \frac{2\binom{n}{2}, k)(1, 2k)}{(1, \mu+k)(1, k)} \times \left[\sum_{h_1 \ldots h_n = \mu - k} (1, h_1)\ldots(1, h_n) P^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n}(x'_1, \ldots, x'_n) Q^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n}(x_1, \ldots, x_n)\right] \cos k(\varphi - \varphi')$$

ou sous une forme équivalente, en se rappelant la définition des fonctions P et Q,

$$(38)\quad V_\mu^{(n)}(\cos\gamma) = \sum_{k=0}^{k=\mu}{}' \frac{2\binom{n}{2}, k)(1, 2k)}{(1, \mu+k)(1, k)} X_n^{\frac{k}{2}} X_n'^{\frac{k}{2}} \cdot \left[\sum_{h_1 \ldots h_n = \mu - k} (1, h_1)\ldots(1, h_n) V^{(2k+1)}_{h_1,\ldots,h_n}(x'_1, \ldots, x'_n) U^{(2k+1)}_{h_1,\ldots,h_n}(x_1, \ldots, x_n)\right] \cos k(\varphi - \varphi').$$

Cette formule constitue la généralisation complète de *la formule d'addition des polynomes de Legendre*, qu'on en déduit comme cas particulier, en y faisant $n = 1$,

$$\cos\gamma = xx' + \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - x'^2}\cos(\varphi - \varphi'),$$

$$V_\mu(\cos\gamma) = \sum_{k=0}^{k=\mu}{}' \frac{2\binom{1}{2}, k)(1, 2k)}{(1, \mu+k)(1, k)} (1, \mu - k)(1 - x^2)^{\frac{k}{2}}(1 - x'^2)^{\frac{k}{2}} V^{(2k+1)}_{\mu-k}(x') U^{(2k+1)}_{\mu-k}(x) \cos k(\varphi - \varphi'),$$

ou, en simplifiant, puisque

$$U^{(2k+1)}_{\mu-k}(x) = V^{(2k+1)}_{\mu-k}(x),$$

$$(39)\quad V_\mu(\cos\gamma) = \sum_{k=0}^{k=\mu}{}' \frac{\left[2^k\left(\frac{1}{2}, k\right)\right]^2}{(\mu - k + 1, 2k)} (1 - x^2)^{\frac{k}{2}}(1 - x'^2)^{\frac{k}{2}} V^{(2k+1)}_{\mu-k}(x) V^{(2k+1)}_{\mu-k}(x') \cos k(\varphi - \varphi'),$$

ou encore (en vertu de la formule rappelée au paragraphe XCVI)

$$(39')\quad V_\mu(\cos\gamma) = \sum_{k=0}^{k=\mu}{}' \frac{(1 - x^2)^{\frac{k}{2}}(1 - x'^2)^{\frac{k}{2}}}{(\mu - k + 1, 2k)} \cdot \frac{d^k V_\mu(x)}{dx^k} \cdot \frac{d^k V_\mu(x')}{dx'^k} \cos k(\varphi - \varphi');$$

ce qui est bien l'expression classique.

Les formules (37) et (38) contiennent une conséquence intéressante; les deux séries de variables $x_1, \ldots, x_n$ et $x'_1, \ldots, x'_n$ entrant symétriquement dans $V_\mu^n(\cos\gamma)$, on peut les échanger; ce qui prouve que les deux polynomes de degré $\mu - k$ en $x_1, \ldots, x_n$ et

---

[1] Le symbole Σ' signifie que, pour $k = 0$, on doit prendre la moitié du terme général.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

en $x'_1, \ldots, x'_n$

$$(40) \qquad \sum_{h_1+\ldots+h_n=\mu-k} (1, h_1)\ldots(1, h_n)\, V^{(2k+1)}_{h_1,\ldots,h_n}(x'_1, \ldots, x'_n)\, U^{(2k+1)}_{h_1,\ldots,h_n}(x_1, \ldots, x_n)$$

et

$$(40') \qquad \sum_{h_1+\ldots+h_n=\mu-k} (1, h_1)\ldots(1, h_n)\, V^{(2k+1)}_{h_1,\ldots,h_n}(x_1, \ldots, x_n)\, U^{(2k+1)}_{h_1,\ldots,h_n}(x'_1, \ldots, x'_n)$$

sont égaux ; on pourrait le vérifier d'ailleurs par un calcul direct.

C. — Développement de $[a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + i A_n \sqrt{X_n} \cos\varphi]^\mu$.

La fonction

$$F_\mu = [a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + i A_n \sqrt{X_n} \cos\varphi]^\mu \qquad (A_n = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}),$$

qui est la valeur prise sur l'hypersphère S par le polynome harmonique homogène de degré μ

$$[a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n + i A_n z_{n+1}]^\mu,$$

peut évidemment se représenter par une somme de fonctions hypersphériques spéciales de degré μ.

Pour obtenir ce développement, nous remarquerons que F_μ est le coefficient de $\frac{\lambda^\mu}{(1, \mu)}$ dans le développement de

$$\Phi = e^{\lambda[a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + i A_n \sqrt{X_n} \cos\varphi]}.$$

Or, en partant de la formule (15-XCI), le développement de cette dernière fonction est aisé à obtenir.

En effet, en vertu de la propriété connue des fonctions de Bessel

$$e^{iu\cos\varphi} = \sum_{k=0}^{k=\infty}{}' 2 J_k(u) i^k \cos k\varphi,$$

on peut d'abord écrire

$$\Phi = \sum_{k=0}^{k=+\infty}{}' 2 i^k e^{\lambda(a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n)} J_k(\lambda A_n \sqrt{X_n}) \cos k\varphi.$$

Mais la formule (15-XCI) donne précisément

$$e^{\lambda(a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n)} J_k(\lambda A_n \sqrt{X_n}) = \left(\frac{\lambda A_n}{2}\right)^k \frac{X_n^{\frac{k}{2}}}{(1, k)} \sum \lambda^h \frac{a_1^{h_1} \ldots a_n^{h_n}}{(2k+1, h)} U^{(2k+1)}_{h_1,\ldots,h_n}.$$

Donc

$$\Phi = \sum_{k=0}^{k=+\infty}{}' 2 i^k \left(\frac{\lambda A_n}{2}\right)^k \frac{X_n^{\frac{k}{2}}}{(1, k)} \left[\sum \lambda^h \frac{a_1^{h_1} \ldots a_n^{h_n}}{(2k+1, h)} U^{(2k+1)}_{h_1,\ldots,h_n}\right] \cos k\varphi.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Le coefficient de λ^k dans ce développement s'obtient aisément, ce qui donne [1]

$$(41)\qquad \left[a_1x_1+\ldots+a_nx_n+iA_n\sqrt{X_n}\cos\varphi\right]^\mu$$
$$=\sum_{k=0}^{k=\mu}{}' 2i^k\left(\frac{A_n}{2}\right)^k\frac{(1,\mu)}{(1,k)}\frac{X_n^{\frac{k}{2}}}{(2k+1,\mu-k)}\left[\sum_{h_1+\ldots+h_n=\mu-k}a_1^{h_1}\ldots a_n^{h_n}U^{(2k+1)}_{h_1,\ldots,h_n}\right]\cos k\varphi$$
$$=\sum_{k=0}^{k=\mu}{}' 2i^k\left(\frac{A_n}{2}\right)^k\frac{(1,\mu)}{(1,k)}\frac{1}{(2k+1,\mu-k)}\left[\sum_{h_1+\ldots+h_n=\mu-k}a_1^{h_1}\ldots a_n^{h_n}Q^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n}\right]\cos k\varphi,$$

ou encore, en remplaçant la fonction hypersphérique Q par son expression (5), en fonction des dérivées partielles de X_n^μ.

$$(42)\qquad 2^\mu\left[a_1x_1+\ldots+a_nx_n+iA_n\sqrt{X_n}\cos\varphi\right]^\mu$$
$$=\sum_{k=0}^{k=\mu}{}' 2i^kA_n^k\left[\sum_{h_1+\ldots+h_n=\mu-k}(-1)^{\mu-k}\frac{a_1^{h_1}\ldots a_n^{h_n}X_n^{-\frac{k}{2}}}{(1,h_1)\ldots(1,h_n)}\frac{\partial^{\mu-k}[X_n^\mu]}{\partial x_1^{h_1}\ldots\partial x_n^{h_n}}\right]\cos k\varphi.$$

Cette formule contient, comme cas particulier, la formule donnée par Jacobi [2], pour $n=1$, et classique dans la théorie des fonctions sphériques

$$2^\mu\left(x+i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi\right)^\mu=\sum_{k=0}^{k=\mu}{}' 2i^k\frac{(-1)^{\mu-k}}{(1,\mu-k)}(1-x^2)^{-\frac{k}{2}}\frac{d^{\mu-k}}{dx^{\mu-k}}\left[(1-x^2)^\mu\right]\cos k\varphi.$$

Le développement de

$$\left[a_1x_1+\ldots+a_nx_n+iA_n\sqrt{X_n}\cos\varphi\right]^\mu$$

peut aussi se déduire du développement de

$$V_\mu^{(n)}\left[x_1x'_1+\ldots+x_nx'_n+\sqrt{X_n}\sqrt{X'_n}\cos(\varphi-\varphi')\right]$$

par un artifice très simple, employé déjà par Heine [3] pour tirer la formule de Jacobi de la formule d'addition des polynomes de Legendre.

Cet artifice est basé sur la remarque suivante : le polynome $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ ne contient qu'un seul terme de degré μ, le terme

$$2^\mu\frac{\left(\frac{n+s-1}{2},\mu\right)}{(1,m_1)\ldots(1,m_n)}x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}.$$

Par conséquent

$$(43)\qquad \lim_{\lambda=\infty}\frac{1}{\lambda^\mu}V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n)=2^\mu\frac{\left(\frac{n+s-1}{2},\mu\right)}{(1,m_1)\ldots(1,m_n)}x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}.$$

---

(1) J. Kampé de Fériet, *Thèse*, p. 96.

(2) C.-G.-J. Jacobi, *J. fur reine ang. Math.*, t. 26, 1843, p. 81.

(3) Heine, *Handbuch der Kugelfunktionen* (2e édition), t. I, p. 312-313.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Ceci étant, dans le développement (38) de $V_\mu^{(n)}(\cos\gamma)$, posons

$$x'_1 = \lambda a_1, \quad \ldots, \quad x'_n = \lambda a_n, \quad \varphi' = 0 \quad (X'_n = 1 - \lambda^2 A_n^2),$$

divisons les deux membres par λ^μ et faisons tendre λ vers l'infini.

En vertu de (43), on a d'abord

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda^\mu} V_\mu^{(n)}\left[\lambda(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n) + \sqrt{X_n}\sqrt{1-\lambda^2A_n^2}\cos\varphi\right] \\
&= \lim_{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda^\mu} V_\mu^{(n)}\left[\lambda(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + iA_n\sqrt{X_n}\sqrt{1-\frac{1}{\lambda^2A_n^2}}\cos\varphi)\right] \\
&= 2^\mu \frac{\left(\frac{n}{2}, \mu\right)}{(1, \mu)}\left[a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + iA_n\sqrt{X_n}\cos\varphi\right]^\mu,
\end{aligned}$$

d'un autre côté,

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda^\mu}\left[1-\lambda^2A_n^2\right]^{\frac{k}{2}}(1, h_1)\ldots(1, h_n)V^{(2k+1)}_{h_1,\ldots,h_n}(\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n) \\
&= \lim_{\lambda=\infty} i^k A_n^k\left(1-\frac{1}{\lambda^2A_n^2}\right)^{\frac{k}{2}}(1, h_1)\ldots(1, h_n)\frac{1}{\lambda^{\mu-k}}V^{(2k+1)}_{h_1,\ldots,h_n}(\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n) \\
&= i^k A_n^k\, 2^{\mu-k}\left(\frac{n}{2}+k, \mu-k\right)a_1^{h_1}\ldots a_n^{h_n}.
\end{aligned}$$

La limite du terme général du développement (38) est donc

$$2\, i^k\left(\frac{A_n}{2}\right)^k 2^\mu \frac{\left(\frac{n}{2}, k\right)\left(\frac{n}{2}+k, \mu-k\right)}{(1, \mu+k)(1, k)}(1, 2k)X_n^{\frac{k}{2}}a_1^{h_1}\ldots a_n^{h_n}U^{(2k+1)}_{h_1,\ldots,h_n}(x_1, \ldots, x_n)$$

ou

$$2\, i^k\left(\frac{A_n}{2}\right)^k \frac{2^\mu\left(\frac{n}{2}, \mu\right)}{(2k+1, \mu-k)(1, k)}X_n^{\frac{k}{2}}a_1^{h_1}\ldots a_n^{h_n}U^{(2k+1)}_{h_1,\ldots,h_n},$$

ce qui est bien, multiplié par $2^\mu\frac{\left(\frac{n}{2}, \mu\right)}{(1, \mu)}$, le terme général du développement (41).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

CHAPITRE VII.

ÉTUDE SPÉCIALE DES POLYNOMES A DEUX VARIABLES $U_{m,n}(x,y)$ ET $V_{m,n}(x,y)$.

CI. — Rappel de quelques formules.

Au cours des Chapitres précédents, qui avaient pour but principal la formation du système complet des fonctions hypersphériques dans l'espace à $(n+2)$ dimensions, nous avons dû laisser de côté certaines propriétés des polynomes $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ et $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$, soit parce qu'elles offraient un rapport moins direct avec la théorie des fonctions harmoniques, soit parce que leur exposé en laissant n quelconque eût entraîné une trop grande complication d'écriture.

Nous allons combler ces lacunes en étudiant d'une manière spéciale les polynomes à deux variables $U_{m,n}(x, y)$ et $V_{m,n}(x, y)$; rappelons, d'abord, quelques formules générales concernant ces polynomes, éparses dans les Chapitres précédents :

1° Fonction génératrice :

$$(1)\qquad (1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-1}=\Sigma a^m b^n V_{m,n}(x,y);$$

$$(2)\qquad [(ax+by-1)^2+(a^2+b^2)(1-x^2-y^2)]^{-\frac{1}{2}}=\Sigma a^m b^n U_{m,n}(x,y).$$

2° Expression générale :

$$(3)\qquad V_{m,n}(x,y)=2^{m+n}\frac{(1,m+n)}{(1,m)(1,n)}\left[x^m y^n+\ldots+\frac{1}{2^{2j}}\frac{\Delta^{2j}(x^m y^n)}{(1,j)(-m-n,j)}+\ldots\right];$$

$$(4)\qquad U_{m,n}(x,y)=\frac{(1,m+n)}{(1,m)(1,n)}\left[x^m y^n+\ldots+\frac{(x^2+y^2-1)^j}{2^{2j}}\frac{\Delta^{2j}(x^m y^n)}{(1,j)^2}+\ldots\right].$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Tableau des premiers polynomes (jusqu'à $m + n = 4$) :

$V_{0,0} = 1,$	$U_{0,0} = 1;$
$V_{1,0} = 2x,$	$U_{1,0} = x;$
$V_{0,1} = 2y,$	$U_{0,1} = y;$
$V_{2,0} = 4x^2 - 1,$	$U_{2,0} = \frac{1}{2}(3x^2 + y^2 - 1);$
$V_{1,1} = 8xy,$	$U_{1,1} = 2xy;$
$V_{0,2} = 4y^2 - 1,$	$U_{0,2} = \frac{1}{2}(x^2 + 3y^2 - 1);$
$V_{3,0} = 8x^3 - 4x,$	$U_{3,0} = \frac{1}{2}(5x^3 + 3xy^2 - 3x);$
$V_{2,1} = 24x^2y - 4y,$	$U_{2,1} = \frac{3}{2}(3x^2y + y^3 - y);$
$V_{1,2} = 24xy^2 - 4x,$	$U_{1,2} = \frac{3}{2}(3xy^2 + x^3 - x);$
$V_{0,3} = 8y^3 - 4y,$	$U_{0,3} = \frac{1}{2}(5y^3 + 3x^2y - 3y);$
$V_{4,0} = 16x^4 - 12x^2 + 1,$	$U_{4,0} = \frac{1}{8}(35x^4 + 30x^2y^2 + 3y^4 - 30x^2 - 6y^2 + 3);$
$V_{3,1} = 64x^3y - 24xy,$	$U_{3,1} = 2(5x^3y + 3xy^3 - 3xy);$
$V_{2,2} = 96x^2y^2 - 12x^2 - 12y^2 + 2,$	$U_{2,2} = \frac{3}{4}(5x^4 + 18x^2y^2 + 5y^4 - 6x^2 - 6y^2 + 1);$
$V_{1,3} = 64xy^3 - 24xy,$	$U_{1,3} = 2(5xy^3 + 3x^3y - 3xy);$
$V_{0,4} = 16y^4 - 12y^2 + 1,$	$U_{0,4} = \frac{1}{8}(35y^4 + 30x^2y^2 + 3x^4 - 30y^2 - 6x^2 + 3).$

3° Expression du groupe homogène :

$$(5)\qquad \sum_{m+n=\mu} a^m b^n V_{m,n}(x, y) = (a^2 + b^2)^{\frac{\mu}{2}} V_\mu^{(2)}\left[\frac{ax + by}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right],$$

$$(6)\qquad \sum_{m+n=\mu} a^m b^n U_{m,n}(x, y) = [(ax + by)^2 + (a^2 + b^2)(1 - x^2 - y^2)]^{\frac{\mu}{2}} V_\mu\left[\frac{ax + by}{\sqrt{(ax + by)^2 + (a^2 + b^2)(1 - x^2 - y^2)}}\right].$$

Cas particulier remarquable, $a = 1$, $b = i\,(1 + i^2 = 0)$:

$$(5')\qquad \sum_{m+n=\mu} i^n V_{m,n}(x, y) = 2^\mu (x + iy)^\mu,$$

$$(6')\qquad \sum_{m+n=\mu} i^n U_{m,n}(x, y) = (x + iy)^\mu.$$

4° Combinaison homogène symétrique des polynomes U et V :

$$(7)\qquad \sum_{m+n=\mu} (1, m)(1, n) U_{m,n}(x, y) V_{m,n}(\xi, \eta) = \sum_{m+n=\mu} (1, m)(1, n) U_{m,n}(\xi, \eta) V_{m,n}(x, y),$$

la valeur commune de ces deux polynomes de degré μ en x, y et en ξ, η étant

$$(8)\qquad \frac{(1, \mu)}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_\mu^{(2)}\left[x\xi + y\eta + \sqrt{1 - x^2 - y^2}\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}\cos\omega\right] d\omega.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

5° Expression par des dérivées partielles :

$$(9)\qquad V_{m,n}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}},\ \frac{\eta}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}\right)=(-1)^{m+n}\frac{(1+\xi^2+\eta^2)^{\frac{m+n}{2}+1}}{(1,m)(1,n)}\frac{\partial^{m+n}}{\partial\xi^m\,\partial\eta^n}[(1+\xi^2+\eta^2)^{-1}],$$

$$(10)\qquad U_{m,n}(x,y)=\frac{(-1)^{m+n}}{2^{m+n}}\frac{1}{(1,m)(1,n)}\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n}[(1-x^2-y^2)^{m+n}].$$

6° Expression par des fonctions hypergéométriques F_3 :

$$(11)\qquad V_{m,n}(x,y)=2^{m+n}\frac{(1,m+n)}{(1,m)(1,n)}x^m y^n F_3\left(-\frac{m}{2},-\frac{n}{2},\frac{1-m}{2},\frac{1-n}{2},-m-n,\frac{1}{x^2},\frac{1}{y^2}\right),$$

$$(12)\qquad U_{m,n}(x,y)=\frac{(1,m+n)}{(1,m)(1,n)}x^m y^n F_3\left(-\frac{m}{2},-\frac{n}{2},\frac{1-m}{2},\frac{1-n}{2},1,\frac{x^2+y^2-1}{x^2},\frac{x^2+y^2-1}{y^2}\right).$$

7° Propriété d'orthogonalité :

$$(13)\qquad \iint_{(1-x^2-y^2\geqq 0)} U_{m,n}V_{p,q}\,dx\,dy=0\qquad (p\neq m,\ q\neq n).$$

$$(14)\qquad \iint_{(1-x^2-y^2\geqq 0)} U_{m,n}V_{m,n}\,dx\,dy=\frac{\pi}{m+n+1}\frac{(1,m+n)}{(1,m)(1,n)}.$$

8° Système d'équations aux dérivées partielles :

$$(15)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial V}{\partial x}-x\left(x\dfrac{\partial V}{\partial x}+y\dfrac{\partial V}{\partial y}+(m+n+2)V\right)\right]+(m+1)\left[x\dfrac{\partial V}{\partial x}+y\dfrac{\partial V}{\partial y}+(m+n+2)V\right]=0,\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial V}{\partial y}-y\left(x\dfrac{\partial V}{\partial x}+y\dfrac{\partial V}{\partial y}+(m+n+2)V\right)\right]+(n+1)\left[x\dfrac{\partial V}{\partial x}+y\dfrac{\partial V}{\partial y}+(m+n+2)V\right]=0;\end{cases}$$

$$(16)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial U}{\partial x}-x\left(x\dfrac{\partial U}{\partial x}+y\dfrac{\partial U}{\partial y}-(m+n)U\right)\right]-m\left[x\dfrac{\partial U}{\partial x}+y\dfrac{\partial U}{\partial y}-(m+n)U\right]=0,\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial U}{\partial y}-y\left(x\dfrac{\partial U}{\partial x}+y\dfrac{\partial U}{\partial y}-(m+n)U\right)\right]-n\left[x\dfrac{\partial U}{\partial x}+y\dfrac{\partial U}{\partial y}-(m+n)U\right]=0;\end{cases}$$

d'où, en développant les calculs :

$$(17)\qquad \begin{cases}(1-x^2)\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}-xy\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}-(n+3)x\dfrac{\partial V}{\partial x}+my\dfrac{\partial V}{\partial y}+m(m+n+2)V=0,\\[2ex] (1-y^2)\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}-xy\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}-(m+3)y\dfrac{\partial V}{\partial y}+nx\dfrac{\partial V}{\partial x}+n(m+n+2)V=0;\end{cases}$$

$$(18)\qquad \begin{cases}(1-x^2)\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}-xy\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}+(n-2)x\dfrac{\partial U}{\partial x}-(m+1)y\dfrac{\partial U}{\partial y}+(m+1)(m+n)U=0,\\[2ex] (1-y^2)\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}-xy\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}+(m-2)y\dfrac{\partial U}{\partial y}-(n+1)x\dfrac{\partial U}{\partial x}+(n+1)(m+n)U=0.\end{cases}$$

On passe des équations (17) aux équations (18) en y remplaçant simplement m par $-(m+1)$ et n par $-(n+1)$.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Le polynome V vérifie aussi l'équation obtenue en ajoutant les deux équations (17) :

$$(19)\quad (1-x^2)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} + (1-y^2)\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - 3\left(x\frac{\partial V}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial y}\right) + (m+n)(m+n+2)V = 0,$$

et le polynome U vérifie la somme des deux équations (18) :

$$(20)\quad (1-x^2)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + (1-y^2)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 3\left(x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y}\right) + (m+n)(m+n+2)V = 0.$$

Les deux équations (19) et (20) sont identiques; elles ne dépendent pas des indices m et n séparément, mais seulement de $m+n$; elles sont donc vérifiées indistinctement par tous les polynomes $U_{m,n}$ et $V_{m,n}$ de même degré $(m+n)$.

Désignons par $\mathcal{A}_1(U)$, $\mathcal{A}_2(U)$, $\mathcal{A}(U) = \mathcal{A}_1(U) + \mathcal{A}_2(U)$ les premiers membres respectivement des équations (18^1), (18^2) et (20) et par $\mathcal{B}_1(V)$, $\mathcal{B}_2(V)$, $\mathcal{B}(V) = \mathcal{B}_1(V) + \mathcal{B}_2(V)$ les premiers membres des équations (17^1), (17^2) et (19).

Les équations

$$\mathcal{A}_1(U) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_1(V) = 0,$$
$$\mathcal{A}_2(U) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_2(V) = 0,$$
$$\mathcal{A}(U) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{B}(V) = 0$$

sont respectivement adjointes l'une à l'autre.

Entre ces équations adjointes, on a les identités :

$$\begin{aligned}
V\mathcal{A}_1(U) - U\mathcal{B}_1(V) \equiv{}& \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\left(V\frac{\partial U}{\partial x} - U\frac{\partial V}{\partial x}\right) - xy\left(V\frac{\partial U}{\partial y} - U\frac{\partial V}{\partial y}\right)\right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial x}\left[xU\left(nV - y\frac{\partial V}{\partial y}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[yU\left(mV - x\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right], \\
V\mathcal{A}_2(U) - U\mathcal{B}_2(V) \equiv{}& \frac{\partial}{\partial y}\left[(1-y^2)\left(V\frac{\partial U}{\partial y} - U\frac{\partial V}{\partial y}\right) - xy\left(V\frac{\partial U}{\partial x} - U\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial y}\left[yU\left(mV - x\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[xU\left(nV - y\frac{\partial V}{\partial y}\right)\right], \\
V\mathcal{A}(U) - U\mathcal{B}(V) \equiv{}& \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\left(V\frac{\partial U}{\partial x} - U\frac{\partial V}{\partial x}\right) - xy\left(V\frac{\partial U}{\partial y} - U\frac{\partial V}{\partial y}\right)\right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial y}\left[(1-y^2)\left(V\frac{\partial U}{\partial y} - U\frac{\partial V}{\partial y}\right) - xy\left(V\frac{\partial U}{\partial x} - U\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right].
\end{aligned}$$

9° Expression par des fonctions hypergéométriques F_2.

Le système des équations aux dérivées partielles (17) vérifiées par le polynome $V_{m,n}$ s'identifie avec le système de la fonction

$$F_2\left(\frac{m+n}{2}+1, -\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x^2, y^2\right).$$

De même le système (18) du polynome $U_{m,n}$ est identique à celui de la fonction

$$F_2\left(-\frac{m+n}{2}, \frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x^2, y^2\right).$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Comme l'intégrale générale du système de la fonction F_2 est connue, on déduit de la remarque qui précède l'intégrale des systèmes vérifiés par les polynomes $U_{m,n}$ et $V_{m,n}$ sous la forme d'une somme de quatre fonctions F_2.

On a d'abord pour l'intégrale générale du système V :

$$(21)\qquad \begin{aligned} V(x,y) = {} & A\, F_2\left(\frac{m+n}{2}+1, -\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x^2, y^2\right) \\ & + Bx\, F_2\left(\frac{m+n+1}{2}+1, \frac{1-m}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, x^2, y^2\right) \\ & + Cy\, F_2\left(\frac{m+n+1}{2}+1, -\frac{m}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x^2, y^2\right) \\ & + Dxy\, F_2\left(\frac{m+n}{2}+2, \frac{1-m}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, x^2, y^2\right). \end{aligned}$$

Or parmi les quatre intégrales particulières du système V, il y en a toujours, quelle que soit la parité de m et n, une et une seule qui est un polynome. Cette remarque conduit à de nouvelles expressions du polynome $V_{m,n}$ o données selon les puissances ascendantes de x et y :

α. m et n pairs,

$$V_{m,n} = (-1)^{\frac{m+n}{2}} \frac{\left(1, \frac{m+n}{2}\right)}{\left(1, \frac{m}{2}\right)\left(1, \frac{n}{2}\right)} F_2\left(\frac{m+n}{2}+1, -\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x^2, y^2\right);$$

β. m impair, n pair,

$$V_{m,n} = (-1)^{\frac{m+n-1}{2}} 2 \frac{\left(1, \frac{m+n+1}{2}\right)}{\left(1, \frac{m-1}{2}\right)\left(1, \frac{n}{2}\right)} x F_2\left(\frac{m+n+1}{2}+1, \frac{1-m}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, x^2, y^2\right);$$

γ. m pair, n impair,

$$V_{m,n} = (-1)^{\frac{m+n-1}{2}} 2 \frac{\left(1, \frac{m+n+1}{2}\right)}{\left(1, \frac{m}{2}\right)\left(1, \frac{n-1}{2}\right)} y F_2\left(\frac{m+n+1}{2}+1, -\frac{m}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x^2, y^2\right);$$

δ. m et n impairs,

$$V_{m,n} = (-1)^{\frac{m+n}{2}-1} 2^2 \frac{\left(1, \frac{m+n}{2}+1\right)}{\left(1, \frac{m-1}{2}\right)\left(1, \frac{n-1}{2}\right)} xy F_2\left(\frac{m+n}{2}+2, \frac{1-m}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, x^2, y^2\right).$$

On a ensuite, pour l'intégrale générale du système U,

$$(22)\qquad \begin{aligned} U(x,y) = {} & A\, F_2\left(-\frac{m+n}{2}, \frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x^2, y^2\right) \\ & + Bx\, F_2\left(-\frac{m+n-1}{2}, \frac{m}{2}+1, \frac{n+1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, x^2, y^2\right) \\ & + Cy\, F_2\left(-\frac{m+n-1}{2}, \frac{m+1}{2}, \frac{n}{2}+1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x^2, y^2\right) \\ & + Dxy\, F_2\left(-\frac{m+n}{2}+1, \frac{m}{2}+1, \frac{n}{2}+1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, x^2, y^2\right). \end{aligned}$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Parmi les quatre intégrales particulières du système U, il y en a toujours deux qui sont des polynomes, quelle que soit la parité de m et de n; par exemple si m et n sont pairs, la première et la quatrième fonction F_2 se réduisent à un polynome comme ayant leur élément α égal à un entier négatif.

CII — Détermination de l'intégrale générale du système d'équations aux dérivées partielles du polynome $U_{m,n}$.

Pour connaître l'intégrale générale du système vérifié par le polynome $U_{m,n}$, il suffit, comme nous venons de le voir, d'en déterminer quatre intégrales particulières indépendantes; nous connaissons déjà une intégrale particulière : le polynome $U_{m,n}$; Didon [1] a déterminé les trois autres, en suivant une méthode que nous allons reproduire en la simplifiant.

Par une élégante remarque, il ramène d'abord l'intégration du système (18) à celle d'un autre système plus simple, ne dépendant plus de m et n séparément, mais seulement de $m + n = \mu$.

On se rappelle que, pour obtenir les équations (18), nous sommes partis de l'expression (10) du polynome d'Hermite

$$U_{m,n} = \frac{(-1)^{m+n}}{2^{m+n}} \frac{1}{(1, m)(1, n)} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [(1 - x^2 - y^2)^{m+n}].$$

Or, on vérifie aisément que la fonction

$$P(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^\mu \qquad (\mu = m + n) \tag{23}$$

satisfait aux deux équations

$$\left\{\begin{aligned} &(1 - x^2)\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - xy\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y} + 2(\mu - 1)x\frac{\partial P}{\partial x} - y\frac{\partial P}{\partial y} + 2\mu P = 0, \\ &(1 - y^2)\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - xy\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y} + 2(\mu - 1)y\frac{\partial P}{\partial y} - x\frac{\partial P}{\partial x} + 2\mu P = 0. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

En dérivant ces équations m fois par rapport à x et n fois par rapport à y, puis en posant

$$U = \frac{\partial^{m+n} P}{\partial x^m \partial y^n}, \tag{25}$$

on retrouve identiquement les équations (18). *Cette remarque de Didon ramène l'intégration du système* (18) *à celle du système* (24), puisque si l'on a déterminé l'intégrale générale de (24)

$$P(x, y) = C_1 P_1 + C_2 P_2 + C_3 P_3 + C_4 P_4,$$

on en déduit immédiatement l'intégrale générale de (18) sous la forme

$$U(x, y) = C_1 \frac{\partial^{m+n} P_1}{\partial x^m \partial y^n} + C_2 \frac{\partial^{m+n} P_2}{\partial x^m \partial y^n} + C_3 \frac{\partial^{m+n} P_3}{\partial x^m \partial y^n} + C_4 \frac{\partial^{m+n} P_4}{\partial x^m \partial y^n}.$$

---

[1] Didon, *Ann. Éc. Norm.*, t. V, p. 235, et t. VI, p. 7.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Or nous connaissons déjà une intégrale particulière de (24)

$$P_1 = \frac{(-1)^{m+n}}{2^{m+n}} \frac{1}{(1, m)(1, n)} (1 - x^2 - y^2)^{\mu},$$

l'intégrale de (18) qui lui correspond est le polynome $U_{m,n}$.

Par des calculs, à vrai dire, un peu laborieux, Didon a réussi à déterminer trois autres intégrales indépendantes de (24); il a notamment mis en évidence qu'une de ces intégrales, soit P_2, est, comme P_1, un polynome de degré 2μ; la forme des deux dernières P_3 et P_4 est plus compliquée.

L'ensemble de ces résultats paraîtra plus clair, si on les rapproche de ceux qu'une méthode identique fournit pour l'équation classique des polynomes de Legendre $V_n(x)$

$$(18\,bis) \qquad (1 - x^2)\frac{d^2V}{dx^2} - 2x\frac{dV}{dx} + n(n+1)V = 0.$$

Cette équation peut se déduire de l'équation

$$(24\,bis) \qquad (1 - x^2)\frac{d^2P'}{dx^2} + 2(n-1)x\frac{dP'}{dx} + 2nP' = 0$$

en la dérivant n fois et en posant

$$V(x) = \frac{d^nP'}{dx^n}.$$

Or (24 *bis*) admet l'intégrale

$$P'_1(x) = (1 - x^2)^n$$

à laquelle correspond pour (18 *bis*) (à un facteur constant près) le polynome de Legendre; mais (24 *bis*) admet la deuxième intégrale

$$P'_2(x) = 2(1 - x^2)^n \int_0^x \frac{du}{(1 - u^2)^{n+1}}$$

ou, en posant $u = \sqrt{s}\,x$,

$$P_2(x) = (1 - x^2)^n x \int_0^1 s^{-\frac{1}{2}}(1 - sx^2)^{-n+1}\,ds;$$

cette dernière intégrale s'exprime, d'après (3-I), par une fonction hypergéométrique; d'où

$$(26) \qquad P'_2(x) = x(1 - x^2)^n F\left(1 + n, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right).$$

L'intégrale de l'équation (18 *bis*) qui se déduit de P_2 par la formule

$$Q_n(x) = \frac{d^nP'_2}{dx^n}$$

est connue sous le nom de *fonction sphérique de seconde espèce.*

Les deux intégrales $P_1(x)$ et $P_2(x)$ de (24 *bis*) peuvent d'ailleurs s'obtenir d'un seul coup en faisant une remarque qui, généralisée, donnera une méthode simple pour intégrer le système (24). Si dans (24 *bis*) on pose

$$\xi = x^2,$$

elle devient

$$\xi(1 - \xi)\frac{d^2P'}{d\xi^2} + \left[\frac{1}{2} + \left(n - \frac{3}{2}\right)\xi\right]\frac{dP'}{d\xi} + \frac{n}{2}P' = 0.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Or cette équation s'identifie avec celle de la fonction hypergéométrique (7-I) en faisant

$$\alpha = -n, \qquad \beta = \frac{1}{2}, \qquad \gamma = \frac{1}{2}.$$

D'après le tableau de Kummer (p. 6) l'équation de Gauss admet les deux intégrales :

$$y_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, \xi), \qquad y_{20} = \xi^{1-\gamma}(1-\xi)^{\gamma-\alpha-\beta} F(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma, \xi),$$

ce qui redonne les deux intégrales particulières

$$F\left(-n, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right) = (1-x^2)^n = P'_1,$$

$$x(1-x^2)^n F\left(1-n, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right) = P'_2.$$

De même pour le système (24) [1], P. Appell a donné une méthode qui simplifie notablement les calculs nécessaires, en ramenant son intégration à celle d'un système hypergéométrique, dont l'intégrale générale est par conséquent connue.

Faisons le changement de variables

$$\xi = x^2, \qquad \eta = y^2;$$

les équations (24) s'écrivent

$$(27) \qquad \begin{cases} \xi(1-\xi)\dfrac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} - \xi\eta\dfrac{\partial^2 P}{\partial \xi\,\partial \eta} + \left[\dfrac{1}{2} + \left(\mu - \dfrac{3}{2}\right)\xi\right]\dfrac{\partial P}{\partial \xi} - \dfrac{1}{2}\eta\dfrac{\partial P}{\partial \eta} + \dfrac{\mu}{2}P = 0, \\ \eta(1-\eta)\dfrac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} - \xi\eta\dfrac{\partial^2 P}{\partial \xi\,\partial \eta} + \left[\dfrac{1}{2} + \left(\mu - \dfrac{3}{2}\right)\eta\right]\dfrac{\partial P}{\partial \eta} - \dfrac{1}{2}\xi\dfrac{\partial P}{\partial \xi} + \dfrac{\mu}{2}P = 0. \end{cases}$$

Si on les rapproche des équations vérifiées par la fonction hypergéométrique

$$F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', \xi, \eta)$$

(données au paragraphe XIII), on voit de suite que ces deux systèmes s'identifient quand on fait

$$\alpha = -\mu, \qquad \beta = \beta' = \gamma = \gamma' = \frac{1}{2}.$$

Or on connaît (XIII) quatre intégrales particulières indépendantes du système de F_2 : les fonctions

$$F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', \xi, \eta),$$
$$\xi^{1-\gamma} F_2(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, \beta', 2-\gamma, \gamma', \xi, \eta),$$
$$\eta^{1-\gamma'} F_2(\alpha+1-\gamma', \beta, \beta'+1-\gamma', \gamma, 2-\gamma', \xi, \eta),$$
$$\xi^{1-\gamma}\eta^{1-\gamma'} F_2(\alpha+2-\gamma-\gamma', \beta+1-\gamma, \beta'+1-\gamma', 2-\gamma, 2-\gamma', \xi, \eta).$$

---

[1] P. Appell, *Sur l'intégration des équations différentielles simultanées que vérifie le polynome* $U_{m,n}$ *d'Hermite* (*C. R. Acad. des Sc.*, t. 167, 1918, p. 309).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

On en déduit par conséquent les quatre intégrales du système (24)

$$(28)\quad \begin{cases} P_1 = F_2\left(-\mu, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x^2, y^2\right), \\ P_2 = xy\,F_2\left(1-\mu, 1, 1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, x^2, y^2\right). \\ P_3 = y\,F_2\left(\frac{1}{2}-\mu, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x^2, y^2\right), \\ P_4 = x\,F_2\left(\frac{1}{2}-\mu, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, x^2, y^2\right). \end{cases}$$

Les deux intégrales P_1 *et* P_2 *pour lesquelles le premier élément de la fonction* F_2 *est un entier négatif se réduisent à des polynomes.*

L'expression de P_1 s'obtient immédiatement

$$P_1 = (1 - x^2 - y^2)^\mu;$$

c'est l'intégrale que nous connaissions déjà; elle conduit pour le système (18) au polynome d'Hermite $U_{m,n}$.

On peut donner une expression élégante du polynome P_2; partons de la relation (6_1-VII)

$$F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', \xi, \eta) = (1-\xi-\eta)^{-\alpha} F_2\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma'-\beta', \gamma, \gamma', \frac{\xi}{\xi+\eta-1}, \frac{\eta}{\xi+\eta-1}\right);$$

d'où

$$P_2 = xy(1-x^2-y^2)^{\mu-1} F_2\left(1-\mu, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{x^2+y^2-1}, \frac{y^2}{x^2+y^2-1}\right).$$

En exprimant la fonction F_2 par une intégrale définie, d'après la formule (2-VI), puis en faisant dans cette intégrale définie le changement de variables :

$$u = s^2 \qquad v = t^2,$$

on obtient immédiatement cette expression du polynome P_2 :

$$(29)\qquad P_2 = xy \int_0^1 \int_0^1 (s^2x^2 + t^2y^2 + 1 - x^2 - y^2)^{\mu-1}\, ds\, dt.$$

Les polynomes P_1 et P_2 sont de degré 2μ; mais P_1 est pair et P_2 impair.

Pour transformer l'intégrale P_3 nous partirons de la relation (6_2-VII)

$$F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', \xi, \eta) = (1-\xi)^{-\alpha} F_2\left(\alpha, \gamma-\beta, \beta', \gamma, \gamma', -\frac{\xi}{1-\xi}, \frac{\eta}{1-\xi}\right),$$

d'où

$$P_3 = y(1-x^2)^{\mu-\frac{1}{2}} F_2\left(\frac{1}{2}-\mu, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{x^2}{1-x^2}, \frac{y^2}{1-x^2}\right).$$

Or, quand l'élément β est nul, F_2 se réduit (p. 15) à une fonction hypergéométrique d'une

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

variable

$$F_2(\alpha, 0, \beta', \gamma, \gamma', \xi, \eta) = F(\alpha, \beta', \gamma', \eta).$$

Donc

$$(30) \qquad P_3 = (1 - x^2)^\mu \left[\frac{y}{\sqrt{1 - x^2}} F\left(\frac{1}{2} - \mu, 1, \frac{3}{2}, \frac{y^2}{1 - x^2}\right) \right];$$

l'expression entre crochets ne dépend que de la quantité $\frac{y}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Les expressions de P_3 et P_4 étant symétriques, on obtient de suite

$$(31) \qquad P_4 = (1 - y^2)^\mu \left[\frac{x}{\sqrt{1 - y^2}} F\left(\frac{1}{2} - \mu, 1, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{1 - y^2}\right) \right].$$

En vertu de la relation (6″-I)

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \xi) = (1 - \xi)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma, \xi),$$

on peut encore écrire

$$(32) \qquad \begin{cases} P_3 = (1 - x^2 - y^2)^\mu \left[\frac{y}{\sqrt{1 - x^2}} F\left(1 + \mu, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{y^2}{1 - x^2}\right) \right], \\ P_4 = (1 - x^2 - y^2)^\mu \left[\frac{x}{\sqrt{1 - y^2}} F\left(1 + \mu, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{1 - y^2}\right) \right]. \end{cases}$$

Ces expressions se transforment aisément en s'appuyant sur la relation

$$\alpha F(\alpha + 1, \beta, \gamma, \xi) - \beta F(\alpha, \beta + 1, \gamma, \xi) = (\alpha - \beta) F(\alpha, \beta, \gamma, \xi).$$

qui donne la relation de récurrence

$$2\mu(1 - \xi)^\mu F\left(1 + \mu, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \xi\right) = 1 + (2\mu - 1)(1 - \xi)\left[(1 - \xi)^{\mu - 1} F\left(\mu, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \xi\right)\right].$$

On a donc

$$F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \xi\right) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \log \frac{1 + \sqrt{\xi}}{1 - \sqrt{\xi}},$$

$$2(1 - \xi) F\left(2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \xi\right) = 1 + (1 - \xi)\left[\frac{1}{2\sqrt{\xi}} \log \frac{1 + \sqrt{\xi}}{1 - \sqrt{\xi}}\right],$$

$$4(1 - \xi)^2 F\left(3, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \xi\right) = \left[1 + \frac{3}{2}(1 - \xi)\right] + \frac{3}{2}(1 - \xi)^2 \left[\frac{1}{2\sqrt{\xi}} \log \frac{1 + \sqrt{\xi}}{1 - \sqrt{\xi}}\right],$$

$$6(1 - \xi)^3 F\left(4, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \xi\right) = \left[1 + \frac{5}{4}(1 - \xi) + \frac{5.3}{4.2}(1 - \xi)^2\right] + \frac{5.3}{4.2}(1 - \xi)^3 \left[\frac{1}{2\sqrt{\xi}} \log \frac{1 + \sqrt{\xi}}{1 - \sqrt{\xi}}\right].$$

La loi est évidente

$$2\mu(1 - \xi)^\mu F\left(1 + \mu, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \xi\right) = \mathfrak{P}_{\mu - 1}(\xi) + \frac{3.5\ldots(2\mu - 1)}{2.4\ldots(2\mu - 2)}(1 - \xi)^\mu \left[\frac{1}{2\sqrt{\xi}} \log \frac{1 + \sqrt{\xi}}{1 - \sqrt{\xi}}\right],$$

$\mathfrak{P}_{\mu - 1}$ désignant le polynome de degré $\mu - 1$

$$(33) \qquad \mathfrak{P}_{\mu - 1}(\xi) = 1 + \frac{2\mu - 1}{2\mu - 2}(1 - \xi) + \frac{(2\mu - 3)(2\mu - 1)}{(2\mu - 4)(2\mu - 2)}(1 - \xi)^2 + \ldots + \frac{3.5\ldots(2\mu - 1)}{2.4\ldots(2\mu - 2)}(1 - \xi)^{\mu - 1}.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Nous obtenons donc finalement l'expression explicite des intégrales P_3 et P_4

$$(34)\qquad 2\mu P_3 = \frac{1}{2}\frac{3.5\ldots(2\mu-1)}{2.4\ldots(2\mu-2)}(1-x^2-y^2)^\mu \log\frac{\sqrt{1-x^2}+y}{\sqrt{1-x^2}-y} + (1-x^2)^{\mu-\frac{1}{2}} y\, \mathfrak{P}_{\mu-1}\left(\frac{y^2}{1-x^2}\right),$$

$$(35)\qquad 2\mu P_4 = \frac{1}{2}\frac{3.5\ldots(2\mu-1)}{2.4\ldots(2\mu-2)}(1-x^2-y^2)^\mu \log\frac{\sqrt{1-y^2}+x}{\sqrt{1-y^2}-x} + (1-y^2)^{\mu-\frac{1}{2}} x\, \mathfrak{P}_{\mu-1}\left(\frac{x^2}{1-y^2}\right).$$

Il est intéressant de remarquer que la quantité

$$(1-\xi)^\mu F\left(1+\mu, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \xi\right)$$

s'exprime aussi très simplement au moyen de la fonction P'_2, d'où se déduit la fonction sphérique de seconde espèce; on a, en effet, d'après la formule (26),

$$\sqrt{\xi}(1-\xi)^\mu F\left(1+\mu, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \xi\right) = P'_2(\sqrt{\xi}).$$

De telle sorte que

$$(36)\qquad \begin{cases} P_3 = (1-x^2)^\mu P'_2\left(\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right), \\ P_4 = (1-y^2)^\mu P'_2\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-y^2}}\right). \end{cases}$$

CIII. — Détermination de l'intégrale générale du système d'équations aux dérivées partielles vérifiées par le polynome $V_{m,n}(x, y)$.

Comme on passe du système des équations du polynome $U_{m,n}$ à celui du polynome $V_{m,n}$

$$(17)\qquad \begin{cases} (1-x^2)\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} - xy\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} - (n+3)x\dfrac{\partial V}{\partial x} + my\dfrac{\partial V}{\partial y} + m(m+n+2)V = 0, \\ (1-y^2)\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} - xy\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} - (m+3)y\dfrac{\partial V}{\partial y} + nx\dfrac{\partial V}{\partial x} + n(m+n+2)V = 0, \end{cases}$$

par le simple changement de m en $-(m+1)$ et de n en $-(n+1)$, on conçoit que les propriétés de ces deux systèmes soient tout à fait voisines et que l'intégrale générale de (17) puisse se déterminer par une voie analogue à celle que nous venons de suivre. Le problème a été également résolu par Didon [1].

Ici le point de départ est la formule

$$(9)\qquad V_{m,n}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}, \frac{\eta}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}\right) = (-1)^{m+n}\frac{(1+\xi^2+\eta^2)^{\frac{m+n}{2}+1}}{(1, m)(1, n)}\frac{\partial^{m+n}}{\partial\xi^m\,\partial\eta^n}[(1+\xi^2+\eta^2)^{-1}].$$

Si dans le système (17) nous faisons le changement de variables

$$x = \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}, \qquad y = \frac{\eta}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}$$

[1] F. Didon, *Ann. Éc. Norm.*, t. VI, p. 12.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

et le changement de fonction

$$V = (1 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{m+n}{2}+1} V',$$

il se transforme en

$$(37)\quad \begin{cases} (1+\xi^2)\dfrac{\partial^2 V'}{\partial \xi^2} + \xi\eta \dfrac{\partial^2 V'}{\partial \xi\, \partial \eta} + (2m+n+4)\xi \dfrac{\partial V'}{\partial \xi} + (m+1)\eta \dfrac{\partial V'}{\partial \eta} + (m+1)(m+n-2)V' = 0, \\ (1+\eta^2)\dfrac{\partial^2 V'}{\partial \eta^2} + \xi\eta \dfrac{\partial^2 V'}{\partial \xi\, \partial \eta} + (2n+m+4)\eta \dfrac{\partial V'}{\partial \eta} + (n+1)\xi \dfrac{\partial V'}{\partial \eta} + (n+1)(m+n+2)V' = 0. \end{cases}$$

Ces deux équations se déduisent de celles-ci

$$(38)\quad \begin{cases} (1+\xi^2)\dfrac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} + \xi\eta \dfrac{\partial^2 Q}{\partial \xi\, \partial \eta} + 4\xi \dfrac{\partial Q}{\partial \xi} + \eta \dfrac{\partial Q}{\partial \eta} + 2Q = 0, \\ (1+\eta^2)\dfrac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2} + \xi\eta \dfrac{\partial^2 Q}{\partial \xi\, \partial \eta} + 4\eta \dfrac{\partial Q}{\partial \eta} + \xi \dfrac{\partial Q}{\partial \xi} + 2Q = 0, \end{cases}$$

en les dérivant m fois par rapport à ξ et n fois par rapport à η et en posant

$$V' = \frac{\partial^{m+n} Q}{\partial \xi^m\, \partial \eta^n}.$$

Par conséquent, l'intégration du système (37) est équivalente à celle de (38), grâce à la formule

$$(39)\quad V = (1 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{m+n}{2}+1} \frac{\partial^{m+n} Q}{\partial \xi^m\, \partial \eta^n}.$$

Le problème est donc ramené à la détermination de l'intégrale générale de (38); remarquons que ce système ne dépend plus des indices m et n et qu'il peut s'écrire

$$(40)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \xi}\left[(1+\xi^2)\dfrac{\partial Q}{\partial \xi} + \xi\eta \dfrac{\partial Q}{\partial \eta} + 2\xi Q\right] = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta}\left[(1+\eta^2)\dfrac{\partial Q}{\partial \eta} + \xi\eta \dfrac{\partial Q}{\partial \xi} + 2\eta Q\right] = 0. \end{cases}$$

Ces équations sont évidemment vérifiées par la fonction

$$Q_1 = (1 + \xi^2 + \eta^2)^{-1},$$

à laquelle la formule (39) fait correspondre (à un facteur constant près) le polynome d'Hermite $V_{m,n}$.

Les équations (40) donnent, en intégrant une première fois,

$$(1+\xi^2)\frac{\partial Q}{\partial \xi} + \xi\eta \frac{\partial Q}{\partial \eta} + 2\xi Q = \varphi(\eta),$$

$$(1+\eta^2)\frac{\partial Q}{\partial \eta} + \xi\eta \frac{\partial Q}{\partial \xi} + 2\eta Q = \psi(\xi),$$

ou

$$(1+\xi^2+\eta^2)\frac{\partial Q}{\partial \xi} + 2\xi Q = (1+\eta^2)\varphi(\eta) - \xi\eta\,\psi(\xi),$$

$$(1+\xi^2+\eta^2)\frac{\partial Q}{\partial \eta} + 2\eta Q = (1+\xi^2)\psi(\xi) - \xi\eta\,\varphi(\eta),$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

ou en introduisant la fonction $Q' = (1 + \xi^2 + \eta^2) Q$

$$(41) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Q'}{\partial \xi} = (1 + \eta^2)\varphi(\eta) - \xi\eta\psi(\xi), \\ \dfrac{\partial Q'}{\partial \eta} = (1 + \xi^2)\psi(\xi) - \xi\eta\varphi(\eta). \end{cases}$$

On doit avoir, pour que ces équations soient compatibles,

$$(1 + \eta^2)\varphi'(\eta) + 3\eta\varphi(\eta) = (1 + \xi^2)\psi'(\xi) + 3\xi\psi(\xi) = A.$$

$\varphi(\eta)$ et $\psi(\xi)$ se déterminent alors par des quadratures élémentaires; on intègre ensuite facilement les deux équations (41). On trouve finalement, toutes réductions faites, pour l'intégrale générale du système (38), avec quatre constantes arbitraires A, B, C, D,

$$(42) \qquad Q = (1 + \xi^2 + \eta^2)^{-1} \left\{ D + C\frac{\xi}{\sqrt{1+\eta^2}} + B\frac{\eta}{\sqrt{1+\xi^2}} \right.$$
$$\left. + \frac{A}{2}\left[\frac{\xi}{\sqrt{1+\eta^2}}\log(\eta + \sqrt{1+\eta^2}) + \frac{\eta}{\sqrt{1+\xi^2}}\log(\xi + \sqrt{1+\xi^2})\right]\right\}.$$

Par la formule (39), on en déduit l'intégrale générale du système (17); le coefficient de D redonne le polynome d'Hermite $V_{m,n}$.

CIV. — Les courbes algébriques $U_{m,n}(x, y) = 0$.

L'équation

$$U_{m,n}(x, y) = 0$$

définit, dans le plan des xy, une courbe algébrique de degré $m + n$.

A son sujet Hermite [1] a énoncé la proposition suivante :

Exception faite des branches confondues avec l'un des axes de coordonnées, elle est entièrement contenue à l'intérieur du cercle

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Cette dernière propriété généralise le fait bien connu que toutes les racines du polynome de Legendre $V_n(x)$ sont comprises entre -1 et $+1$. Pour l'établir il suffit de considérer l'expression (4) du polynome $U_{m,n}(x, y)$; si $x^2 + y^2 - 1 \geq 0$, tous les termes du polynome ont le même signe : celui de $x^m y^n$.

L'étude de la courbe $U_{m,n} = 0$ a fait l'objet de travaux étendus de W. Tramm [2] et de Ch. Willigens [3]; ne pouvant reproduire le détail de leurs calculs, nous donnerons seulement un bref résumé des résultats obtenus :

---

(1) Ch. Hermite, *Œuvres*, t. II, p. 332.

(2) W. Tramm, *Geometrische Diskussion des Hermite'schen Polynoms*. Diss. Zurich, 1908.

(3) Ch. Willigens, *Nouv. Ann. de Math.*, t. 11, 1911, p. 97.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

1° La courbe $U_{m,n} = 0$ est coupée en $m + n$ points réels par toute droite issue de l'origine;

2° Elle ne peut admettre de points multiples réels que sur les axes de coordonnées; en outre les points multiples constitués par la rencontre de plusieurs branches, dont aucune n'est confondue avec un des axes de coordonnées, sont nécessairement les points

$$x = 0, \quad y = -1; \qquad x = 0, \quad y = +1;$$
$$x = +1, \quad y = 0; \qquad x = -1, \quad y = 0;$$

les points multiples sur Ox n'existent que si

$$n \geq 4;$$

les points multiples sur Oy, que si

$$m \geq 4;$$

la courbe ne peut avoir de points multiples simultanément sur les deux axes que si

$$m + n \geq 8.$$

3° La courbe se compose (exception faite des axes de coordonnées) d'une série de branches fermées, symétriques par rapport aux axes, contenues à l'intérieur du cercle

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

enveloppant l'origine et s'enveloppant les unes les autres;

4° La courbe $U_{m,0} = 0$ se décompose (exception faite de l'axe $x = 0$, si m est impair) en $\frac{m}{2}$ ou $\frac{m-1}{2}$ ellipses (selon que m est pair ou impair) admettant les axes de coordonnées comme axes de symétrie, le demi-grand axe dirigé selon Oy étant égal à 1, le demi-petit axe étant égal à une des racines positives du polynome de Legendre

$$V_m(x) = 0.$$

La courbe $U_{0,n} = 0$ s'en déduit en échangeant le rôle des axes.

5° D'après la formule

$$U_{m,1} = (m+1)\,y\,U_{m,0}$$

la courbe $U_{m,1} = 0$ se déduit de la courbe précédente $U_{m,0} = 0$ par l'adjonction de l'axe $y = 0$.

La courbe $U_{1,n} = 0$ se déduit par analogie de $U_{0,n} = 0$.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Illustrons ces propositions par l'examen des courbes $U_{m,n} = 0$ jusqu'à $m + n = 4$.

$$m + n = 1 : \quad U_{1,0}, \quad x = 0; \quad U_{0,1}, \quad y = 0.$$

$$m + n = 2 \begin{cases} U_{2,0}, \quad \dfrac{x^2}{\frac{1}{3}} + y^2 - 1 = 0; \quad U_{0,2}, \quad x^2 + \dfrac{y^2}{\frac{1}{3}} - 1 = 0; \\ U_{1,1}, \quad x = 0, \quad y = 0. \end{cases}$$

$$m + n = 3 \begin{cases} U_{3,0}, \quad x = 0, \quad \dfrac{x^2}{\frac{3}{5}} + y^2 - 1 = 0; \\ U_{2,1}, \quad y = 0, \quad \dfrac{x^2}{\frac{1}{3}} + y^2 - 1 = 0; \\ U_{1,2}, \quad x = 0, \quad x^2 + \dfrac{y^2}{\frac{1}{3}} - 1 = 0; \\ U_{0,3}, \quad y = 0, \quad x^2 + \dfrac{y^2}{\frac{3}{5}} - 1 = 0. \end{cases}$$

$$m + n = 4 \begin{cases} U_{4,0}, \quad a x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad a' x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad a a' = \dfrac{35}{3}, \quad a + a' = 10; \\ U_{3,1}, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad \dfrac{x^2}{\frac{3}{5}} + y^2 - 1 = 0; \\ U_{2,2}, \quad 5x^4 + 18 x^2 y^2 + 5 y^4 - 6 x^2 - 6 y^2 + 1 = 0; \\ U_{1,3}, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x^2 + \dfrac{y^2}{\frac{3}{5}} - 1 = 0; \\ U_{0,4}, \quad x^2 + b y^2 - 1 = 0, \quad x^2 + b' y^2 - 1 = 0, \quad b b' = \dfrac{35}{3}, \quad b + b' = 10. \end{cases}$$

On trouvera dans la thèse de W. Tramm l'expression explicite des 66 premières équations

$$U_{m,n} = 0$$

(jusqu'à $m + n = 10$ inclus); le tracé des courbes $U_{2,2}$, $U_{3,2}$, $U_{3,3}$, $U_{4,2}$, $U_{5,2}$, $U_{4,3}$ y sert d'illustration aux théorèmes généraux.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

TROISIÈME PARTIE.

LES POLYNOMES D'HERMITE

DÉRIVÉS D'UNE EXPONENTIELLE

CHAPITRE I.

LES POLYNOMES D'HERMITE DÉRIVÉS DE L'EXPONENTIELLE $e^{-\frac{x^2}{2}}$.

CV. — Le potentiel dans un espace a un nombre infiniment grand de dimensions. Limite des polynomes $V_n^s(x)$ quand s augmente indéfiniment.

Dans deux Notes insérées aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de 1864, Hermite [1] a introduit une famille de polynomes à une variable qu'il définit comme les coefficients des puissances successives de a dans le développement de la fonction $e^{ax-\frac{a^2}{2}}$; il représente ces nouveaux polynomes par le symbole $U_n(x)$; comme, au cours de cette étude, ce symbole U est d'un usage constant avec un sens tout différent, pour éviter des confusions possibles, nous modifierons la notation d'Hermite et nous poserons [2]

$$(1)\qquad e^{ax-\frac{a^2}{2}} = \sum_{(1,\,n)} \frac{a^n}{n} H_n(x).$$

L'étude de ces nouveaux polynomes se place tout naturellement à la suite de celle des fonctions sphériques d'ordre supérieur $V_n^s(x)$, *car nous allons montrer qu'ils en sont simplement un cas limite.*

Cette remarque a été faite presque aussitôt après la publication des notes d'Hermite par F. Mehler [3] qui a aperçu qu'on était conduit à la fonction génératrice (1) *en cherchant ce*

---

(1) *Comptes rendus*, t. 58, 1864, p. 93 et 266, ou Ch. Hermite, *Sur un nouveau développement en série des fonctions* (*Œuvres*, t. II, p. 293-308).

(2) Cette notation se rapproche de celle qu'a employée M. Niels Nielsen dans une étude récente (*voir* plus bas).

(3) F. G. Mehler, *Ueber die Entwicklung einer Funktion von beliebig vielen Variablen nach Laplaceschen Funktionen höherer Ordnung* (*J. reine angew. Math.*, t. 66, 1865, p. 161).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

que devient, à la limite, le potentiel dans un espace à un nombre indéfiniment croissant de dimensions.

D'une manière plus précise, P. Appell [1] a donné la relation qui lie aux polynomes $H_n(x)$ d'Hermite la limite des polynomes $V_n^{(s)}(x)$.

Considérons la fonction génératrice

$$(1 - 2ax + a^2)^{-\frac{s}{2}} = \sum a^n V_n^{(s)}(x),$$

qui (LXXV) dérive du potentiel dans l'espace E_{s+2} à $s+2$ dimensions

$$[(z_1 - a)^2 + z_2^2 + \ldots + z_{s+2}^2]^{-\frac{s}{2}}.$$

En y remplaçant a par $\frac{a}{\sqrt{s}}$ et x par $\frac{x}{\sqrt{s}}$ on peut aussi l'écrire

$$\left(1 - 2\frac{ax}{s} + \frac{a^2}{s}\right)^{-\frac{s}{2}} = \sum a^n s^{-\frac{n}{2}} V_n^{(s)}\left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right).$$

Si, d'après la remarque de Mehler, nous faisons tendre vers l'infini le nombre des dimensions de l'espace E_{s+2}, où nous envisageons le potentiel, cette fonction tend vers une limite qui est précisément la fonction génératrice d'Hermite. En effet,

$$\lim_{s=+\infty}\left(1 - 2\frac{ax}{s} + \frac{a^2}{s}\right)^{-\frac{s}{2}} = \lim_{s=+\infty}\left[1 - \frac{2}{s}\left(ax - \frac{a^2}{2}\right)\right]^{-\frac{s}{2}}$$
$$= e^{ax - \frac{a^2}{2}}.$$

Donc, en identifiant le développement (1) de l'exponentielle avec celui de

$$\lim_{s=+\infty}\left(1 - 2\frac{ax}{s} + \frac{a^2}{s}\right)^{-\frac{s}{2}} = \sum a^n\left[\lim_{s=+\infty} s^{-\frac{n}{2}} V_n^{(s)}\left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right)\right],$$

nous obtenons la formule

$$(2) \qquad \lim_{s=+\infty} s^{-\frac{n}{2}} V_n^{(s)}\left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right) = \frac{1}{(1.n)} H_n(x).$$

En partant de cette relation il est possible de déduire toutes les propriétés des polynomes d'Hermite $H_n(x)$, *comme cas limite, des propriétés des fonctions sphériques d'ordre supérieur* $V_n^{(s)}(x)$; il est d'ailleurs presque toujours plus élégant et plus rapide de les établir en considérant directement la fonction génératrice (1).

---

[1] P. Appell, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3e série, t. VIII, 1882, p. 214

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

CVI. — Expression générale des polynomes $H_n(x)$.

En développant selon les puissances de a la fonction génératrice d'Hermite

$$(3)\qquad e^{ax-\frac{a^2}{2}} = \sum \frac{a^p x^p}{(1,p)} \times \sum \frac{(-1)^q}{2^q} \frac{a^{2q}}{(1,q)},$$

on obtient aisément l'expression générale du polynome $H_n(x)$

$$H_n(x) = x^n - \frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{1}x^{n-2} + \frac{1}{2^2}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}x^{n-4} - \ldots$$

ou

$$(4)\qquad H_n(x) = \sum_{j=0}^{j=\frac{n}{2}} \frac{(-1)^j}{2^j}\frac{(-n,2j)}{(1,j)}x^{n-2j}.$$

C'est donc un polynome de degré n qui ne contient que des termes de même parité que x^n.

Les coefficients de ce polynome

$$1,\quad -\frac{n(n-1)}{2.1},\quad \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2.1.2},\quad \ldots$$

sont tous des nombres entiers; voici l'expression explicite des dix premiers polynomes :

$$\begin{aligned}
H_0 &= 1,\\
H_1 &= x,\\
H_2 &= x^2 - 1,\\
H_3 &= x^3 - 3x,\\
H_4 &= x^4 - 6x^2 + 3,\\
H_5 &= x^5 - 10x^3 + 15x,
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
H_6 &= x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15,\\
H_7 &= x^7 - 21x^5 + 105x^3 - 105x,\\
H_8 &= x^8 - 28x^6 + 210x^4 - 420x^2 + 105,\\
H_9 &= x^9 - 36x^7 + 378x^5 - 1260x^3 + 945x,\\
H_{10} &= x^{10} - 45x^8 + 630x^6 - 3150x^4 + 4725x^2 - 945.
\end{aligned}$$

De la formule (4), on peut tirer l'expression de $H_n(x)$ ordonnée selon les puissances ascendantes de x, sous deux formes différentes selon la parité de n :

$$(4')\qquad \begin{aligned}
H_{2n}(x) &= \frac{(-1)^n}{2^n}\frac{(1,2n)}{(1,n)}\left[1 - 2\frac{n}{1.2}x^2 + 2^2\frac{n(n-1)}{1.2.3.4}x^4 - \ldots\right]\\
&= \frac{(-1)^n}{2^n}\frac{(1,2n)}{(1,n)}\sum_{k=0}^{k=n} 2^k\frac{(-n,k)}{(1,2k)}x^{2k};
\end{aligned}$$

$$(4'')\qquad \begin{aligned}
H_{2n+1}(x) &= \frac{(-1)^n}{2^n}\frac{(1,2n+1)}{(1,n)}\left[x - 2\frac{n}{1.2.3}x^3 + 2^2\frac{n(n-1)}{1.2.3.4.5}x^5 - \ldots\right]\\
&= \frac{(-1)^n}{2^n}\frac{(1,2n+1)}{(1,n)}\sum_{k=0}^{k=n} 2^k\frac{(-n,k)}{(1,2k+1)}x^{2k+1}.
\end{aligned}$$

D'après ces formules il est clair que le polynome H_n s'exprime par la fonction $G(\alpha,\gamma,x)$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

de Kummer (2-XL), sous deux formes différentes selon la parité de n :

$$(4') \qquad H_{2n}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n}\frac{(1, 2n)}{(1, n)} G\left(-n, \frac{1}{2}, \frac{x^2}{2}\right);$$

$$(4'') \qquad H_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n}\frac{(1, 2n+1)}{(1, n)} x G\left(-n, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{2}\right).$$

Hermite a montré que le polynome H_n *s'exprime d'une manière élégante par la dérivée* $n^{\text{ième}}$ *de la fonction* $e^{-\frac{x^2}{2}}$.

En effet, en vertu de la formule de Taylor, on peut écrire

$$e^{-\frac{(x-a)^2}{2}} = \sum \frac{a^n}{(1, n)}(-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right),$$

d'où

$$e^{ax-\frac{a^2}{2}} = e^{+\frac{x^2}{2}} \sum \frac{a^n}{(1, n)}(-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right);$$

puisque le premier membre se confond avec la fonction génératrice (1), on en tire la formule d'Hermite

$$(5) \qquad H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right).$$

D'ailleurs, en partant de cette expression et en s'appuyant sur la formule (p. 274), qui fournit l'expression de la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction $\varphi(x^2)$,

$$\frac{d^n}{dx^n}\varphi(x^2) = \sum_{j=0}^{j=\frac{n}{2}} (2x)^{n-2j} \frac{(-n, 2j)}{(1, j)} \varphi^{(n-j)}(x^2),$$

on retrouve facilement l'expression générale (4) de $H_n(x)$, car ici

$$\varphi^{(n-j)}(x^2) = (-1)^{n-j} \frac{1}{2^{n-j}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

L'expression (5) de $H_n(x)$ par une dérivée $n^{\text{ième}}$ constitue, comme l'a montré P. Appell, l'expression limite de la formule de Jacobi (28-LXXXIII).

En effet, on en tire

$$s^{-\frac{n}{2}} V_n^{(s)}\left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right) = \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{(s, n)}{\left(\frac{s+1}{2}, n\right)} \frac{\left(1-\frac{x^2}{s}\right)^{\frac{1-s}{2}}}{(1, n)} \frac{d^n}{dx^n}\left[\left(1-\frac{x^2}{s}\right)^{n+\frac{s-1}{2}}\right].$$

Quand s tend vers l'infini $\left(1-\frac{x^2}{s}\right)^{\frac{1-s}{2}}$ et $\left(1-\frac{x^2}{s}\right)^{n+\frac{s-1}{2}}$ ont respectivement pour limites :

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

$e^{\frac{x^2}{2}}$ et $e^{-\frac{x^2}{2}}$; d'autre part,

$$(s, n) = \frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(s)} \quad \text{et} \quad \left(\frac{s+1}{2}, n\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}$$

tendent, en vertu de la formule de Stirling, respectivement vers s^n et $\left(\frac{s}{2}\right)^n$. D'où

$$(6) \qquad \lim_{s=+\infty} s^{-\frac{n}{2}} V_n^s\left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right) = \frac{(-1)^n}{(1, n)} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right).$$

CVII. — Formules de récurrence entre polynomes consécutifs. Racines de $H_n(x)$.

L'une des propriétés remarquables des polynomes $H_n(x)$, c'est que la dérivée de l'un d'eux est égale au polynome antécédent multiplié par un facteur constant.

En effet, en dérivant la fonction génératrice par rapport à x

$$a\, e^{ax-\frac{a^2}{2}} = \sum \frac{a^n}{(1, n)} \frac{dH_n}{dx},$$

puis en remplaçant dans le premier membre l'exponentielle par son développement, on obtient la relation

$$(7) \qquad \frac{dH_n}{dx} = n H_{n-1},$$

que l'on peut aussi vérifier aisément sur l'expression développée (4) de $H_n(x)$.

Les polynomes d'Hermite se rangent donc dans la classe étudiée systématiquement par P. Appell [1], qui comprend toutes les suites de polynomes

$$P_0(x), \quad P_1(x), \quad \ldots, \quad P_n(x), \quad \ldots \qquad (P_n \text{ de degré } n),$$

telles que

$$\frac{dP_n}{dx} = c_n P_{n-1}.$$

M. Niels Nielsen [2] a donné le nom de « suite harmonique » à une telle suite, dont il a étudié les propriétés générales d'une manière approfondie, précisément pour en faire l'application aux polynomes d'Hermite.

L'application réitérée de la formule de récurrence (7) conduit à l'expression de la dérivée $k^{\text{ième}}$ $(k \leqq n)$ de $H_n(x)$

$$(8) \qquad \frac{d^k H_n}{dx^k} = n(n-1)\ldots(n-k+1) H_{n-k}$$

---

(1) P. Appell, *Ann. Éc. Norm. sup.*, t. IX, 1880, p. 119-145.

(2) Niels Nielsen, *Recherches sur les polynomes d'Hermite* (*Det. Kgl. Danske Videnskabernes Selskab : Math. Phys. Medd.*, I, 6, 1918).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

ou

$$(8\ bis)\qquad \frac{1}{(1,n)}\frac{d^k H_n}{dx^k} = \frac{1}{(1,n-k)} H_{n-k}.$$

On en déduit que le développement par la formule de Taylor du polynome $H_n(x+h)$ se présente sous la forme remarquable

$$H_n(x+h) = H_n(x) + \frac{n}{1} h H_{n-1}(x) + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k} h^k H_{n-k}(x) + \ldots + h^n H_0,$$

duquel on pourrait, en y faisant $x = 0$, $h = x$ et en s'appuyant sur les formules évidentes

$$H_{2k+1}(0) = 0, \qquad H_{2k}(0) = \frac{(-1)^k}{2^k}\frac{(1,2k)}{(1,k)},$$

tirer l'expression générale (4) de $H_n(x)$.

On obtient une *relation de récurrence liant trois polynomes consécutifs*, en dérivant la fonction génératrice par rapport au paramètre a,

$$(x-a)e^{ax-\frac{a^2}{2}} = \sum \frac{a^{n-1}}{(1,n-1)} H_n(x)$$

ou

$$(x-a)\sum \frac{a^n}{(1,n)} H_n(x) = \sum \frac{a^{n-1}}{(1,n-1)} H_n(x),$$

d'où, en identifiant dans les deux membres le coefficient de a^{n-1},

$$(9)\qquad H_n(x) - x H_{n-1}(x) + (n-1) H_{n-2}(x) = 0 \qquad (n \geqq 2).$$

L'ensemble des deux relations (7) et (9) est caractéristique des polynomes d'Hermite; en effet, M. Niels Nielsen a démontré que la seule suite de polynomes, vérifiant simultanément l'équation fonctionnelle (7) et l'équation aux différences finies (9), était la suite des polynomes d'Hermite.

En s'appuyant sur l'équation de récurrence (9) on peut mettre (d'après un procédé classique pour l'intégration des équations aux différences finies) le polynome $H_n(x)$ sous forme d'un déterminant d'ordre n :

$$(10)\qquad H_n(x) = \begin{vmatrix} x & n-1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & x & n-2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & x & n-3 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & x \end{vmatrix}$$

En effet, on voit aisément, en développant ce déterminant selon les éléments de la première

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

ligne, que l'on a

$$H_n = x H_{n-1} - (n-1) H_{n-2}.$$

Dans le même ordre d'idées, comme l'a remarqué Hermite, il résulte encore de la relation de récurrence (9) que $H_n(x)$ est le dénominateur de la réduite de rang n de la fraction continue

$$\cfrac{1}{x - \cfrac{1}{x - \cfrac{2}{x - \cfrac{3}{x \cdots}}}}$$

Des deux relations (7) et (9) on déduit les propositions suivantes, dues à Hermite, sur les racines de l'équation algébrique de degré n

$$H_n(x) = 0. \tag{11}$$

1° *Cette équation a toutes ses racines distinctes.*

Supposons, en effet, qu'elle ait une racine double; cette racine sera commune à H_n et $\frac{dH_n}{dx}$, donc en vertu de (7) à H_n et H_{n-1}. Or ceci est impossible; en effet, d'après (9), $H_n = H_{n-1} = 0$ entraîne $H_{n-2} = 0$; puis $H_{n-1} = H_{n-2} = 0$ entraîne $H_{n-3} = 0$; finalement on devrait avoir $H_0 = 0$, ce qui est absurde puisque $H_0 = 1$.

2° *Les polynomes* $H_n(x)$ *forment une suite de Sturm.*

En effet, la suite

$$H_n(x), \quad H_{n-1}(x), \quad \ldots, \quad H_0(x)$$

s'identifie, à des coefficients constants près, avec la suite

$$H_n(x), \quad \frac{dH_n}{dx}, \quad \ldots, \quad \frac{d^n H_n}{dx^n}$$

qui forme une suite de Sturm.

3° Par conséquent, *les racines de l'équation*

$$H_{n-1}(x) = 0$$

séparent celles de $H_n(x) = 0$.

4° *Le polynome* $H_n(x)$ *a donc ses* n *racines réelles.*

Elles sont deux à deux symétriques par rapport à l'origine et plus petites en valeur absolue que $\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

CVIII. — Équation différentielle des polynomes $H_n(x)$.

En remplaçant dans la relation (9) les polynomes H_{n-1} et H_{n-2} par les expressions équivalentes

$$\frac{1}{n}\frac{dH_n}{dx} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n(n-1)}\frac{d^2H_n}{dx^2},$$

on voit que le polynome H_n vérifie l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\frac{d^2H}{dx^2} - x\frac{dH}{dx} + nH = 0. \tag{12}$$

Cette équation est une dégénérescence de l'équation différentielle du polynome $V_n^{(s)}(x)$, dont elle se déduit par le procédé de confluence employé (XL) pour tirer l'équation de la fonction de Kummer $G(\alpha, \gamma, x)$ de celle de la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$; en effet, elle est la limite de l'équation vérifiée par $V_n^{(s)}(x)$:

$$(1-x^2)\frac{d^2V}{dx^2} - (s+1)x\frac{dV}{dx} + n(n+s)V = 0$$

lorsqu'on y remplace x par $\frac{x}{\sqrt{s}}$,

$$s\left(1-\frac{x^2}{s}\right)\frac{d^2V}{dx^2} - (s+1)x\frac{dV}{dx} + n(n+s)V = 0, \tag{13}$$

ou, en divisant par s,

$$\frac{d^2V}{dx^2} - x\frac{dV}{dx} + nV + \frac{1}{s}\left[x^2\frac{d^2V}{dx^2} - x\frac{dV}{dx} + n^2V\right] = 0,$$

et que l'on fait tendre s vers l'infini. Il se présente d'ailleurs une circonstance intéressante. L'équation (13) possède trois points singuliers réguliers (au sens de Fuchs) :

$$+\sqrt{s}, \quad -\sqrt{s}, \quad \infty.$$

A la limite les deux premiers se fondent en un seul qui tend lui-même vers le point singulier unique ∞ *qui est irrégulier*, comme on le voit immédiatement en faisant le changement de variable

$$x = \frac{1}{t}$$

qui transforme l'équation (12) en

$$t^4\frac{d^2H}{dt^2} + (2t^3 + t)\frac{dH}{dt} + nH = 0,$$

pour laquelle, d'après le théorème de Fuchs, le point $t = 0$ est bien un point singulier irrégulier.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Si, dans l'équation (5-XL) vérifiée par la fonction de Kummer $G(\alpha, \gamma, \xi)$,

$$\xi \frac{d^2 G}{d\xi^2} + (\gamma - \xi) \frac{dG}{d\xi} - \alpha G = 0,$$

on pose

$$\xi = \frac{x^2}{2}, \qquad \alpha = -\frac{n}{2}, \qquad \gamma = \frac{1}{2},$$

cette équation s'identifie avec l'équation vérifiée par $H_n(x)$; de l'expression (6-XL) de l'intégrale générale de l'équation de Kummer, on déduit ainsi l'intégrale générale de l'équation (12)

$$(14) \qquad H = A\,G\left(-\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, \frac{x^2}{2}\right) + B\,x\,G\left(\frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{2}\right).$$

Cette expression est même valable que n soit entier ou non, les deux fonctions de Kummer étant des fonctions entières de x; si n est pair, la première intégrale est un polynome, donc :

$$H_{2n}(x) = A\,G\left(-n, \frac{1}{2}, \frac{x^2}{2}\right);$$

au contraire, si n est impair, c'est la deuxième intégrale qui est un polynome :

$$H_{2n+1}(x) = B\,x\,G\left(-n, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{2}\right);$$

ce résultat est d'accord avec les formules (4′) et (4″); nous reviendrons plus loin sur l'étude de l'intégrale générale.

CIX. — Fonctions $D_n(x)$ du cylindre parabolique. Polynomes vérifiant l'équation de la chaleur dans une barre.

L'équation différentielle vérifiée par le polynome $H_n(x)$ se ramène aisément à la forme réduite

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = q(x) y$$

en introduisant la fonction

$$D_n(x) = e^{-\frac{x^2}{4}} H_n(x),$$

qui, d'après (12), satisfait à l'équation

$$(15) \qquad \frac{d^2 D}{dx^2} = \left[\frac{x^2}{4} - \left(n + \frac{1}{2}\right)\right] D.$$

Cette équation, donnée par Weber [1], a été étudiée par M. Whittaker [2] qui a montré que $D_n(x)$ s'exprime au moyen de ses fonctions $M_{k,\mu}(x)$ et $W_{k,\mu}(x)$ [définies par (24, 26-XLIV)] de la manière suivante :

---

[1] Weber. *Math. Ann.*, t. I, 1869, p. 1-36.

[2] Whittaker and Watson, *Modern Analysis*, 3e édition, 1920, p. 347-351.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

si n est pair,

$$D_{2n}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{(1, 2n)}{(1, n)} \frac{1}{\sqrt{x}} M_{n+\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}}\left(\frac{x^2}{2}\right);$$

si n est impair,

$$D_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{(1, 2n+1)}{(1, n)} \frac{1}{\sqrt{x}} M_{n+\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}}\left(\frac{x^2}{2}\right);$$

ces deux cas (seuls possibles quand on définit D_n à partir des polynomes d'Hermite) sont des cas particuliers de la formule générale (n quelconque)

$$D_n(x) = 2^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}} x^{-\frac{1}{2}} W_{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}}\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

La fonction $D_n(x)$ est souvent désignée sous le nom de *fonction du cylindre parabolique;* elle s'introduit, en effet, de la manière suivante dans la théorie du potentiel de l'espace à trois dimensions. Exprimons les coordonnées rectangulaires z_1, z_2, z_3 en fonction de coordonnées curvilignes u, v, w, par les formules

$$z_1 = uv, \qquad z_2 = \frac{u^2 - v^2}{2}, \qquad z_3 = w$$

(qui introduisent comme surfaces coordonnées les plans w = const. et les *cylindres paraboliques* u = const. et v = const.).

Comme

$$ds^2 = (u^2 + v^2)(du^2 + dv^2) + dw^2,$$

il résulte de la formule (7'-LII) que l'équation de Laplace s'écrit dans ce système

$$(16) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + (u^2 + v^2)\frac{\partial^2 F}{\partial w^2} = 0.$$

Cherchons une solution de cette équation qui soit un produit de trois fonctions ne dépendant chacune que d'une des variables u, v, w

$$F(u, v, w) = f(u)\varphi(v)\psi(w).$$

On trouve la condition

$$\frac{f''}{f} + \frac{\varphi''}{\varphi} + (u^2 + v^2)\frac{\psi''}{\psi} = 0,$$

qui est satisfaite si l'on prend

$$\frac{\psi''}{\psi} = -m^2,$$

$$\frac{f''}{f} = \left[m^2 u^2 - 2m\left(n + \frac{1}{2}\right)\right],$$

$$\frac{\varphi''}{\varphi} = \left[m^2 v^2 + 2m\left(n + 1 - \frac{1}{2}\right)\right],$$

ce qui donne pour la solution cherchée de l'équation de Laplace

$$(17) \qquad F(u, v, w) = D_n(u\sqrt{2m})\, D_{-n-1}(v\sqrt{2m}) \cos mw.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

On peut encore, ainsi que l'a remarqué Hermite, trouver un lien élégant entre les polynomes $H_n(x)$ et l'équation, fondamentale dans la théorie de la propagation de la chaleur dans une barre rectiligne,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \tag{18}$$

En effet, cette équation admet comme solution la fonction

$$F(x, t) = e^{\alpha x + \alpha^2 t}, \tag{19}$$

où α désigne une constante arbitraire. Si l'on développe cette fonction selon les puissances de α,

$$e^{\alpha x + \alpha^2 t} = \sum \frac{\alpha^n}{(1, n)} F_n(x, t), \tag{20}$$

les polynomes $F_n(x, t)$ *ainsi définis seront évidemment des solutions de l'équation de la chaleur* (18); *or ces polynomes s'expriment très simplement au moyen des polynomes d'Hermite.*

Remarquons, en effet, que si l'on écrit

$$\alpha x + \alpha^2 t = (i\alpha\sqrt{2t})\left(\frac{x}{i\sqrt{2t}}\right) - \frac{(i\alpha\sqrt{2t})^2}{2},$$

la fonction génératrice $e^{\alpha x + \alpha^2 t}$ s'identifie avec la fonction génératrice d'Hermite $e^{ax - \frac{a^2}{2}}$ en y remplaçant

$$a \text{ par } i\alpha\sqrt{2t} \quad \text{et} \quad x \text{ par } \frac{x}{i\sqrt{2t}}.$$

Donc

$$e^{\alpha x + \alpha^2 t} = \sum \frac{(i\alpha\sqrt{2t})^n}{(1, n)} H_n\left(\frac{x}{i\sqrt{2t}}\right). \tag{21}$$

Par conséquent on obtient pour l'expression du polynome qui vérifie l'équation de la chaleur, en rapprochant (20) et (21),

$$F_n(x, t) = i^n (2t)^{\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{x}{i\sqrt{2t}}\right), \tag{22}$$

d'où, en remplaçant H_n par son expression développée (4).

$$F_n(x, t) = \sum_{j=0}^{j=\frac{n}{2}} \frac{(-n, 2j)}{(1, j)} x^{n-2j} t^j. \tag{23}$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

CX. — Expression du polynome $H_n(x)$ par une intégrale définie. Relations intégrales entre les polynomes $H_n(x)$ et les fonctions hypersphériques $V^s_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n)$.

De même que les fonctions sphériques d'ordre supérieur $V^s_n(x)$, les polynomes d'Hermite peuvent se représenter par une intégrale définie remarquable.

Partons de la formule

$$1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

qui s'écrit aussi en y remplaçant u par $u - ia$ et en multipliant les deux membres par $e^{ax - \frac{a^2}{2}}$,

$$e^{ax - \frac{a^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{a(x+iu) - \frac{u^2}{2}} du.$$

D'où, en développant les deux membres selon les puissances de a,

$$H_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x+iu)^n e^{-\frac{u^2}{2}} du. \tag{24}$$

Cette expression a été donnée par M. Angelescu [1] et par M. Niels Nielsen [2]. En développant le binome $(x+iu)^n$ et en s'appuyant sur les deux relations

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^{2k+1} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^{2k} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1.3\ldots(2k-1) = \frac{(1, 2k)}{2^k(1, k)},$$

on retombe sur l'expression (4) de $H_n(x)$.

De l'expression classique de la fonction eulérienne

$$\Gamma(k) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{k-1} du \qquad (k > 0)$$

on déduit, par le changement de variable $2u = \alpha t^2$,

$$2^{k-1}\Gamma(k)\alpha^{-k} = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha\frac{t^2}{2}} t^{2k-1} dt. \tag{25}$$

---

[1] Angelescu, *Thèse*, p. 33.

[2] N. Nielsen, *Recherches sur les polynomes d'Hermite*, p. 49.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Faisons dans cette formule

$$\alpha = 1 - 2a_1x_1 - \ldots - 2a_nx_n + a_1^2 + \ldots + a_n^2, \qquad k = \frac{n+s-1}{2};$$

la quantité qui figure au premier membre

$$2^{\frac{n+s-3}{2}}\Gamma\left(\frac{n+s-1}{2}\right)[1 - 2a_1x_1 - \ldots - 2a_nx_n + a_1^2 + \ldots + a_n^2]^{-\frac{n+s-1}{2}}$$

n'est pas autre chose que la fonction génératrice des polynomes $V^s_{m_1,\ldots,m_n}$.

D'autre part,

$$e^{\alpha\frac{t^2}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2}} \times e^{t^2\left(a_1x_1 - \frac{a_1^2}{2}\right)} \times \ldots \times e^{t^2\left(a_nx_n - \frac{a_n^2}{2}\right)}.$$

Or l'une quelconque des exponentielles qui figurent dans ce produit, soit

$$e^{t^2\left(a_jx_j - \frac{a_j^2}{2}\right)},$$

pouvant s'écrire

$$e^{(ta_j)\,tx_j - \frac{(ta_j)^2}{2}},$$

on voit que

$$e^{\alpha\frac{t^2}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2}} \times \left[\sum \frac{a_1^{m_1}t^{m_1}}{(1, m_1)} H_{m_1}(tx_1)\right] \times \ldots \times \left[\sum \frac{a_n^{m_n}t^{m_n}}{(1, m_n)} H_{m_n}(tx_n)\right].$$

Si dans les deux membres de la relation (25), ainsi transformée, on identifie les coefficients de $a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n}$, on obtient la formule [1]

$$(26) \qquad 2^{\frac{n+s-3}{2}}\Gamma\left(\frac{n+s-1}{2}\right)V^s_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^{+\infty} t^{2k-n+s-2}e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{H_{m_1}(tx_1)}{(1, m_1)} \ldots \frac{H_{m_n}(tx_n)}{(1, m_n)}\,dt.$$

On peut remarquer dans cette relation que la fonction sous le signe intégral se décompose en un produit de n polynomes ne dépendant chacun que d'une des variables $x_1, \ldots, x_n$, alors qu'il n'en est pas en général ainsi de $V^s_{m_1,\ldots,m_n}$.

On peut d'ailleurs exécuter l'inversion de cette relation en exprimant le produit des n polynomes d'Hermite en fonction de $V^s_{m_1,\ldots,m_n}$.

Partons de la formule de Hankel

$$\frac{1}{\Gamma(k)} = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^z z^{-k}\,dz,$$

où le contour C est tracé dans le plan de la variable complexe z de la manière suivante : il longe le bord inférieur de l'axe réel depuis $-\infty$ jusqu'à o; décrit un cercle dans le sens direct autour de o; longe le bord supérieur de l'axe réel depuis o jusqu'à $-\infty$. En désignant par α

---

[1] J. Kampé de Fériet, *Sur une formule d'addition des polynomes d'Hermite* (*Det. Kgl. Danske Videnskabernes Selskab : Mathematisk-fysiske Meddelelser*, V, 2, 1923). — Cette formule avait été donnée par M. Niels Nielsen (*loc. cit.*, p. 48) dans le cas d'une seule variable

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

une quantité positive, on en déduit

$$(27)\qquad \frac{e^{\alpha}}{\Gamma(k)} = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{z}(z-\alpha)^{-k}\,dz.$$

Posons

$$\alpha = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n - \frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{2}, \qquad k = \frac{n+s-1}{2}.$$

D'où

$$\begin{aligned}(z-\alpha)^{-k} &= \left[z - a_1x_1 - \ldots - a_nx_n + \frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{2}\right]^{-\frac{n+s-1}{2}}\\ &= z^{-\frac{n+s-1}{2}}\left[1 - 2\left(\frac{a_1}{\sqrt{2z}}\right)\left(\frac{x_1}{\sqrt{2z}}\right) - \ldots - 2\left(\frac{a_n}{\sqrt{2z}}\right)\left(\frac{x_n}{\sqrt{2z}}\right) + \left(\frac{a_1}{\sqrt{2z}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{a_n}{\sqrt{2z}}\right)^2\right]^{-\frac{n+s-1}{2}}\\ &= z^{-\frac{n+s-1}{2}}\sum\left(\frac{a_1}{\sqrt{2z}}\right)^{m_1}\cdots\left(\frac{a_n}{\sqrt{2z}}\right)^{m_n} V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}\left(\frac{x_1}{\sqrt{2z}}, \ldots, \frac{x_n}{\sqrt{2z}}\right).\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}e^{\alpha} &= e^{\left(a_1x_1 - \frac{a_1^2}{2}\right)} \times \ldots \times e^{\left(a_nx_n - \frac{a_n^2}{2}\right)}\\ &= \left[\sum \frac{a_1^{m_1}}{(1, m_1)} H_{m_1}(x_1)\right] \times \ldots \times \left[\sum \frac{a_n^{m_n}}{(1, m_n)} H_{m_n}(x_n)\right].\end{aligned}$$

En identifiant dans les deux membres de l'équation (27) les coefficients de $a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}$, on en tire la relation [1]

$$(28)\qquad \frac{2^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+s-1}{2}\right)}\frac{H_{m_1}(x_1)}{(1, m_1)}\cdots\frac{H_{m_n}(x_n)}{(1, m_n)} = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{z} z^{-\frac{\mu+n+s-1}{2}} V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}\left(\frac{x_1}{\sqrt{2z}}, \ldots, \frac{x_n}{\sqrt{2z}}\right)dz.$$

CXI. — Formule d'addition.

On peut obtenir pour les polynomes $H_n(x)$, une relation qui constitue une sorte de formule d'addition, en considérant la fonction

$$e^{a_1x_1 + \ldots + a_nx_n - \frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{2}}.$$

En effet, d'une part, on peut écrire

$$\begin{aligned}(29)\qquad e^{a_1x_1 + \ldots + a_nx_n - \frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{2}} &= e^{a_1x_1 - \frac{a_1^2}{2}} \times \ldots \times e^{a_nx_n - \frac{a_n^2}{2}}\\ &= \left[\sum \frac{a_1^{m_1}}{(1, m_1)} H_{m_1}(x_1)\right] \times \ldots \times \left[\sum \frac{a^{m_n}}{(1, m_n)} H_{m_n}(x_n)\right]\end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned}(30)\qquad e^{a_1x_1 + \ldots + a_nx_n - \frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{2}} &= e^{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}\cdot\frac{a_1x_1 + \ldots + a_nx_n}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}} - \frac{(\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2})^2}{2}}\\ &= \sum \frac{(a_1^2 + \ldots + a_n^2)^{\frac{\mu}{2}}}{(1, \mu)} H_{\mu}\left[\frac{a_1x_1 + \ldots + a_nx_n}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}\right].\end{aligned}$$

---

[1] J. Kampé de Fériet, *loc. cit.* — Cette formule avait également été donnée dans le cas d'une variable par M. Niels Nielsen

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Or, de l'expression (4) de H_n on tire

$$(a_1^2+\ldots+a_n^2)^{\frac{\mu}{2}} H_\mu\left[\frac{a_1x_1+\ldots+a_nx_n}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}}\right]=\sum_{j=0}^{j=\frac{\mu}{2}}\frac{(-1)^j}{2^j}\frac{(-\mu,2j)}{(1,j)}(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)^{\mu-2j}(a_1^2+\ldots+a_n^2)^j,$$

ce qui montre que ce polynome est homogène de degré μ par rapport aux constantes $a_1, \ldots, a_n$. En identifiant dans les deux développements (29) et (30) les termes homogènes de degré μ en $a_1, \ldots, a_n$, on en tire la relation [1]

$$(31)\qquad \frac{(a_1^2+\ldots+a_n^2)^{\frac{\mu}{2}}}{(1,\mu)} H_\mu\left[\frac{a_1x_1+\ldots+a_nx_n}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}}\right]=\sum_{m_1+\ldots+m_n=\mu}\frac{a_1^{m_1}}{(1,m_1)}\cdots\frac{a_n^{m_n}}{(1,m_n)}H_{m_1}(x_1)\ldots H_{m_n}(x_n)$$

On peut donner à la formule (31) une forme très condensée assez curieuse

$$H_\mu\left[\frac{a_1x_1+\ldots+a_nx_n}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}}\right]=\left[\frac{a_1H(x_1)+\ldots+a_nH(x_n)}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}}\right]^\mu$$

en convenant de remplacer dans le développement du second membre une puissance telle que $[H(x_1)]^{m_1}$ par le polynome $H_{m_1}(x_1)$.

On obtient encore une forme équivalente, en posant dans le deuxième membre

$$m_1=\mu-k_1,\quad\ldots\quad m_n=\mu-k_n\qquad(0\leq k_1,\ldots,0\leq k_n),$$

d'où

$$k_1+\ldots+k_n=(n-1)\mu,$$

et en remarquant que, d'après la formule (8),

$$\frac{1}{(1,\mu-k_1)}H_{\mu-k_1}(x_1)=\frac{1}{(1,\mu)}\frac{d^{k_1}H_\mu(x_1)}{dx_1^{k_1}}.$$

Donc

$$(32)\qquad (1,\mu)^{n-1}\frac{(a_1^2+\ldots+a_n^2)^{\frac{\mu}{2}}}{(a_1\ldots a_n)^\mu}H_\mu\left[\frac{a_1x_1+\ldots+a_nx_n}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n}}\right]=\sum_{k_1+\ldots+k_n=(n-1)\mu}\frac{1}{a_1^{k_1}}\cdots\frac{1}{a_n^{k_n}}\frac{d^{k_1}H_\mu(x_1)}{dx_1^{k_1}}\cdots\frac{d^{k_n}H_\mu(x_n)}{dx_n^{k_n}}.$$

Quelques cas particuliers de la formule générale (31) sont intéressants à considérer :

1° En faisant $a_1=\ldots=a_n=1$, $x_1=\ldots=x_n=x$, *on exprime un polynome d'Hermite dont l'argument est* $\sqrt{n}\,x$ *en fonction des polynomes dont l'argument est* x :

$$n^{\frac{\mu}{2}}H_\mu(\sqrt{n}\,x)=\sum_{m_1+\ldots+m_n=\mu}\frac{(1,\mu)}{(1,m_1)\ldots(1,m_n)}H_{m_1}(x)\ldots H_{m_n}(x).$$

2° En faisant $a_1=\ldots=a_n=1$ et en remplaçant $x_1, \ldots, x_n$ par $\sqrt{n}\,x_1, \ldots, \sqrt{n}\,x_n$, puis en appliquant à chacun des polynomes du deuxième membre la formule précédente, on obtient

$$n^\mu H_\mu(x_1+\ldots+x_n)=\sum\frac{(1,\mu)}{(1,m_{1,1})\ldots(1,m_{1,n})\ldots(1,m_{n,1})\ldots(1,m_{n,n})}H_{m_{1,1}}(x_1)\ldots H_{m_{1,n}}(x_1)\ldots H_{m_{n,1}}(x_n)\ldots H_{m_{n,n}}(x_n).$$

[1] J. Kampé de Fériet, *loc. cit.*

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

la sommation étant étendue à toutes les valeurs positives ou nulles des n^2 entiers $m_{i,j}$ vérifiant la condition

$$(m_{1,1}+\ldots+m_{1,n})+\ldots+(m_{n,1}+\ldots+m_{n,n})=\mu.$$

Le terme général contient n^2 polynomes H dont n dépendent de x_i. Par exemple pour $n=2$,

$$2^\mu H_\mu(x+y)=\sum\frac{(1,\mu)}{(1,p)(1,q)(1,r)(1,s)}H_p(x)H_q(x)H_r(y)H_s(y)$$
$$(\text{avec } p+q+r+s=\mu).$$

3° En prenant $n=2$, et faisant

$$a_1=1,\qquad a_2=\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda},\qquad x_1=x,\qquad x_2=0,$$

on a

$$H_\mu(\lambda x)=\sum\frac{(1,\mu)}{(1,m)(1,n)}\lambda^m(1-\lambda^2)^{\frac{n}{2}}H_m(x)H_n(0).$$

Or, d'après (4′) et (4″),

$$H_{2k+1}(0)=0,\qquad H_{2k}(0)=\frac{(-1)^k}{2^k}\frac{(1,2k)}{(1,k)},$$

d'où

$$H_\mu(\lambda x)=\lambda^\mu H_\mu(x)-\frac{\mu(\mu-1)}{2.1}\lambda^{\mu-2}(1-\lambda^2)H_{\mu-2}(x)+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{2^2\,1.2}\lambda^{\mu-4}(1-\lambda^2)^2H_{\mu-4}(x)\ldots$$

En rapprochant cette formule de (4), il est clair qu'on peut écrire symboliquement

$$H_\mu(\lambda x)=(1-\lambda^2)^{\frac{\mu}{2}}H_\mu\left[\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}H(x)\right]$$

en convenant de remplacer dans le deuxième membre une puissance telle que $[H(x)]^m$ par le polynome $H_m(x)$; en prenant $\lambda=\frac{1}{\sqrt{2}}$ on retrouve une formule donnée par P. Appell [1] :

$$H_\mu[H(x)]=2^{\frac{\mu}{2}}H_\mu\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

CXII. — Propriété d'orthogonalité des polynomes $H_n(x)$.

Hermite a établi pour ses polynomes $H_n(x)$ une propriété d'orthogonalité. Nous la déduirons d'une formule qui constitue la limite de la propriété connue des fonctions $V_n^{(s)}(x)$ [*voir* la formule (3-LXXXVII)]

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{s-1}{2}}F(x)V_n^s(x)\,dx=\frac{1}{2^n}\frac{(s,n)}{\left(\frac{s+1}{2},n\right)}\frac{1}{(1,n)}\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{n+\frac{s-1}{2}}\frac{d^nF}{dx^n}\,dx.$$

---

[1] P. Appell, *Ann. École Normale*, 2e série, t. IX, 1880, p. 119.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Considérons l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} F(x) H_n(x)\, dx$$

où nous supposons la fonction $F(x)$ telle que

$$\left| e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d^k F}{dx^k} \right|_{x=\pm\infty} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

En remplaçant $H_n(x)$ par son expression (5), nous avons d'abord

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} F(x) H_n(x)\, dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) dx.$$

Appliquons la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b u v^{(n)}\, dx = \left| u v^{(n-1)} - u' v^{(n-2)} + \ldots - (-1)^n u^{n-1} v \right|_a^b + (-1)^n \int_a^b u^{(n)} v\, dx$$

en prenant

$$u = F(x), \qquad v = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Or les termes tout intégrés sont de la forme

$$(-1)^k \frac{d^k F}{dx^k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = (-1)^n \frac{d^k F}{dx^k} e^{-\frac{x^2}{2}} H_{n-k}(x) \qquad (k = 0, \ldots, n-1).$$

Par conséquent ils sont nuls aux limites, en vertu des conditions imposées à $F(x)$. Nous obtenons donc la relation remarquable

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} F(x) H_n(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d^n F}{dx^n}\, dx. \tag{33}$$

Elle est applicable en particulier lorsque la fonction $F(x)$ est un polynome, ce qui conduit à cette proposition :

L'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} P(x) H_n(x)\, dx,$$

où $P(x)$ désigne un polynome de degré inférieur à n, est nulle.

De la formule (33) *résulte, comme l'a démontré Hermite, que les fonctions*

$$D_n(x) = e^{-\frac{x^2}{4}} H_n(x)$$

forment un système orthogonal.

Considérons, en effet, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} D_m(x) D_n(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_m(x) H_n(x)\, dx.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Lorsque les indices m et n sont différents, on peut toujours supposer, pour fixer les idées, $m < n$; donc

$$(34)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_m(x) H_n(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d^n H_m}{dx^n}\, dx = 0.$$

Si, au contraire, $m = n$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)^2\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d^n H_n}{dx^n}\, dx.$$

Or

$$\frac{d^n H_n}{dx^n} = (1, n) H_0 = (1, n),$$

d'où

$$(35)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)^2\, dx = (1, n)\sqrt{2\pi}.$$

CXIII. — Développement d'une fonction en série de polynomes $H_n(x)$ par la méthode de Fourier.

La propriété d'orthogonalité du système de polynomes $H_n(x)$ permet de calculer, par la méthode de Fourier, les coefficients du développement d'une fonction arbitraire sous la forme

$$(36)\qquad F(x) = \sum A_n H_n(x).$$

Multiplions les deux termes de cette relation par $e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)\, dx$ et intégrons entre les limites $x = -\infty$ et $x = +\infty$. Admettons :

1° que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} F(x) H_n(x)\, dx$ ait un sens;

2° que le développement du second membre puisse s'intégrer terme à terme;

nous obtenons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} F(x) H_n(x)\, dx = \sum A_m \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_m(x) H_n(x)\, dx.$$

En vertu de (34) et (35) une seule de ces intégrales est différente de zéro : celle où $m = n$; on en déduit

$$(37)\qquad A_n = \frac{1}{(1, n)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} F(x) H_n(x)\, dx.$$

Lorsque la fonction $F(x)$ vérifie les conditions

$$\left| e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d^k F}{dx^k} \right|_{x=-\infty} = 0,$$

on peut, en se servant de la formule (33), donner aux coefficients A_n la forme équivalente,

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

souvent plus commode,

$$A_n = \frac{1}{(1, n)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d^n F}{dx^n} dx. \tag{38}$$

On en déduit notamment que *le développement d'un polynome de degré p ne contient que les polynomes $H_n(x)$ de degré n inférieur ou au plus égal à p.*

Appliquons la formule (38) au calcul des coefficients du développement d'une puissance de x :

$$\frac{x^p}{(1, p)} = \sum A_n H_n(x).$$

Comme

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{x^p}{(1, p)}\right] = \frac{x^{p-n}}{(1, p-n)},$$

on a

$$A_n = \frac{1}{(1, n)} \frac{1}{(1, p-n)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} x^{p-n} dx.$$

En remplaçant cette intégrale par sa valeur (CX), on obtient immédiatement le développement cherché :

$$\frac{x^p}{(1, p)} = \sum_{k=0}^{k=\frac{p}{2}} \frac{1}{2^k} \frac{1}{(1, k)} \frac{H_{p-2k}(x)}{(1, p-2k)}; \tag{39}$$

il ne contient que des polynomes dont le degré est de même parité que p.

Ce fait est d'ailleurs général : le développement d'une fonction paire (ou impaire) ne contient que des polynomes $H_n(x)$ dont le degré n est pair (ou impair).

On peut étudier la convergence du développement d'une fonction en série de polynomes $H_n(x)$, les coefficients A_n étant déterminés par la formule (37), en s'inspirant de la méthode suivie pour étudier la convergence des séries trigonométriques dont les coefficients sont calculés par la formule de Fourier.

Considérons la somme des $(k+1)$ premiers termes du développement

$$F(x) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} A_n H_n(x); \tag{36}$$

soit

$$S_k(x) = \sum_{n=0}^{n=k} A_n H_n(x). \tag{40}$$

En remplaçant le coefficient A_n par son expression (37), on a

$$S_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{n=k} \frac{H_n(x)}{(1, n)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} F(y) H_n(y) dy$$

ou

$$S_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} F(y) \left[\sum_{n=0}^{n=k} \frac{1}{(1, n)} H_n(x) H_n(y)\right] dy. \tag{41}$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Posons

$$\sigma_k(x, y) = \sum_{n=0}^{n=k} \frac{1}{(1, n)} H_n(x) H_n(y).$$

L'artifice suivant conduit facilement à une expression simple pour $\sigma_k(x, y)$; on a évidemment

$$(x - y)\sigma_k(x, y) = \sum_{n=0}^{n=k} \frac{1}{(1, n)} [x H_n(x) H_n(y) - H_n(x) y H_n(y)].$$

Or, d'après l'équation de récurrence (9),

$$\begin{aligned} x H_n(x) H_n(y) - H_n(x) y H_n(y) &= [H_{n+1}(x) + n H_{n-1}(x)] H_n(y) - [H_{n+1}(y) + n H_{n-1}(y)] H_n(x) \\ &= [H_{n+1}(x) H_n(y) - H_n(x) H_{n+1}(y)] \\ &\quad - n[H_n(x) H_{n-1}(y) - H_{n-1}(x) H_n(y)]. \end{aligned}$$

Si l'on porte cette dernière expression dans $(x - y)\sigma_k(x, y)$, les quantités entre crochets se détruisent deux à deux, sauf la dernière, et l'on obtient

$$(42) \qquad \sigma_k(x, y) = \frac{1}{(1, k)} \frac{H_{k+1}(x) H_k(y) - H_k(x) H_{k+1}(y)}{x - y}.$$

La somme des $(k + 1)$ premiers termes du développement de $F(x)$ a donc pour expression

$$(43) \qquad S_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(1, k)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} F(y) \frac{H_{k+1}(x) H_k(y) - H_k(x) H_{k+1}(y)}{x - y} dy.$$

Pour que le développement converge et représente $F(x)$, *il est nécessaire et suffisant que la différence*

$$F(x) - S_k(x)$$

tende vers zéro quand k augmente indéfiniment.

Or, si l'on applique la formule (43) à la fonction

$$F(x) = 1$$

pour laquelle $S_k(x) = 1$, quel que soit k, on voit que

$$1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(1, k)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{H_{k+1}(x) H_k(y) - H_k(x) H_{k+1}(y)}{x - y} dy,$$

d'où, en multipliant les deux membres par $F(x)$,

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(1, k)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} F(x) \frac{H_{k+1}(x) H_k(y) - H_k(x) H_{k+1}(y)}{x - y} dy.$$

Par conséquent :

$$(44) \qquad F(x) - S_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(1, k)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{F(x) - F(y)}{x - y} [H_{k+1}(x) H_k(y) - H_k(x) H_{k+1}(y)] dy.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

La recherche des cas où le développement (36) *représente* F (x) *est donc ramenée à l'étude des conditions suffisantes pour que l'expression du second membre tende vers zéro avec* $\frac{1}{k}$.

Cette étude n'a pas encore été faite, à notre connaissance, en faisant sur la fonction F (x) des hypothèses aussi générales que dans le cas des séries trigonométriques; H. Galbrun [1] a établi la convergence dans tout intervalle (a, b) où la fonction F (x) est continue et ne présente qu'un nombre fini de maxima et de minima.

CXIV. — Développement d'une fonction en série de polynomes $H_n(x)$ au point de vue de la théorie des équations intégrales.

Les polynomes $H_n(x)$ formant un système de fonctions orthogonales, il est logique de chercher à former une équation intégrale dont ils soient les solutions fondamentales. Une telle équation a été obtenue par Mme Vera Myller-Lebedeff [2], en appliquant à l'équation de la chaleur

$$\mathfrak{L}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}$$

et à son adjointe

$$\mathfrak{M}(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

les méthodes générales de M. Hilbert; mais on peut retrouver son résultat par une méthode élémentaire.

Dans l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1, \tag{45}$$

faisons le changement de variable

$$u = \frac{t - \xi s}{\sqrt{1 - \xi^2}} - a\sqrt{1 - \xi^2}, \tag{46}$$

où t désigne la nouvelle variable, s un paramètre, a et ξ des constantes, ξ étant inférieur à 1 en valeur absolue.

Nous tirons de (46)

$$du = \frac{dt}{\sqrt{1 - \xi^2}}, \qquad -\frac{u^2}{2} = -\frac{(t - \xi s)^2}{2(1 - \xi^2)} + a(t - \xi s) - \frac{a^2}{2}(1 - \xi^2)$$
$$= -\frac{(t - \xi s)^2}{2(1 - \xi^2)} + \left[at - \frac{a^2}{2}\right] - \left[(a\xi)s - \frac{(a\xi)^2}{2}\right].$$

Portons ces expressions dans (45), après en avoir multiplié les deux membres par la constante

$$e^{(a\xi)s - \frac{(a\xi)^2}{2}}.$$

---

[1] H. Galbrun, *Bull. Soc. math.*, t. XLI, 1913, p. 24-47.

[2] Mme V. Myller-Lebedeff, *Theorie der Integralgleichungen in Anwendung auf eingie Reihenentwicklungen* (*Math. Ann.*, t. LXIV, 1907, p. 388).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

elle se transforme en

$$(47)\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\xi s)^2}{2(1-\xi^2)}} \times e^{at-\frac{a^2}{2}}\,dt = e^{(a\xi)s-\frac{(a\xi)^2}{2}}.$$

Si dans cette relation nous remplaçons les fonctions

$$e^{at-\frac{a^2}{2}} \quad \text{et} \quad e^{(a\xi)s-\frac{(a\xi)^2}{2}}$$

par leurs développements respectifs

$$\sum \frac{a^n}{(1,n)} H_n(t) \quad \text{et} \quad \sum \frac{(a\xi)^n}{(1,n)} H_n(s)$$

et si nous identifions dans les deux membres les coefficients de a, nous obtenons finalement

$$(48)\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{1}{\xi^n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\xi s)^2}{2(1-\xi^2)}} H_n(t)\,dt = H_n(s).$$

Le polynome H_n *est donc une solution fondamentale, relative à la valeur caractéristique*

$$\lambda = \frac{1}{\xi^n},$$

de l'équation de Fredholm de première espèce :

$$(49)\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\xi s)^2}{2(1-\xi^2)}}\varphi(t)\,dt = \varphi(s).$$

Le noyau de cette équation intégrale, contenant le paramètre ξ assujetti à la condition $|\xi| < 1$, est dissymétrique; il est facile de tirer de (48) une équation à noyau symétrique vérifiée par la fonction $D_n(x)$.

En effet,

$$-\frac{(t-\xi s)^2}{2(1-\xi^2)} = -\frac{1+\xi^2}{1-\xi^2}\frac{t^2+s^2}{4} + \frac{\xi}{1-\xi^2}ts - \frac{t^2}{4} + \frac{s^2}{4}.$$

Donc, en multipliant les deux membres de l'équation (48) par $e^{\frac{s^2}{4}}$, elle s'écrit

$$(50)\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{1}{\xi^n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1+\xi^2}{1-\xi^2}\frac{t^2+s^2}{4}+\frac{\xi}{1-\xi^2}ts}\left[e^{\frac{t^2}{4}}H_n(t)\right]dt = e^{-\frac{s^2}{4}}H_n(s).$$

La fonction $D_n(x) = e^{-\frac{x^2}{4}}H_n(x)$ *est une solution fondamentale relative à la valeur caractéristique* $\lambda = \frac{1}{\xi^n}$ *de l'équation de Fredholm :*

$$(51)\qquad \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} K(t,s)\psi(t)\,dt = \psi(s)$$

ayant pour noyau la fonction symétrique

$$(51\,bis)\qquad K(t,s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\frac{1+\xi^2}{1-\xi^2}\frac{t^2+s^2}{4}+\frac{\xi}{1-\xi^2}ts}.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Au point de vue de l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire F (x) par le développement (36) la propriété précédente permet d'utiliser les théorèmes généraux de la théorie des équations intégrales.

En effet, le développement (36) peut s'écrire :

$$e^{-\frac{x^2}{4}} F(x) = \sum A_n \left[e^{-\frac{x^2}{4}} H_n(x) \right] = \sum A_n D_n(x);$$

il rentre ainsi dans *la catégorie des développements en série de fonctions fondamentales dérivées d'un noyau symétrique.* On peut lui appliquer notamment le théorème fondamental d'Hilbert-Schmidt [1].

Toute fonction F (x), *pouvant être mise sous la forme*

$$e^{-\frac{x^2}{4}} F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t, x) G(t) \, dt,$$

où G (x) *est une fonction à carré intégrable, est représentable par un développement de la forme* (36) *absolument et uniformément convergent dans tout intervalle fini.*

CXV. — Les séries de polynomes $H_n(x)$ où les coefficients sont donnés « a priori ».

Dans les paragraphes précédents nous avons supposé que les coefficients du développement

$$F(x) = \sum A_n H_n(x) \tag{36}$$

étaient calculés à partir de F (x) par la méthode de Fourier.

On peut aussi se proposer d'étudier des séries de polynomes H_n, où les coefficients A_n sont donnés *a priori*, sans se préoccuper de rechercher s'il existe, ou non, une fonction F (x) dont ils puissent se déduire par la méthode de Fourier.

D'autre part, la fonction F (x) étant donnée, il se pourrait aussi qu'on ait calculé les coefficients A_n par une méthode qui ne soit pas celle de Fourier.

Supposons, par exemple, que F (x) soit définie par le développement en série de puissances

$$F(x) = \sum a_n x^n;$$

en remplaçant x^n par son développement (39), on obtient immédiatement l'expression suivante

---

[1] *Voir* E. Goursat, *Cours d'Analyse*, t. III, p. 446.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

de A_n, due à M. Niels Nielsen [1] :

$$(52)\qquad (1, n)A_n = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{2^k} \frac{(1, n+2k)}{(1, k)} a_{n+2k}.$$

Réciproquement les A_n étant donnés, on en déduit les a_n par la relation

$$(53)\qquad (1, n)a_n = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} \frac{(1, n+2k)}{(1, k)} A_{n+2k},$$

également due au même auteur.

Prenons, comme application,

$$A_n = \frac{a^n}{(1, n)};$$

il résulte de (53) que

$$(1, n)a_n = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} \frac{a^{n+2k}}{(1, k)} = a^n e^{-\frac{a^2}{2}};$$

donc

$$F(x) = e^{-\frac{a^2}{2}} \sum \frac{a^n}{(1, n)} x^n = e^{ax - \frac{a^2}{2}};$$

nous retombons ainsi sur la fonction génératrice des polynomes $H_n(x)$.

Donnons un exemple du problème inverse : partons de la fonction de Kummer particulière

$$F(\nu, x) = \frac{1}{\nu} G(\nu, \nu+1, x) = \sum \frac{1}{\nu+n} \frac{x^n}{(1, n)}.$$

La formule (52) donne

$$(1, n)A_n = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{2^k} \frac{1}{(1, k)} \frac{1}{\nu+n+2k} = \frac{1}{2} F\left(\frac{\nu+n}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

d'où le développement curieux, dû à M. Niels Nielsen :

$$F(\nu, x) = \frac{1}{2} \sum F\left(\frac{\nu+n}{2}, \frac{1}{2}\right) \frac{H_n(x)}{(1, n)}.$$

Étendons le cas particulier de M. Niels Nielsen en donnant le développement d'une fonction de Kummer quelconque

$$(2\text{-XL})\qquad G(\alpha, \gamma, x) = \sum \frac{(\alpha, n)}{(\gamma, n)} \frac{x^n}{(1, n)}.$$

On a

$$(1, n)A_n = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{2^k} \frac{1}{(1, k)} \frac{(\alpha, n+2k)}{(\gamma, n+2k)}$$

$$= \frac{(\alpha, n)}{(\gamma, n)} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{2^k} \frac{1}{(1, k)} \frac{\left(\frac{\alpha+n}{2}, k\right)\left(\frac{\alpha+n+1}{2}, k\right)}{\left(\frac{\gamma+n}{2}, k\right)\left(\frac{\gamma+n+1}{2}, k\right)}.$$

[1] Niels Nielsen, *loc. cit.*, p. 52.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

On reconnaît dans la série une fonction hypergéométrique confluente d'ordre 2 et de classe 1 (XLVI); d'où le développement de la fonction de Kummer :

$$G(\alpha, \gamma, x) = \sum \frac{(\alpha, n)}{(\gamma, n)} F\left(\begin{matrix} \frac{\alpha+n}{2}, & \frac{\alpha+n+1}{2} \\ \frac{\gamma+n}{2}, & \frac{\gamma+n+1}{2} \end{matrix}, \frac{1}{2}\right) \frac{H_n(x)}{(1, n)}.$$

Les exemples précédents montrent qu'il y a effectivement lieu de considérer des séries de polynomes d'Hermite, où les coefficients ne sont pas calculés par la méthode de Fourier; que peut-on dire de la convergence de telles séries, auxquelles ne s'appliquent pas les résultats des paragraphes CXIII et CXIV ?

L'étude de ces séries a été faite par M. Niels Nielsen; il établit d'abord le lemme suivant :

Si l'on pose $\nu = \frac{n}{2}$ ou $\nu = \frac{n-1}{2}$, selon que n est pair ou impair, on a

$$\left|\frac{H_n(x)}{(1, n)}\right| < \frac{1}{2^\nu} \frac{1}{(1, \nu)} e^{c\sqrt{2\nu}}|.$$

Il en déduit cette proposition :

Si la série de puissances

$$\sum A_n \frac{(1, n)}{(1, \nu)} x^n$$

a son rayon de convergence plus grand que l'unité, le développement (36) est absolument convergent quel que soit x et uniformément convergent dans tout intervalle borné.

Il la compléte par ce corollaire :

Si les coefficients A_n sont déduits des coefficients a_n d'une série de puissances par la formule (52) et si $\lim \sqrt[n]{(1, n)\, a_n}$ est finie, la série de polynomes d'Hermite est absolument convergente quel que soit x et uniformément convergente dans tout intervalle borné.

Ceci s'applique notamment à la fonction de Kummer, qui est une fonction entière de x.

CXVI. — Une propriété de minimum des polynomes d'Hermite.

Soit $F(x)$ une fonction définie pour toutes les valeurs réelles de x et telle que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} [F(x)]^2\, dx$$

ait un sens; proposons-nous de déterminer le polynome de degré p qui rend minima l'intégrale

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} [F(x) - P_p(x)]^2\, dx.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Un polynome de degré p peut toujours s'exprimer linéairement au moyen des polynomes $H_n(x)$ de degré inférieur ou égal à p

$$P_p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 H_1(x) + \ldots + \alpha_p H_p(x),$$

où

$$\alpha_k = \frac{1}{(1, k)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} P_p(x) H_k(x)\, dx.$$

L'intégrale J, étant ainsi une fonction du second degré des $(p+1)$ indéterminées $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$, pour qu'elle soit minima il est nécessaire que

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_0} = \frac{\partial J}{\partial \alpha_1} = \ldots = \frac{\partial J}{\partial \alpha_p} = 0.$$

Or

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_k} = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) [F(x) - P_p(x)]\, dx.$$

D'où les conditions du minimum

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) P_p(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) F(x)\, dx \qquad (k = 0, 1, \ldots, p).$$

Si ces conditions sont réalisées on aura effectivement un minimum, car d'autre part

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_j(x) H_k(x)\, dx = 0 \qquad (k \neq j),$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \alpha_k^2} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x)^2\, dx = 2(1, k)\sqrt{2\pi} > 0.$$

Supposons maintenant que $F(x)$ soit développable par la méthode de Fourier en série de polynomes $H_n(x)$, soit

$$F(x) = \sum_{k=0}^{k=+\infty} A_k H_k(x),$$

ou

$$A_k = \frac{1}{(1, k)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} F(x) H_k(x)\, dx.$$

Les conditions du minimum s'écrivent donc simplement

$$\alpha_k = A_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, p);$$

d'où

$$P_p(x) = \sum_{k=0}^{k=p} A_k H_k(x).$$

Le polynome de degré p qui rend minima l'intégrale J s'obtient en limitant au terme d'indice p le développement de la fonction $F(x)$ en série de polynomes $H_n(x)$.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

CXVII. — Les fonctions d'Hermite de seconde espèce.

On peut définir le polynome $H_n(x)$ comme la solution de l'équation différentielle d'Hermite :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + ny = 0, \tag{12}$$

vérifiant les conditions [qui se tirent immédiatement des expressions (4') et (4'')]

$$\left\{\begin{array}{ll} H_{2n}(0) = \dfrac{(-1)^n}{2^n}\dfrac{(1, 2n)}{(1, n)}, & H'_{2n}(0) = 0 \quad \text{(indice pair)}, \\ H_{2n+1}(0) = 0, & H'_{2n+1}(0) = \dfrac{(-1)^n}{2^n}\dfrac{(1, 2n+1)}{(1, n)} \quad \text{(indice impair)}. \end{array}\right. \tag{54}$$

Par analogie avec le terme employé dans la théorie des fonctions sphériques, M. Niels Nielsen appelle *fonction d'Hermite de seconde espèce* une deuxième intégrale particulière de l'équation (12), $h_n(x)$ définie par les conditions :

$$\left\{\begin{array}{ll} h_{2n}(0) = 0, & h'_{2n}(0) = (-1)^n(1, n)\,2^n \quad \text{(indice pair)}, \\ h_{2n+1}(0) = (-1)^{n+1}(1, n)\,2^n, & h'_{2n+1}(0) = 0 \quad \text{(indice impair)}. \end{array}\right. \tag{55}$$

La seule inspection des deux séries de conditions (54) et (55) montre que les deux intégrales particulières $H_n(x)$ et $h_n(x)$ sont indépendantes, de sorte que l'intégrale générale de l'équation différentielle (12) peut se mettre sous la forme (n étant un entier)

$$y(x) = AH_n(x) + Bh_n(x).$$

La fonction de seconde espèce ne se réduit pas à un polynome; M. Nielsen l'a exprimé élégamment au moyen des seules transcendantes

$$e^{\frac{x^2}{2}} \quad \text{et} \quad \int_0^x e^{\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

D'abord il est aisé d'obtenir l'expression de $h_n(x)$ sous forme d'une série entière.

Remarquons que l'équation (12) se ramenant à l'équation de Kummer (*voir* CVIII), elle admet toujours (que n soit entier ou non) comme intégrales particulières les deux fonctions entières, figurant sur la formule (14) :

$$u_n(x) = G\left(-\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, \frac{x^2}{2}\right) = \sum_{k=0}^{k=+\infty} 2^k \frac{\left(-\frac{n}{2}, k\right)}{(1, 2k)} x^{2k}, \tag{56}$$

$$v_n(x) = xG\left(\frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2}{2}\right) = \sum_{k=0}^{k=+\infty} 2^k \frac{\left(-\frac{n-1}{2}, k\right)}{(1, 2k+1)} x^{2k+1}. \tag{57}$$

Quelle que soit la parité de l'entier n, il y a toujours un des deux nombres $-\frac{n}{2}$ ou $-\frac{n-1}{2}$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

qui est un entier négatif, donc l'une des deux intégrales qui se réduit à un polynome : ce sont respectivement $u_{2n}(x)$ et $v_{2n+1}(x)$.

Comme les intégrales $u_n(x)$, $v_n(x)$ vérifient évidemment les conditions

$$(58)\qquad \begin{cases} u_n(0) = 1, & u'_n(0) = 0, \\ v_n(0) = 0, & v'_n(0) = 1, \end{cases}$$

il est clair, d'après les relations (54) et (55), que les solutions particulières $H_n(x)$ et $h_n(x)$ s'expriment de la manière suivante :

$$(59)\qquad \begin{cases} H_{2n}(x) = \dfrac{(-1)^n}{2^n}\dfrac{(1, 2n)}{(1, n)} G\left(-n, \dfrac{1}{2}, \dfrac{x^2}{2}\right), \\ h_{2n}(x) = (-1)^n 2^n (1, n)\, x\, G\left(\dfrac{1}{2} - n, \dfrac{3}{2}, \dfrac{x^2}{2}\right) \end{cases}$$

et

$$(60)\qquad \begin{cases} H_{2n+1}(x) = \dfrac{(-1)^n}{2^n}\dfrac{(1, 2n+1)}{(1, n)} x\, G\left(-n, \dfrac{3}{2}, \dfrac{x^2}{2}\right), \\ h_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} 2^n (1, n)\, G\left(-\dfrac{1}{2} - n, \dfrac{1}{2}, \dfrac{x^2}{2}\right). \end{cases}$$

Ce qui, d'après (56) et (57), conduit aux expressions développées :

$$(62)\qquad \begin{cases} H_{2n}(x) = \dfrac{(-1)^n}{2^n}\dfrac{(1, 2n)}{(1, n)} \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} 2^k \dfrac{(-n, k)}{(1, 2k)} x^{2k}, \\ h_{2n}(x) = (-1)^n 2^n (1, n) \displaystyle\sum_{k=0}^{k=+\infty} 2^k \dfrac{\left(-n + \frac{1}{2}, k\right)}{(1, 2k+1)} x^{2k+1}; \end{cases}$$

$$(63)\qquad \begin{cases} H_{2n+1}(x) = \dfrac{(-1)^n}{2^n}\dfrac{(1, 2n+1)}{(1, n)} \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} 2^k \dfrac{(-n, k)}{(1, 2k+1)} x^{2k+1}, \\ h_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} 2^n (1, n) \displaystyle\sum_{k=0}^{k=+\infty} 2^k \dfrac{\left(-n - \frac{1}{2}, k\right)}{(1, 2k)} x^{2k}. \end{cases}$$

On peut remarquer que les expressions de H_{2n} et H_{2n+1} sont identiques à celles fournies par les formules (4′) et (4″).

En différentiant les séries représentant h_{2n} et h_{2n+1}, on voit immédiatement que la *fonction de seconde espèce vérifie la même équation fonctionnelle que* $H_n(x)$:

$$(64)\qquad \frac{dh_n}{dx} = nh_{n-1},$$

d'où, pour $n \geqq p$,

$$\frac{d^p h_n}{dx^p} = n(n-1)\ldots(n-p+1)\, h_{n-p}$$

et, en particulier,

$$\frac{d^n h_n}{dx^n} = (1, n)\, h_0.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Si dans l'équation différentielle (12) on remplace $\frac{dh_n}{dx}$ par nh_{n-1} et $\frac{d^2h_n}{dx^2}$ par $n(n-1)h_{n-2}$, on obtient, entre trois fonctions de seconde espèce consécutives, la relation de récurrence

$$h_n - xh_{n-1} + (n-1)h_{n-2} = 0,$$

identique à l'équation aux différences finies (9) vérifiée par les polynomes $H_n(x)$ et qui permet d'exprimer toutes les fonctions h_n au moyen de h_1 et de h_0.

Le fait que les deux intégrales particulières $H_n(x)$ et $h_n(x)$ de l'équation différentielle d'Hermite (12) vérifient la même équation fonctionnelle

$$\frac{1}{(1, n)}\frac{d^p H_n}{dx^p} = \frac{1}{(1, n-p)} H_{n-p}, \qquad \frac{1}{(1, n)}\frac{d^p h_n}{dx^p} = \frac{1}{(1, n-p)} h_{n-p} \qquad (n \geqq p),$$

correspond à une propriété remarquable de cette équation :

La dérivée $p^{ième}$ d'une intégrale quelconque de l'équation d'Hermite vérifie l'équation différentielle qui s'en déduit en remplaçant n par $n-p$.

En effet, dérivons p fois l'équation (12) :

$$\frac{d^{p+2}y}{dx^{p+2}} - \left(x\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}} + p\frac{d^p y}{dx^p}\right) + n\frac{d^p y}{dx^p} = 0,$$

d'où, en posant $z = \frac{d^p y}{dx^p}$,

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - x\frac{dz}{dx} + (n-p)z = 0. \tag{12 bis}$$

Ceci étant établi, une intégrale y de (12) est nécessairement de la forme

$$y = A\,H_n(x) + B\,h_n(x),$$

d'où

$$z = A\frac{d^p H_n}{dx^p} + B\frac{d^p h_n}{dx^p}.$$

Mais, puisque z est une intégrale de (12 *bis*),

$$z = A'H_{n-p}(x) + B'h_{n-p}(x).$$

Donc la double équation fonctionnelle exprime simplement que l'on a

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = n(n-1)\ldots(n-p+1).$$

Le déterminant de Wronski des deux intégrales $H_n(x)$ et $h_n(x)$ a pour expression, d'après une formule classique,

$$H_n(x)h'_n(x) - H'_n(x)h_n(x) = [H_n(0)h'_n(0) - H'_n(0)h_n(0)]\,e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Or les relations (54) et (55) donnent, quelle que soit la parité de n,

$$H_n(0)\,h'_n(0) - H'_n(0)\,h_n(0) = (1, n),$$

d'où

$$H_n(x)\,h'_n(x) - H'_n(x)\,h_n(x) = (1, n)\,e^{\frac{x^2}{2}} \tag{65}$$

ou encore, en vertu de

$$H'_n = n\,H_{n-1}, \qquad h'_n = n\,h_{n-1},$$

$$H_n(x)\,h_{n-1}(x) - H_{n-1}(x)\,h_n(x) = (1, n-1)\,e^{\frac{x^2}{2}} \qquad (n \geq 1). \tag{66}$$

Ces deux relations permettent d'exprimer h_n en fonction de h_0 et de $e^{\frac{x^2}{2}}$. D'abord, pour $n = 0$ la relation (65) donne

$$h'_0(x) = e^{\frac{x^2}{2}},$$

d'où [1]

$$h_0(x) = \int_0^x e^{\frac{x^2}{2}}\,dx. \tag{67}$$

Puis, pour $n = 1$, (66) s'écrit

$$h_1(x) = H_1(x)\,h_0(x) - e^{\frac{x^2}{2}},$$

d'où, successivement,

$$h_2(x) = H_2(x)\,h_0(x) - x\,e^{\frac{x^2}{2}},$$

$$h_3(x) = H_3(x)\,h_0(x) - (x^2 - 2)\,e^{\frac{x^2}{2}}.$$

On peut ainsi mettre d'une manière générale la fonction de seconde espèce sous la forme

$$h_n(x) = H_n(x)\,h_0(x) - G_{n-1}(x)\,e^{\frac{x^2}{2}}, \tag{68}$$

où $G_{n-1}(x)$ désigne un polynome de degré $n-1$ qu'on peut calculer de proche en proche et dont M. Niels Nielsen a étudié les propriétés [2]; deux polynomes G_n consécutifs sont liés par la relation

$$H_n(x)\,G_n(x) = H_{n+1}(x)\,G_{n-1}(x) + (1, n), \tag{69}$$

qui peut leur servir de définition, en y joignant la condition

$$G_0 = 1.$$

---

[1] Cette expression se déduit aussi très simplement de (59)

$$h_0(x) = x\,G\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{2}\right)$$

en y remplaçant la fonction de Kummer par l'intégrale définie (7-XL).

[2] M. P. Humbert a étudié des polynomes qui se ramènent aisément à ceux-là : *Sur deux polynomes associés aux polynomes de Legendre* (*Bull. Soc. math.*, t. XLVI, 1918, p. 120-151).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

On déduit d'ailleurs de (68), en utilisant l'équation de récurrence (9) vérifiée à la fois par H_n et h_n, que les polynomes G_n vérifient l'équation de récurrence

$$G_n - x G_{n-1} + n G_{n-2} = 0.$$

Voici les valeurs des premiers polynomes G :

$G_0 = 1$	$G_4 = x^4 - 9x^2 + 8$
$G_1 = x$	$G_5 = x^5 - 14x^3 + 33x$
$G_2 = x^2 - 2$	$G_6 = x^6 - 20x^4 + 87x^2 - 48$
$G_3 = x^3 - 5x$	.....

Aux propriétés indiquées par M. Niels Nielsen, on peut ajouter cette remarque : dans la fraction continue envisagée par Hermite (CVII, p. 337), la réduite de rang n, qui a pour dénominateur le polynome $H_n(x)$, a précisément pour numérateur le polynome $G_{n-1}(x)$.

M. P. Humbert [1] a donné de la fonction de seconde espèce une expression qui est en quelque sorte symétrique de l'expression (5) du polynome d'Hermite :

$$(5) \qquad H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right).$$

On y parvient, en remarquant que y désignant une intégrale de l'équation (12), la fonction $z = e^{-\frac{x^2}{2}} y$ vérifie évidemment l'équation

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + x\frac{dz}{dx} + (n+1) z = 0,$$

dont l'intégrale générale est par conséquent

$$(70) \qquad z = A e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) + B e^{-\frac{x^2}{2}} h_n(x).$$

Or cette équation se déduit, en la dérivant n fois, de l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + x\frac{du}{dx} + u = 0,$$

qui admet, d'après ce qui précède, pour intégrale

$$u = A' e^{-\frac{x^2}{2}} + B' e^{-\frac{x^2}{2}} h_0(x).$$

Donc

$$(71) \qquad z = \frac{d^n u}{dx^n} = A' \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) + B' \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}} h_0\right).$$

---

[1] P. Humbert, *C. R. Acad, Sc.*, t. 167, 1918, p. 524. Voir aussi *A Reduction-formula for the Functions of the Second Kind connected with the Polynomials of Applied Mathematics* (*Proc. of the r. Soc. of Edimburgh*, t. XXXVIII, Part. I, p. 68).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Les deux expressions (70) et (71) de z doivent être identiques : ce qui donne, en tenant compte de la formule (5), cette expression remarquable de la fonction de seconde espèce :

$$h_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-\frac{x^2}{2}} h_0(x)\right] \tag{72}$$

On pourrait aussi chercher à étendre aux fonctions d'Hermite de seconde espèce la propriété classique des fonctions sphériques de seconde espèce, établie par F. Neumann; on serait alors conduit à envisager le développement :

$$\frac{1}{y-x} = \sum \frac{1}{(1, n)} K_n(y) H_n(x); \tag{73}$$

mais, comme l'a montré M. Niels Nielsen, on ne peut en déduire pour $K_n(y)$ qu'une expression formelle par une série divergente; en effet,

$$\frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^n}{y^{n+1}},$$

donc, en vertu de la formule (52),

$$K_n(y) = \sum_{k=0}^{k=+\infty} \frac{1}{2^k} \frac{(1, n+2k)}{(1, k)} \frac{1}{y^{2k+n+1}}. \tag{74}$$

A la place de cette série divergente, on peut donner de $K_n(y)$ une autre expression, mais qui n'a pas de sens lorsque y est réel.

En effet, en appliquant les formules (37) et (38) au développement (73), on voit que

$$K_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{y-x} H_n(x)\, dx, \tag{75}$$

ou

$$K_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{(y-x)^{n-1}}\, dx. \tag{76}$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

CHAPITRE II.

LES POLYNOMES D'HERMITE A PLUSIEURS VARIABLES DÉRIVÉS D'UNE EXPONENTIELLE.

CXVIII. — Définition des deux systèmes de polynomes adjoints.

Après avoir étudié les polynomes à une variable $H_n(x)$, Hermite [1] définit, pour les généraliser, *deux systèmes de polynomes à n variables, adjoints l'un à l'autre* comme le sont les polynomes $U^{(s)}_{m_1, \ldots, m_n}$ et $V^{(s)}_{m_1, \ldots, m_n}$.

Les polynomes $H_n(x)$ sont définis par le développement

$$e^{-\frac{1}{2}\varphi(x-h)} = e^{-\frac{1}{2}\varphi(x)} \sum \frac{h^n}{(1, n)} H_n(x),$$

où $\varphi(x)$ est une forme quadratique à une variable :

$$\varphi(x) = x^2.$$

Pour étendre cette définition, Hermite introduit *la forme quadratique à n variables* :

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \Sigma a_{ik} x_i x_k \qquad (a_{ik} = a_{ki}) \tag{1}$$

définie et positive :

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad \ldots, \quad a_{nn} > 0,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix} > 0. \tag{2}$$

Il prend le développement de l'exponentielle :

$$e^{-\frac{1}{2}\varphi(x_1-h_1, \ldots, x_n-h_n)},$$

selon les puissances des *constantes arbitraires* $h_1, \ldots, h_n$ comme fonction génératrice de ses polynomes à n variables, qu'il désigne par le symbole $U_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n)$.

Afin d'éviter toute confusion avec les polynomes dérivant du potentiel, nous les représenterons par $H_{m_1, \ldots, m_n}$ et nous poserons

$$e^{-\frac{1}{2}\varphi(x_1-h_1, \ldots, x_n-h_n)} = e^{-\frac{1}{2}\varphi(x_1, \ldots, x_n)} \sum \frac{h_1^{m_1}}{(1, m_1)} \cdots \frac{h_n^{m_n}}{(1, m_n)} H_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n), \tag{3}$$

[1] Ch. Hermite, *Comptes rendus*, t. 68, 1864, p. 93-266, ou *Œuvres*, t. II, p. 293-308.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

ou, en développant la forme quadratique du premier membre

$$(4)\qquad e^{\frac{1}{2}\left(h_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\ldots+h_n\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)-\frac{1}{2}\varphi(h_1,\ldots,h_n)}=\sum\frac{h_1^{m_1}}{(1,m_1)}\cdots\frac{h_n^{m_n}}{(1,m_n)}\mathrm{H}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n),$$

ou encore

$$(5)\qquad e^{\frac{1}{2}\left(x_1\frac{\partial\varphi}{\partial h_1}+\ldots+x_n\frac{\partial\varphi}{\partial h_n}\right)-\frac{1}{2}\varphi(h_1,\ldots,h_n)}=\sum\frac{h_1^{m_1}}{(1,m_1)}\cdots\frac{h_n^{m_n}}{(1,m_n)}\mathrm{H}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n),$$

Au système des polynomes $\mathrm{H}_{m_1,\ldots,m_n}$, qui constitue une première généralisation des polynomes H_n à une variable, Hermite en adjoint un second de la manière suivante :

il introduit de nouvelles constantes $k_1, \ldots, k_n$, définies en fonction de $h_1, \ldots, h_n$, par les dérivées partielles de $\varphi(h_1, \ldots, h_n)$

$$(6)\qquad k_1=\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial h_1},\qquad\ldots,\qquad k_n=\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial h_n};$$

soit alors :

$$(7)\qquad \psi(\xi_1,\ldots,\xi_n)=\sum\frac{\mathrm{A}_{ik}}{\Delta}\xi_i\xi_k$$

la forme quadratique adjointe de $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, A_{ik} désignant le mineur relatif à a_{ik} du déterminant Δ; les anciennes constantes $h_1, \ldots, h_n$ s'expriment en fonction des nouvelles par les dérivées partielles de $\psi(k_1, \ldots, k_n)$

$$(8)\qquad h_1=\frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial k_1},\qquad\ldots,\qquad h_n=\frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial k_n}.$$

Remplaçons $h_1, \ldots, h_n$ par ces valeurs dans la fonction génératrice (3), puis développons-la selon les puissances des nouvelles constantes $k_1, \ldots, k_n$; nous poserons, d'après Hermite :

$$(9)\qquad e^{-\frac{1}{2}\varphi\left(x_1-\frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial k_1},\ldots,x_n-\frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial k_n}\right)}=e^{-\frac{1}{2}\varphi(x_1,\ldots,x_n)}\sum\frac{k_1^{m_1}}{(1,m_1)}\cdots\frac{k_n^{m_n}}{(1,m_n)}\mathrm{G}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n),$$

le symbole $\mathrm{G}_{m_1,\ldots,m_n}$ étant seulement substitué, afin d'éviter toute confusion, au symbole $\mathrm{V}_{m_1,\ldots,m_n}$ qu'il a employé.

Si au lieu de partir de (3), on prend la fonction génératrice sous la forme (5), on obtient, en vertu de l'identité fondamentale des formes adjointes,

$$\varphi(h_1,\ldots,h_n)\equiv\psi(k_1,\ldots,k_n),$$

la nouvelle forme, équivalente à (9), de la fonction génératrice :

$$(10)\qquad e^{k_1x_1+\ldots+k_nx_n-\frac{1}{2}\psi(k_1,\ldots,k_n)}=\sum\frac{k_1^{m_1}}{(1,m_1)}\cdots\frac{k_n^{m_n}}{(1,m_n)}\mathrm{G}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n).$$

On peut donner à cette fonction génératrice une dernière forme qui montre plus clairement encore la liaison entre les polynomes $\mathrm{H}_{m_1,\ldots,m_n}$ et $\mathrm{G}_{m_1,\ldots,m_n}$.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Soient $\xi_1, \ldots, \xi_n$ des variables définies en fonction des variables $x_1, \ldots, x_n$ par les dérivées partielles de $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \qquad \ldots, \qquad \xi_n = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_n},$$

d'où réciproquement

$$x_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_1}, \qquad \ldots, \qquad x_n = \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_n};$$

on a

$$k_1x_1 + \ldots + k_nx_n - \frac{1}{2}\psi(k_1, \ldots, k_n) = \frac{1}{2}\left(k_1\frac{\partial\psi}{\partial\xi_1} + \ldots + k_n\frac{\partial\psi}{\partial\xi_n}\right) - \frac{1}{2}\psi(k_1, \ldots, k_n)$$

$$= -\frac{1}{2}\psi(\xi_1 - k_1, \ldots, \xi_n - k_n) + \frac{1}{2}\psi(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Nous déduisons donc de (10) que

$$(11) \qquad e^{-\frac{1}{2}\psi(\xi_1 - k_1, \ldots, \xi_n - k_n)} = e^{-\frac{1}{2}\psi(\xi_1, \ldots, \xi_n)} \sum \frac{k_1^{m_1}}{(1, m_1)} \cdots \frac{k_n^{m_n}}{(1, m_n)} G_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n).$$

Par conséquent, du rapprochement des deux fonctions génératrices (3) et (11), on conclut que *l'on passe du système des polynomes* $H_{m_1, \ldots, m_n}$ *à celui des polynomes* $G_{m_1, \ldots, m_n}$ *en remplaçant, d'une part la forme quadratique* φ *par son adjointe* ψ, *d'autre part les variables* $x_1, \ldots, x_n$ *par les variables* $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

En appliquant la formule de Taylor au développement des fonctions génératrices (3) et (11) on voit immédiatement que *les polynomes* H *et* G *s'expriment par des dérivées partielles* de la manière suivante :

$$H_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n) = (-1)^{m_1 + \ldots + m_n} e^{\frac{1}{2}\varphi(x_1, \ldots, x_n)} \frac{\partial^{m_1 + \ldots + m_n}}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}} \left[e^{-\frac{1}{2}\varphi(x_1, \ldots, x_n)}\right],$$

$$G_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n) = (-1)^{m_1 + \ldots + m_n} e^{\frac{1}{2}\psi(\xi_1, \ldots, \xi_n)} \frac{\partial^{m_1 + \ldots + m_n}}{\partial\xi_1^{m_1} \ldots \partial\xi_n^{m_n}} \left[e^{-\frac{1}{2}\psi(\xi_1, \ldots, \xi_n)}\right].$$

Lorsque la forme φ est identique à son adjointe les deux systèmes de polynomes $H_{m_1, \ldots, m_n}$ et $G_{m_1, \ldots, m_n}$ se confondent et ces polynomes dégénèrent en un produit de polynomes H à une variable.

Soit, en effet,

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2 = \psi(x_1, \ldots, x_n);$$

on a

$$e^{h_1x_1 + \ldots + h_nx_n - \frac{1}{2}(h_1^2 + \ldots + h_n^2)} = \sum \frac{h_1^{m_1}}{(1, m_1)} \cdots \frac{h_n^{m_n}}{(1, m_n)} H_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n),$$

$$e^{k_1x_1 + \ldots + k_nx_n - \frac{1}{2}(k_1^2 + \ldots + k_n^2)} = \sum \frac{k_1^{m_1}}{(1, m_1)} \cdots \frac{k_n^{m_n}}{(1, m_n)} G_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n),$$

$$e^{h_1x_1 + \ldots + h_nx_n - \frac{1}{2}(h_1^2 + \ldots + h_n^2)} = e^{h_1x_1 - \frac{h_1^2}{2}} \times \ldots \times e^{h_nx_n - \frac{h_n^2}{2}};$$

il est donc clair que, dans ce cas particulier,

$$H_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n) = G_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n) = H_{m_1}(x_1) \ldots H_{m_n}(x_n).$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

D'après une remarque de F. Mehler, ces polynomes spéciaux sont la limite des polynomes à n variables dérivant du potentiel dans l'espace à $n+s+1$ dimensions, quand s augmente indéfiniment.

En effet, dans la fonction génératrice

$$[1-2a_1x_1-\ldots-2a_nx_n+a_1^2+\ldots+a_n^2]^{-\frac{n+s-1}{2}}=\Sigma a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n),$$

remplaçons $a_1, \ldots, a_n$ par $\frac{h_1}{\sqrt{s}}, \ldots, \frac{h_n}{\sqrt{s}}$ et $x_1, \ldots, x_n$ par $\frac{x_1}{\sqrt{s}}, \ldots, \frac{x_n}{\sqrt{s}}$;

$$\left[1-\frac{2}{s}\left(h_1x_1+\ldots+h_nx_n-\frac{h_1^2+\ldots+h_n^2}{2}\right)\right]^{-\frac{n+s-1}{2}}=\Sigma h_1^{m_1}\ldots h_n^{m_n}s^{-\frac{\mu}{2}}V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}\left(\frac{x_1}{\sqrt{s}},\ldots,\frac{x_n}{\sqrt{s}}\right),$$

et faisons tendre s vers l'infini :

$$\lim_{s=+\infty}\left[1-\frac{2}{s}\left(h_1x_1+\ldots+h_nx_n-\frac{h_1^2+\ldots+h_n^2}{2}\right)\right]^{-\frac{n+s-1}{2}}=e^{h_1x_1+\ldots+h_nx_n-\frac{1}{2}(h_1^2+\ldots+h_n^2)}.$$

Nous obtenons, à la limite, la relation

$$\lim_{s=+\infty}s^{-\frac{\mu}{2}}V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}\left(\frac{x_1}{\sqrt{s}},\ldots,\frac{x_n}{\sqrt{s}}\right)=\frac{H_{m_1}(x_1)}{(1,m_1)}\cdots\frac{H_{m_n}(x_n)}{(1,m_n)},$$

qui généralise la formule (2-CV).

Dans le cas général, quand la forme quadratique φ n'est pas identique à son adjointe, les polynomes $H_{m_1,\ldots,m_n}$ et $G_{m_1,\ldots,m_n}$ peuvent être considérés comme les limites des polynomes définis par Hermite [1] et étudiés par M. Angelescu [2] :

$$\left\{\left(\frac{1}{2}x_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+\ldots+\frac{1}{2}x_n\frac{\partial\varphi}{\partial a_n}-1\right)^2+\varphi(a_1,\ldots,a_n)[1-\varphi(x_1,\ldots,x_n)]\right\}^{-\frac{s}{2}}=\Sigma a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}\mathcal{V}^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n},$$

$$[1-2a_1x_1-\ldots-2a_nx_n+\psi(a_1,\ldots,a_n)]^{-\frac{n+s-1}{2}}=\Sigma a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}\mathcal{V}^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}.$$

On voit facilement, en effet, que

$$\lim_{s=+\infty}s^{-\frac{\mu}{2}}\mathcal{V}^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}\left(\frac{x_1}{\sqrt{s}},\ldots,\frac{x_n}{\sqrt{s}}\right)=\frac{H_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n)}{(1,m_1)\ldots(1,m_n)},$$

$$\lim_{s=+\infty}s^{-\frac{\mu}{2}}\mathcal{V}^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}\left(\frac{x_1}{\sqrt{s}},\ldots,\frac{x_n}{\sqrt{s}}\right)=\frac{G_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n)}{(1,m_1)\ldots(1,m_n)}.$$

---

(1) HERMITE, *Œuvres*, t. II, p. 321.

(2) ANGELESCU, *Thèse*, p. 95 et 107.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

CXIX. — Propriété d'orthogonalité des deux systèmes de polynomes adjoints.

La considération simultanée des deux systèmes de polynomes $H_{m_1,\ldots,m_n}$ *et* $G_{m_1,\ldots,m_n}$ *pour généraliser les polynomes à une variable* $H_n(x)$ *est justifiée, comme dans le cas des deux systèmes adjoints* $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ *et* $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$, *par une propriété d'orthogonalité.*

En effet, dans le cas de n variables, ce ne sont pas les deux intégrales :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\varphi(x_1,\ldots,x_n)} H_{m_1,\ldots,m_n} H_{q_1,\ldots,q_n}\, dx_1\ldots dx_n$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\varphi(x_1,\ldots,x_n)} G_{m_1,\ldots,m_n} G_{q_1,\ldots,q_n}\, dx_1\ldots dx_n,$$

qu'il faut considérer pour généraliser l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_m(x)\, H_n(x)\, dx,$$

mais bien l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\varphi(x_1,\ldots,x_n)} H_{m_1,\ldots,m_n} G_{q_1,\ldots,q_n}\, dx_1\ldots dx_n.$$

Car, comme l'a démontré Hermite, c'est cette dernière intégrale qui est nulle tant que l'on n'a pas à la fois

$$m_1 = q_1, \qquad \ldots, \qquad m_n = q_n.$$

Ce sont d'ailleurs les deux systèmes de polynomes $H_{m_1,\ldots,m_n}$ *et* $G_{m_1,\ldots,m_n}$ *qui ont fourni le premier exemple d'une telle propriété d'orthogonalité;* à l'époque où Hermite énonçait ce résultat, aucun des systèmes de fonctions envisagés dans l'Analyse (polynomes de Legendre, fonctions trigonométriques, etc.) n'en avait offert d'exemple. *L'idée d'associer deux systèmes différents de fonctions, pour obtenir une intégrale qui s'annule tant que tous les indices de ces fonctions ne sont pas égaux, est une des plus originales de ce travail de l'illustre géomètre.*

Le deuxième exemple de ce fait est encore dû à Hermite (LXXVII) qui l'a énoncé dans son étude, postérieure d'un an, des polynomes $U_{m,n}$ et $V_{m,n}$ en démontrant que l'intégrale

$$\iint_{(1-x^2-y^2\geq 0)} U_{m,n} V_{p,q}\, dx\, dy$$

est nulle tant que l'on n'a pas à la fois $m = p$, $n = q$ (voir la remarque de la page 258).

Voici comment Hermite établit la propriété d'orthogonalité des deux systèmes de polynomes $H_{m_1,\ldots,m_n}$ et $G_{m_1,\ldots,m_n}$.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Proposons-nous d'évaluer l'intégrale

$$(12)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\varphi(x_1,\ldots,x_n)}\,\mathrm{H}_{m_1,\ldots,m_n}\,\mathrm{G}_{q_1,\ldots,q_n}\,dx_1\ldots dx_n$$

qui a un sens, puisque la forme quadratique $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *est définie et positive.*

En posant, pour abréger,

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1 - h_1, \ldots, x_n - h_n) + \varphi\left(x_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial k_1}, \ldots, x_n - \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial k_n}\right) - \varphi(x_1, \ldots, x_n),$$

on a, d'après les formules de définition (3) et (9),

$$e^{-\frac{1}{2}\Phi(x_1,\ldots,x_n)} = e^{-\frac{1}{2}\varphi(x_1,\ldots,x_n)}\left[\sum\frac{h_1^{m_1}}{(1, m_1)}\cdots\frac{h_n^{m_n}}{(1, m_n)}\,\mathrm{H}_{m_1,\ldots,m_n}\right]\left[\sum\frac{k_1^{m_1}}{(1, m_1)}\cdots\frac{k_n^{m_n}}{(1, m_n)}\,\mathrm{G}_{m_1,\ldots,m_n}\right].$$

Le développement en série, selon les puissances des constantes h et k, de l'intégrale

$$(13)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\Phi(x_1,\ldots,x_n)}\,dx_1\ldots dx_n,$$

aura pour terme général, d'après cela,

$$\frac{h_1^{m_1}}{(1, m_1)}\cdots\frac{h_n^{m_n}}{(1, m_n)}\,\frac{k_1^{q_1}}{(1, q_1)}\cdots\frac{k_n^{q_n}}{(1, q_n)}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\varphi(x_1,\ldots,x_n)}\,\mathrm{H}_{m_1,\ldots,m_n}\mathrm{G}_{q_1,\ldots,q_n}\,dx_1\ldots dx_n.$$

L'évaluation du développement de (13) nous fournit donc un moyen simple de calculer l'intégrale (12). Or, dans l'intégrale (13), faisons le changement de variables :

$$x_1 = \xi_1 + h_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial k_1}, \qquad \ldots, \qquad x_n = \xi_n + h_n + \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial k_n};$$

d'une part, les limites d'intégration pour les variables $\xi_1, \ldots, \xi_n$ restent toujours $-\infty$ et $+\infty$; d'autre part,

$$\Phi = \varphi\left(\xi_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial k_1}, \ldots, \xi_n + \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial k_n}\right) + \varphi(\xi_1 + h_1, \ldots, \xi_n + h_n) - \varphi\left(\xi_1 + h_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial k_1}, \ldots, \xi_n + h_n + \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial k_n}\right)$$

en développant les trois formes quadratiques, les termes du premier degré en $\xi_1, \ldots, \xi_n$ disparaissent :

$$\begin{aligned}\Phi &= \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n) + \varphi\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial k_1}, \ldots, \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial k_n}\right) + \varphi(h_1, \ldots, h_n) - \varphi\left(h_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial k_1}, \ldots, h_n + \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial k_n}\right)\\ &= \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial h_1}\frac{\partial\psi}{\partial k_1} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial h_n}\frac{\partial\psi}{\partial k_n}\right)\\ &= \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n) - 2(h_1 k_1 + \ldots + h_n k_n).\end{aligned}$$

Par conséquent, l'intégrale (13) est égale à

$$e^{(h_1 k_1 + \ldots + h_n k_n)}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\varphi(\xi_1,\ldots,\xi_n)}\,d\xi_1\ldots d\xi_n.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Cette dernière intégrale s'évalue aisément, en faisant sur $\xi_1, \ldots, \xi_n$ une substitution orthogonale, ramenant la forme quadratique définie positive $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ à une somme de carrés sans altérer son discriminant Δ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)} d\xi_1 \ldots d\xi_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(A_1\eta_1^2 + \ldots + A_n\eta_n^2)} d\eta_1 \ldots d\eta_n$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}A_1\eta_1^2} d\eta_1 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}A_n\eta_n^2} d\eta_n$$

$$= \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{A_1 \ldots A_n}} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\Delta}}.$$

Nous obtenons donc finalement la valeur de l'intégrale (13) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\Phi(x_1, \ldots, x_n)} dx_1 \ldots dx_n = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\Delta}} e^{(h_1k_1 + \ldots + h_nk_n)}.$$

Le développement de cette intégrale selon les puissances des constantes h et k s'écrit immédiatement :

$$(14) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\Phi(x_1, \ldots, x_n)} dx_1 \ldots dx_n = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\Delta}} \sum \frac{(h_1k_1)^{m_1}}{(1, m_1)} \cdots \frac{(h_nk_n)^{m_n}}{(1, m_n)}.$$

On en conclut par conséquent que l'*intégrale*

$$(12) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\varphi(x_1, \ldots, x_n)} H_{m_1, \ldots, m_n} G_{q_1, \ldots, q_n} dx_1 \ldots dx_n$$

est nulle tant que l'on n'a pas à la fois

$$q_1 = m_1, \qquad q_n = m_n;$$

dans ce cas elle a pour valeur

$$(15) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\varphi(x_1, \ldots, x_n)} H_{m_1, \ldots, m_n} G_{m_1, \ldots, m_n} dx_1 \ldots dx_n = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\Delta}} (1, m_1) \ldots (1, m_n).$$

CXX. — Expression générale des polynomes $H_{m,n}(x, y)$ et $G_{m,n}(x, y)$.

Le nombre n des variables ne modifiant pas, dès qu'il est supérieur à 1, les propriétés essentielles des polynomes d'Hermite, nous nous bornerons, dans ce Chapitre, au cas de $n = 2$, pour ne pas surcharger inutilement l'écriture.

Soient donc la forme quadratique, définie et positive

$$(16) \qquad \varphi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \qquad (a > 0, \quad c > 0, \Delta = ac - b^2 > 0),$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

et sa forme adjointe

$$\psi(\xi, \eta) = \frac{c}{\Delta}\xi^2 - 2\frac{b}{\Delta}\xi\eta + \frac{a}{\Delta}\eta^2; \tag{17}$$

nous posons, d'après les formules de définition (4) et (10),

$$e^{h(ax+by)+h'(bx+cy)-\frac{1}{2}(ah^2+2bhh'+ch'^2)} = \sum \frac{h^m}{(1, m)}\frac{h'^n}{(1, n)} H_{m,n}(x, y) \tag{18}$$

et

$$e^{kx+k'y-\frac{1}{2\Delta}(ck^2-2bkk'+ak'^2)} = \sum \frac{k^m}{(1, m)}\frac{k'^n}{(1, n)} G_{m,n}(x, y). \tag{19}$$

Hermite a donné l'expression générale des polynomes $G_{m,n}$ en fonction des polynomes à une variable H_n. Remarquons que

$$e^{kx+k'y-\frac{1}{2\Delta}(ck^2-2bkk'+ak'^2)} = e^{\frac{b}{\Delta}kk'} \times e^{kx-\frac{1}{2}\frac{c}{\Delta}k^2} \times e^{k'y-\frac{1}{2}\frac{a}{\Delta}k^2}.$$

Cette dernière expression se développe aisément sous la forme

$$\left[\sum\left(\frac{b}{\Delta}\right)^p \frac{(kk')^p}{(1, p)}\right]\left[\sum\left(\frac{c}{\Delta}\right)^{\frac{q}{2}} \frac{k^q}{(1, q)} H_q\left(x\sqrt{\frac{\Delta}{c}}\right)\right]\left[\sum\left(\frac{a}{\Delta}\right)^{\frac{r}{2}} \frac{k'^r}{(1, r)} H_r\left(y\sqrt{\frac{\Delta}{a}}\right)\right].$$

En cherchant, dans le produit de ces trois séries, le coefficient de $k^m k'^n$ on obtient l'expression du polynome $G_{m,n}$:

$$\begin{aligned} G_{m,n}(x, y) &= \frac{c^{\frac{m}{2}} a^{\frac{n}{2}}}{\Delta^{\frac{m+n}{2}}}\left[H_m\left(x\sqrt{\frac{\Delta}{c}}\right)H_n\left(y\sqrt{\frac{\Delta}{a}}\right) + \frac{b}{\sqrt{ac}}\frac{mn}{1}H_{m-1}\left(x\sqrt{\frac{\Delta}{c}}\right)H_{n-1}\left(y\sqrt{\frac{\Delta}{a}}\right) + \ldots\right] \\ &= \frac{c^{\frac{m}{2}} a^{\frac{n}{2}}}{\Delta^{\frac{m+n}{2}}}\sum \frac{b^j}{(ac)^{\frac{j}{2}}}\frac{(-m, j)(-n, j)}{(1, j)} H_{m-j}\left(x\sqrt{\frac{\Delta}{c}}\right)H_{n-j}\left(y\sqrt{\frac{\Delta}{a}}\right), \end{aligned} \tag{20}$$

le développement s'arrêtant de lui-même quand j est égal au plus petit des deux entiers m et n.

Pour parvenir à l'expression de $H_{m,n}$, il est inutile de faire de nouveaux calculs; il suffit d'appliquer la remarque générale d'après laquelle on passe de la fonction génératrice des G à celle des H, en remplaçant d'une part

$$x \text{ et } y \quad \text{par} \quad \xi = ax + by \quad \text{et} \quad \eta = bx + cy;$$

d'autre part ψ par son adjointe φ, c'est-à-dire

$$\frac{c}{\Delta}, \quad -\frac{b}{\Delta}, \quad \frac{a}{\Delta} \quad \text{par} \quad a, b, c.$$

Donc

$$H_{m,n}(x, y) = a^{\frac{m}{2}} c^{\frac{n}{2}} \sum (-1)^j \frac{b^j}{(ac)^{\frac{j}{2}}}\frac{(-m, j)(-n, j)}{(1, j)} H_{m-j}\left(\frac{\xi}{\sqrt{a}}\right) H_{n-j}\left(\frac{\eta}{\sqrt{c}}\right). \tag{21}$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Voici le tableau de ces polynomes jusqu'à $m+n=3$:

$H_{0,0}=1,$	$G_{0,0}=1,$	$H_{3,0}=\xi^3-3a\xi,$	$G_{3,0}=x^3-3\frac{c}{\Delta}x,$
$H_{1,0}=\xi,$	$G_{1,0}=x,$	$H_{2,1}=\xi^2\eta-2b\xi-a\eta,$	$G_{2,1}=x^2y+2\frac{b}{\Delta}x-\frac{c}{\Delta}y,$
$H_{0,1}=\eta,$	$G_{0,1}=y,$	$H_{1,2}=\xi\eta^2-2b\eta-c\xi,$	$G_{1,2}=xy^2+2\frac{b}{\Delta}y-\frac{a}{\Delta}x,$
$H_{2,0}=\xi^2-a,$	$G_{2,0}=x^2-\frac{c}{\Delta},$	$H_{0,3}=\eta^3-3c\eta,$	$G_{0,3}=y^3-3\frac{a}{\Delta}y.$
$H_{1,1}=\xi\eta-b,$	$G_{1,1}=xy+\frac{b}{\Delta},$		
$H_{0,2}=\eta^2-c,$	$G_{0,2}=y^2-\frac{a}{\Delta},$		

Les polynomes $H_{m,n}$ et $G_{m,n}$ sont de degré $m+n$, dans $H_{m,n}$ le terme du plus haut degré est $\xi^m\eta^n$; dans $G_{m,n}$, c'est x^my^n; les coefficients de ces polynomes sont eux-mêmes des polynomes à coefficients entiers :

par rapport aux quantités a, b, c, pour $H_{m,n}$;

par rapport aux quantités $\frac{c}{\Delta}$, $\frac{b}{\Delta}$, $\frac{a}{\Delta}$, pour $G_{m,n}$.

D'une manière générale, on a :

$$H_{m,n}=\xi^m\eta^n-\left[\frac{1}{2}\frac{m(m-1)}{1}a\,\xi^{m-2}\eta^n+\frac{mn}{1}b\,\xi^{m-1}\eta^{n-1}+\frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{1}c\,\xi^m\eta^{n-2}\right]+\ldots,$$

$$G_{m,n}=x^my^n-\left[\frac{1}{2}\frac{m(m-1)}{1}\frac{c}{\Delta}x^{m-2}y^n-\frac{mn}{1}\frac{b}{\Delta}x^{m-1}y^{n-1}+\frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{1}\frac{a}{\Delta}x^my^{n-2}\right]+\ldots.$$

Enfin, lorsque l'un des indices est nul, ces polynomes s'expriment simplement par un polynome H à une variable; en effet, on tire de (20) et (21) :

$$(22)\quad\left\{\begin{aligned}&H_{m,0}=a^{\frac{m}{2}}H_m\left(\frac{\xi}{\sqrt{a}}\right), &&H_{0,n}=c^{\frac{n}{2}}H_n\left(\frac{\eta}{\sqrt{c}}\right),\\ &G_{m,0}=\left(\frac{c}{\Delta}\right)^{\frac{m}{2}}H_m\left(x\sqrt{\frac{\Delta}{c}}\right), &&G_{0,n}=\left(\frac{a}{\Delta}\right)^{\frac{n}{2}}H_n\left(y\sqrt{\frac{\Delta}{a}}\right).\end{aligned}\right.$$

L'expression du groupe homogène des polynomes $H_{m,n}$ *et* $G_{m,n}$ *d'un degré donné* $m+n=\mu$ conduit à une généralisation intéressante de la formule d'addition des polynomes $H_n(x)$.

Remarquons que la fonction génératrice (18)

$$e^{h\xi+h'\eta-\frac{1}{2}\varphi(h,h')}$$

des polynomes $H_{m,n}$ se réduit à la fonction génératrice

$$e^{a'x'-\frac{a'^2}{2}}$$

des polynomes H_n, en posant

$$x'=\frac{h\xi+h'\eta}{\sqrt{\varphi(h,h')}},\qquad a'=\sqrt{\varphi(h,h')}.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Parallèlement au développement,

$$e^{h\xi + h'\eta - \frac{1}{2}\varphi(h,h')} = \sum \frac{h^m}{(1,m)} \frac{h'^n}{(1,n)} \mathrm{H}_{m,n}(x,y),$$

on peut donc écrire

$$e^{\frac{h\xi + h'\eta}{\sqrt{\varphi(h,h')}} - \frac{1}{2}[\sqrt{\varphi(h,h')}]^2} = \sum \frac{[\varphi(h,h')]^{\frac{\mu}{2}}}{(1,\mu)} \mathrm{H}_\mu \left[\frac{h\xi + h'\eta}{\sqrt{\varphi(h,h')}}\right].$$

Or l'expression (4-CVI)

$$[\varphi(h,h')]^{\frac{\mu}{2}} \mathrm{H}_\mu \left[\frac{h\xi + h'\eta}{\sqrt{\varphi(h,h')}}\right] = \sum_{=0}^{=\frac{\mu}{2}} \frac{(-1)^j}{2^j} \frac{(-\mu, 2j)}{(1,j)} [h\xi + h'\eta]^{\mu - 2j} [\varphi(h,h')]^j$$

est évidemment homogène de degré μ en h, h'. On obtient donc pour l'expression du groupe homogène des polynomes $\mathrm{H}_{m,n}$:

$$(23) \qquad \sum_{m+n=\mu} \frac{h^m}{(1,m)} \frac{h'^n}{(1,n)} \mathrm{H}_{m,n}(x,y) = \frac{[\varphi(h,h')]^{\frac{\mu}{2}}}{(1,\mu)} \mathrm{H}_\mu \left[\frac{h\xi + h'\eta}{\sqrt{\varphi(h,h')}}\right].$$

Si l'on prend en particulier $\varphi(h,h') = h^2 + h'^2$, le polynome $\mathrm{H}_{m,n}(x,y)$ dégénère en $\mathrm{H}_m(x)\,\mathrm{H}_n(y)$ et cette formule se confond alors avec la formule d'addition (31-CXI) du polynome H_n.

Un calcul identique conduit à l'expression du groupe homogène des polynomes $\mathrm{G}_{m,n}$:

$$(24) \qquad \sum_{m+n=\mu} \frac{k^m}{(1,m)} \frac{k'^n}{(1,n)} \mathrm{G}_{m,n}(x,y) = \frac{[\psi(k,k')]^{\frac{\mu}{2}}}{(1,\mu)} \mathrm{H}_\mu \left[\frac{kx + k'y}{\sqrt{\psi(k,k')}}\right].$$

CXXI. — Expression des polynomes $\mathrm{H}_{m,n}$ et $\mathrm{G}_{m,n}$ par les dérivées partielles d'une exponentielle.

Les polynomes $\mathrm{H}_{m,n}$ *et* $\mathrm{G}_{m,n}$ *s'expriment par des dérivées partielles* $(m+n)^{\text{ièmes}}$ *sous une forme élégante qui généralise l'expression*

$$(5\text{-CVI}) \qquad \mathrm{H}_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right].$$

En effet, si de la fonction génératrice, prise sous la forme (3),

$$e^{-\frac{1}{2}\varphi(x-h,y-h')} = e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)} \sum \frac{h^m}{(1,m)} \frac{h'^n}{(1,n)} \mathrm{H}_{m,n}(x,y),$$

on rapproche le développement de Taylor :

$$e^{-\frac{1}{2}\varphi(x-h,y-h')} = \sum \frac{h^m}{(1,m)} \frac{h'^n}{(1,n)} (-1)^{m+n} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}\left[e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)}\right],$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

on en tire immédiatement cette expression, donnée par Hermite :

$$(25)\qquad H_{m,n}(x, y) = (-1)^{m+n} e^{\frac{1}{2}\varphi(x, y)} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}\left[e^{-\frac{1}{2}\varphi(x, y)}\right].$$

De même, en partant de la seconde fonction génératrice, prise sous la forme (11) :

$$e^{-\frac{1}{2}\psi(\xi-k, \eta-k')} = e^{-\frac{1}{2}\psi(\xi, \eta)} \sum \frac{k^m}{(1, m)} \frac{k'^n}{(1, n)} G_{m,n}(x, y)$$

et en la rapprochant du développement de Taylor :

$$e^{-\frac{1}{2}\psi(\xi-k, \eta-k')} = \sum \frac{k^m}{(1, m)} \frac{k'^n}{(1, n)} (-1)^{m+n} \frac{\partial^{m+n}}{\partial \xi^n \partial \eta^n}\left[e^{-\frac{1}{2}\psi(\xi, \eta)}\right],$$

on obtient cette expression, symétrique de celle de $H_{m,n}$:

$$(26)\qquad G_{m,n}(x, y) = (-1)^{m+n} e^{\frac{1}{2}\psi(\xi, \eta)} \frac{\partial^{m+n}}{\partial \xi^m \partial \eta^n}\left[e^{-\frac{1}{2}\psi(\xi, \eta)}\right].$$

Un polynome $H_{m,n}$ *s'exprime linéairement en fonction des polynomes* $G_{p,q}$ *de même degré :* $p + q = m + n$.

Réciproquement, un polynome $G_{m,n}$ *s'exprime linéairement en fonction des polynomes* $H_{p,q}$ *de même degré.*

En effet, entre les dérivées par rapport aux variables x, y et les dérivées par rapport aux variables $\xi = ax + by$, $\eta = bx + cy$, on a les relations :

$$\frac{\partial}{\partial x} = a\frac{\partial}{\partial \xi} + b\frac{\partial}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = b\frac{\partial}{\partial \xi} + c\frac{\partial}{\partial \eta},$$
$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{c}{\Delta}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{b}{\Delta}\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{a}{\Delta}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{b}{\Delta}\frac{\partial}{\partial x};$$

d'autre part, entre les formes adjointes, on a l'identité

$$\varphi(x, y) \equiv \psi(\xi, \eta).$$

Les formules (25) et (26) peuvent donc encore s'écrire :

$$H_{m,n}(x, y) = (-1)^{m+n} e^{\frac{1}{2}\psi(\xi, \eta)}\left[a\frac{\partial}{\partial \xi} + b\frac{\partial}{\partial \eta}\right]^m \left[c\frac{\partial}{\partial \eta} + b\frac{\partial}{\partial \xi}\right]^n \left[e^{-\frac{1}{2}\psi(\xi, \eta)}\right],$$
$$G_{m,n}(x, y) = (-1)^{m+n} e^{\frac{1}{2}\varphi(x, y)}\left[\frac{c}{\Delta}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{b}{\Delta}\frac{\partial}{\partial y}\right]^m \left[\frac{a}{\Delta}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{b}{\Delta}\frac{\partial}{\partial x}\right]^n \left[e^{-\frac{1}{2}\varphi(x, y)}\right].$$

D'où, en introduisant les coefficients $A_{p,q}$ et $B_{p,q}$ définis par le développement des deux polynomes :

$$\xi^m \eta^n \equiv (ax + by)^m (cy + bx)^n = \sum_{p+q=m+n} A_{p,q}\, x^p y^q,$$
$$x^m y^n \equiv \left(\frac{c}{\Delta}\xi - \frac{b}{\Delta}\eta\right)^m \left(\frac{a}{\Delta}\eta - \frac{b}{\Delta}\xi\right)^n = \sum_{p+q=m+n} B_{p,q}\, \xi^p \eta^q,$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

le développement des produits symboliques des dérivées donne immédiatement, en tenant compte des formules (25) et (26) :

$$H_{m,n}(x, y) = \sum_{p+q=m+n} A_{p,q} G_{p,q}(x, y),$$

$$G_{m,n}(x, y) = \sum_{p+q=m+n} B_{p,q} H_{p,q}(x, y).$$

Voici les premières de ces relations :

$$\begin{array}{l|l}
H_{0,0} = G_{0,0}, & H_{2,0} = a^2 G_{2,0} + 2ab G_{1,1} + b^2 G_{0,2}, \\
H_{1,0} = a G_{1,0} + b G_{0,1}, & H_{1,1} = ab G_{2,0} + (ac + b^2) G_{1,1} + bc G_{0,2}, \\
H_{0,1} = b G_{1,0} + c G_{0,1}, & H_{0,2} = b^2 G_{2,0} + 2bc G_{1,1} + c^2 G_{0,2}, \\
 & H_{3,0} = a^3 G_{3,0} + 3a^2 b G_{2,1} + 3ab^2 G_{1,2} + b^3 G_{0,3}. \\
 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

CXXII. — Formules de récurrence entre polynomes $H_{m,n}$ et $G_{m,n}$ consécutifs.

Les polynomes $H_{m,n}$ et $G_{m,n}$ appartiennent à la classe de polynomes étudiée par P. Appell, jouissant de la propriété que les dérivées partielles premières du polynome d'indices m, n s'expriment linéairement en fonction des polynomes d'indices $m-1$, n et m, $n-1$.

On a, en effet,

$$(27) \qquad \frac{\partial G_{m,n}}{\partial x} = m G_{m-1,n}, \qquad \frac{\partial G_{m,n}}{\partial y} = n G_{m,n-1}$$

$$(28) \qquad \frac{\partial H_{m,n}}{\partial x} = a m H_{m-1,n} + b n H_{m,n-1}, \qquad \frac{\partial H_{m,n}}{\partial y} = b m H_{m-1,n} + c n H_{m,n-1};$$

ces deux dernières relations peuvent aussi s'écrire :

$$(29) \qquad \frac{\partial H_{m,n}}{\partial \xi} = m H_{m-1,n}, \qquad \frac{\partial H_{m,n}}{\partial \eta} = n H_{m,n-1}.$$

Pour démontrer, par exemple, la première, il suffit de dériver par rapport à x la fonction génératrice

$$e^{kx + k'y - \frac{1}{2}\psi(k, k')} = \sum \frac{k^m}{(1, m)} \frac{k'^n}{(1, n)} G_{m,n},$$

d'où

$$k\, e^{kx + k'y - \frac{1}{2}\psi(k, k')} = \sum \frac{k^m}{(1, m)} \frac{k'^n}{(1, n)} \frac{\partial G_{m,n}}{\partial x}$$

ou

$$k \sum \frac{k^m}{(1, m)} \frac{k'^n}{(1, n)} G_{m,n} = \sum \frac{k^m}{(1, m)} \frac{k'^n}{(1, n)} \frac{\partial G_{m,n}}{\partial x},$$

puis d'identifier dans les deux membres le coefficient de $k^m k'^n$.

L'application réitérée des relations (27) et (29) conduit à l'expression générale des déri-

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

vées $(p+q)^{\text{èmes}}$ $(p \leqq m,\ q \leqq n)$:

$$(30)\qquad \frac{1}{(1,m)}\frac{1}{(1,n)}\frac{\partial^{p+q}G_{m,n}}{\partial x^p\,\partial y^q} = \frac{1}{(1,m-p)}\frac{1}{(1,n-q)}G_{m-p,n-q},$$

$$(31)\qquad \frac{1}{(1,m)}\frac{1}{(1,n)}\frac{\partial^{p+q}H_{m,n}}{\partial\xi^p\,\partial\eta^q} = \frac{1}{(1,m-p)}\frac{1}{(1,n-q)}H_{m-p,n-q}.$$

On en déduit, notamment, que le développement de Taylor du polynome $G_{m,n}(x+h, y+k)$ se présente sous la forme remarquable

$$(32)\qquad G_{m,n}(x+h, y+k) = \sum_{p=0,q=0}^{p=m,q=n}(-1)^{p+q}\frac{(-m,p)(-n,q)}{(1,p)(1,q)}h^p k^q G_{m-p,n-q}(x,y).$$

En faisant dans cette formule

$$x=0,\qquad y=0,\qquad h=x,\qquad k=y,$$

on en tire cette expression du polynome $G_{m,n}(x,y)$:

$$(33)\qquad G_{m,n}(x,y) = \sum_{p=0,q=0}^{p=m,q=n}(-1)^{p+q}\frac{(-m,p)(-n,q)}{(1,p)(1,q)}x^p y^q G_{m-p,n-q}(0,0).$$

De même, les valeurs $x+\frac{ch-bk}{\Delta}$ et $y+\frac{ak-bh}{\Delta}$ correspondant à $\xi+h$ et $y+k$, la formule (31) fournit ce développement curieux :

$$(34)\qquad H_{m,n}\left(x+\frac{ch-bk}{\Delta}, y+\frac{ak-bh}{\Delta}\right) = \sum_{p=0,q=0}^{p=m,q=n}(-1)^{p+q}\frac{(-m,p)(-n,q)}{(1,p)(1,q)}h^p k^q H_{m-p,n-q}(x,y).$$

Cinq polynomes H *consécutifs :*

$$H_{m,n},\quad H_{m-1,n},\quad H_{m,n-1},\quad H_{m-2,n},\quad H_{m-1,n-1},\quad H_{m,n-2},$$

sont liés par deux équations de récurrence.

En effet, dérivons la fonction génératrice :

$$e^{h\xi+h'\eta-\frac{1}{2}\varphi(h,h')} = \sum\frac{h^m}{(1,m)}\frac{h'^n}{(1,n)}H_{m,n}$$

respectivement par rapport à h et h' :

$$(\xi-ah-bh')\sum\frac{h^m}{(1,m)}\frac{h'^n}{(1,n)}H_{m,n} = \sum\frac{h^{m-1}}{(1,m-1)}\frac{h'^n}{(1,n)}H_{m,n},$$

$$(\eta-bh-ch')\sum\frac{h^m}{(1,m)}\frac{h'^n}{(1,n)}H_{m,n} = \sum\frac{h^m}{(1,m)}\frac{h'^{n-1}}{(1,n-1)}H_{m,n},$$

et identifions dans la première équation les coefficients de $h^{m-1}h'^n$ et dans la seconde ceux

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

de $h^m h'^{n-1}$, nous obtenons

$$(35)\qquad \begin{cases} H_{m,n} - \xi H_{m-1,n} + a(m-1) H_{m-2,n} + b\, n\, H_{m-1,n-1} = 0, \\ H_{m,n} - \eta H_{m,n-1} + b\, m H_{m-1,n-1} + c(n-1) H_{m,n-2} = 0. \end{cases}$$

Cinq polynomes G consécutifs sont liés de même par deux équations de récurrence, qui se déduisent de celles-là :

$$(36)\qquad \begin{cases} G_{m,n} - x\, G_{m-1,n} + \frac{}{\Delta}(m-1) G_{m-2,n} - \frac{b}{\Delta} n G_{m-1,n-1} = 0, \\ G_{m,n} - y\, G_{m,n-1} - \frac{b}{\Delta} m G_{m-1,n-1} + \frac{a}{\Delta}(n-1) G_{m,n-2} = 0. \end{cases}$$

Les équations (29) et (35) ont été données par Hermite.

CXXIII. — Expression des polynomes $H_{m,n}$ et $G_{m,n}$ par des intégrales définies.

Partons de la formule [qui se déduit de (15) en y faisant $m = 0$, $n = 0$],

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\varphi(u,v)}\, du\, dv = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}};$$

remplaçons dans l'intégrale u et v par $u - i\frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial k}$ et $v - i\frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial k'}$:

$$-\frac{1}{2}\varphi\left(u - i\frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial k},\ v - i\frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial k'}\right) = -\frac{1}{2}\varphi(u, v) + i(ku + k'v) + \frac{1}{2}\psi(k, k');$$

puis multiplions les deux membres par

$$e^{kx + ky - \frac{1}{2}\psi(k,k')}$$

il vient

$$e^{kx + k'y - \frac{1}{2}\psi(k,k')} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\varphi(u,v) + k(x+iu) + k'(y+iv)}\, du\, dv.$$

D'où, en développant selon les puissances de k et k', cette expression du polynome $G_{m,n}$:

$$(37)\qquad G_{m,n}(x, y) = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x + iu)^m (y + iv)^n e^{-\frac{1}{2}\varphi(u,v)}\, du\, dv.$$

En y remplaçant x et y par ξ et η et φ par ψ, on en tire une expression parallèle pour le polynome $H_{m,n}$:

$$(38)\qquad H_{m,n}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\Delta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi + iu)^m (\eta + iv)^n e^{-\frac{1}{2}\psi(u,v)}\, du\, dv.$$

On peut remarquer que la fonction sous le signe intégral se décompose en un produit de deux polynomes; en développant ces polynomes, on retrouve aisément les diverses expressions des polynomes H et G données dans les paragraphes précédents.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

CXXIV. — Système d'équations aux dérivées partielles des polynomes $H_{m,n}$ et $G_{m,n}$.

Si, dans les équations de récurrence (35), on remplace les polynomes

$$H_{m-1,n},\quad H_{m,n-1},\quad H_{m-2,n},\quad H_{m-1,n-1},\quad H_{m,n-2}$$

par leurs valeurs, tirées des relations (29) :

$$\frac{1}{m}\frac{\partial H_{m,n}}{\partial \xi},\quad \frac{1}{n}\frac{\partial H_{m,n}}{\partial \eta},\quad \frac{1}{m(m-1)}\frac{\partial^2 H_{m,n}}{\partial \xi^2},\quad \frac{1}{mn}\frac{\partial^2 H_{m,n}}{\partial \xi\,\partial \eta},\quad \frac{1}{n(n-1)}\frac{\partial^2 H_{m,n}}{\partial \eta^2}$$

on voit que *le polynome* $H_{m,n}$ *vérifie le système de deux équations aux dérivées partielles données par Hermite :*

$$(39)\qquad \begin{cases} a\dfrac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + b\dfrac{\partial^2 H}{\partial \xi\,\partial \eta} - \xi\dfrac{\partial H}{\partial \xi} + mH = 0, \\[2ex] b\dfrac{\partial^2 H}{\partial \xi\,\partial \eta} + c\dfrac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} - \eta\dfrac{\partial H}{\partial \eta} + nH = 0. \end{cases}$$

Tandis que ces deux équations contiennent séparément les indices m et n, l'équation obtenue en faisant leur somme

$$(40)\qquad a\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + 2b\frac{\partial^2 H}{\partial \xi\,\partial \eta} + c\frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} - \xi\frac{\partial H}{\partial \xi} - \eta\frac{\partial H}{\partial \eta} + (m+n)H = 0$$

ne dépend que du degré $(m+n)$ de ce polynome : cette dernière équation est donc vérifiée par tous les polynomes $H_{m,n}$ d'un degré $(m+n)$ donné.

En remplaçant les dérivées partielles par rapport à ξ, η par les dérivées par rapport à x, y, les équations (39) et (40) se mettent sous la forme équivalente

$$(41)\qquad \begin{cases} c\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2} - b\dfrac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y} - (ax+by)\left(c\dfrac{\partial H}{\partial x} - b\dfrac{\partial H}{\partial y}\right) + m\,\Delta H = 0, \\[2ex] a\dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2} - b\dfrac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y} - (bx+cy)\left(a\dfrac{\partial H}{\partial y} - b\dfrac{\partial H}{\partial x}\right) + n\,\Delta H = 0; \end{cases}$$

$$(42)\qquad c\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - 2b\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} - \Delta\left(x\frac{\partial H}{\partial x} + y\frac{\partial H}{\partial y}\right) + (m+n)\Delta H = 0.$$

Ces équations rentrent dans le type général des équations étudiées au paragraphe XII

$$(43)\qquad \begin{cases} r = a_1 s + a_2 p + a_3 q + a_4 z, \\ t = b_1 s + b_2 p + b_3 q + b_4 z, \end{cases}$$

dont l'intégrale générale est une combinaison linéaire de quatre intégrales particulières :

$$z = A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 z_3 + A_4 z_4$$

lorsque la quantité $1 - a_1 b_1$ est différente de zéro, et de trois intégrales particulières seulement si $1 - a_1 b_1 = 0$.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Pour les équations (41)

$$1 - a_1 b_1 = 1 - \frac{b^2}{ac} = \frac{\Delta}{ac} > 0;$$

nous déterminerons plus loin les trois intégrales particulières qui, jointes à $H_{m,n}$, constituent l'intégrale générale de ce système.

En remplaçant dans les équations de récurrence (36) les polynomes

$$G_{m-1,n}, \quad G_{m,n-1}, \quad G_{m-2,n}, \quad G_{m-1,n-1}, \quad G_{m,n-2}$$

par leurs valeurs, tirées des relations (27) :

$$\frac{1}{m}\frac{\partial G_{m,n}}{\partial x}, \quad \frac{1}{n}\frac{\partial G_{m,n}}{\partial y}, \quad \frac{1}{m(m-1)}\frac{\partial^2 G_{m,n}}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{mn}\frac{\partial^2 G_{m,n}}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{1}{n(n-1)}\frac{\partial^2 G_{m,n}}{\partial y^2}$$

on voit de même que *le polynome* $G_{m,n}$ *vérifie le système de deux équations aux dérivées partielles :*

$$(41) \qquad \begin{cases} c\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} - b\dfrac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y} - \Delta x\dfrac{\partial G}{\partial x} + m\Delta G = 0, \\ a\dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2} - b\dfrac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y} - \Delta y\dfrac{\partial G}{\partial y} + n\Delta G = 0. \end{cases}$$

Comme pour le système (41) l'intégrale générale de ce système dépend de quatre constantes. Tandis que ces deux équations contiennent séparément les deux indices m et n, l'équation obtenue en faisant leur somme

$$(45) \qquad c\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - 2b\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} - \Delta\left(x\frac{\partial G}{\partial x} + y\frac{\partial G}{\partial y}\right) + (m+n)\Delta G = 0$$

ne dépend que de $(m+n)$; elle est par conséquent vérifiée par tous les polynomes $G_{m,n}$ de même degré $(m+n)$.

En outre, l'équation (45) est identique à l'équation (42), donc :

Tous les polynomes $H_{m,n}$ *et* $G_{m,n}$ *de degré* $(m+n)$ *donné sont des intégrales particulières de la même équation :*

$$(46) \qquad c\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2b\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \Delta\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) + (m+n)\Delta z = 0.$$

Le système d'équations (44), vérifié par le polynome $G_{m,n}$, possède la propriété suivante :

G *désignant une intégrale quelconque de ce système, la fonction*

$$z = \frac{\partial^{p+q} G}{\partial x^p\,\partial y^q}$$

vérifie le système qui s'en déduit en remplaçant simplement m *par* $m-p$ *et* n *par* $n-q$.

En effet, dérivons $p+q$ fois la première des deux équations (44), par exemple

$$c\frac{\partial^{p+q+2} G}{\partial x^{p+2}\,\partial y^q} - b\frac{\partial^{p+q+2} G}{\partial x^{p+1}\,\partial y^{q+1}} - \Delta\left[x\frac{\partial^{p+q+1} G}{\partial x^{p+1}\,\partial y^q} + p\frac{\partial^{p+q} G}{\partial x^p\,\partial y^q}\right] + m\Delta\frac{\partial^{p+q} G}{\partial x^p\,\partial y^q} = 0,$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

d'où

$$c\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - b\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - \Delta x\frac{\partial z}{\partial x} + (m-p)\Delta z = 0.$$

De même, H *désignant une intégrale quelconque du système* (39) *vérifié par le polynome* $H_{m,n}$, *la fonction*

$$z = \frac{\partial^{p+q} H}{\partial \xi^p\,\partial \eta^q}$$

vérifie le système qui s'en déduit en remplaçant simplement m *par* $m-p$ *et* n *par* $n-q$.

CXXV. — L'équation de la chaleur généralisée. Les fonctions $D_{m,n}$ et $E_{m,n}$.

Un lien élégant existe entre les polynomes $H_{m,n}$ et $G_{m,n}$ et les polynomes en (x, y, t) qui vérifient l'équation

$$c\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2b\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \Delta\frac{\partial F}{\partial t} = 0, \tag{47}$$

que l'on peut considérer comme une généralisation de l'équation de propagation de la chaleur dans un plan.

Il est clair, en effet, que l'équation (47) admet pour solutions :

$$\Phi(x, y, t) = e^{h\xi + h'\eta + \varphi(h,h')t},$$
$$\Psi(x, y, t) = e^{kx + k'y + \psi(k,k')t}.$$

Si l'on développe Φ et Ψ selon les puissances des constantes arbitraires (h, h') et (k, k') :

$$e^{h\xi + h'\eta + \varphi(h,h')t} = \sum \frac{h^m}{(1, m)}\frac{h'^n}{(1, n)}\Phi_{m,n}(x, y, t),$$
$$e^{kx + k'y + \psi(k,k')t} = \sum \frac{k^m}{(1, m)}\frac{k'^n}{(1, n)}\Psi_{m,n}(x, y, t),$$

les polynomes $\Phi_{m,n}$ *et* $\Psi_{m,n}$ *sont évidemment des solutions de l'équation de la chaleur généralisée* (47); or, ces polynomes se ramènent immédiatement aux polynomes $H_{m,n}$ et $G_{m,n}$, comme on le voit en comparant $\Phi(x, y, t)$ et $\Psi(x, y, t)$ aux fonctions génératrices (18) et (19).

On a, en effet,

$$\left\{\begin{aligned} \Phi_{m,n}(x, y, t) &= i^{m+n}(2t)^{\frac{m+n}{2}} H_{m,n}\left(\frac{x}{i\sqrt{2t}}, \frac{y}{i\sqrt{2t}}\right), \\ \Psi_{m,n}(x, y, t) &= i^{m+n}(2t)^{\frac{m+n}{2}} G_{m,n}\left(\frac{x}{i\sqrt{2t}}, \frac{y}{i\sqrt{2t}}\right). \end{aligned}\right. \tag{48}$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Dans le cas particulier où la forme $\varphi(x, y)$ est identique à son adjointe ($a = c = 1$, $b = 0$), l'équation (47) se ramène à l'équation de propagation de la chaleur

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \tag{49}$$

Comme les polynomes $H_{m,n}$ et $G_{m,n}$ se confondent alors et dégénèrent en un produit de polynomes H à une variable, il résulte de (48) que l'équation de la chaleur admet comme solutions les polynomes

$$\Phi_{m,n}(x, y, t) = i^{m+n}(2t)^{\frac{m+n}{2}} H_m\left(\frac{x}{i\sqrt{2t}}\right) H_n\left(\frac{y}{i\sqrt{2t}}\right). \tag{50}$$

De même que pour les polynomes à une variable, on peut ramener l'équation aux dérivées partielles (46) à une forme plus simple, ne contenant plus de dérivées du premier ordre, en introduisant les fonctions

$$\left\{\begin{aligned} D_{m,n}(x, y) &= e^{-\frac{1}{4}\varphi(x,y)} G_{m,n}(x, y), \\ E_{m,n}(x, y) &= e^{-\frac{1}{4}\varphi(x,y)} H_{m,n}(x, y). \end{aligned}\right. \tag{51}$$

Un calcul facile montre que l'équation (46) conduit pour ces fonctions à l'équation

$$c\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} - 2b\frac{\partial^2 D}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial^2 D}{\partial y^2} + \Delta\left[m + n + 1 - \frac{1}{4}\varphi(x, y)\right] D = 0. \tag{52}$$

Les fonctions $D_{m,n}$ et $E_{m,n}$ vérifient chacune un système de deux équations dont l'équation (52) est la somme; par exemple, on tire des équations (44) le système vérifié par la fonction D :

$$\left\{\begin{aligned} c\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} - b\frac{\partial^2 D}{\partial x\,\partial y} + \frac{b}{2}\left(\eta\frac{\partial D}{\partial x} - \xi\frac{\partial D}{\partial y}\right) + \Delta\left[m + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x\xi\right] D &= 0, \\ a\frac{\partial^2 D}{\partial y^2} - b\frac{\partial^2 D}{\partial x\,\partial y} + \frac{b}{2}\left(\xi\frac{\partial D}{\partial y} - \eta\frac{\partial D}{\partial x}\right) + \Delta\left[n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}y\eta\right] D &= 0. \end{aligned}\right. \tag{53}$$

On peut rapprocher ce système de l'équation différentielle (15-CIX), vérifiée par la fonction du cylindre parabolique $D_n(x)$.

CXXVI. — Intégrales générales des systèmes d'équations aux dérivées partielles des polynomes $H_{m,n}$ et $G_{m,n}$.

L'intégrale générale du système (41), vérifié par le polynome $H_{m,n}$, a été déterminée par M. Pierre Humbert [1].

A l'intégration du système (41), il substitue la recherche de l'intégrale du système vérifié par la fonction

$$\mathcal{H}_{m,n}(x, y) = (-1)^{m+n} e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)} H_{m,n}(x, y) \tag{54}$$

[1] Pierre Humbert, *C. R. Acad. Sci.*, t. 167, 1918, p. 524.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

qui, en vertu de la formule (25), a pour expression

$$(55)\qquad \mathcal{H}_{m,n}(x, y) = \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}\left[e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)}\right].$$

On déduit facilement de (41) les équations vérifiées par $\mathcal{H}_{m,n}$:

$$(56)\qquad \begin{cases} c\dfrac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x^2} - b\dfrac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x\,\partial y} + \Delta x\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} + (m+1)\Delta\mathcal{H} = 0, \\ a\dfrac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial y^2} - b\dfrac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x\,\partial y} + \Delta y\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} + (n+1)\Delta\mathcal{H} = 0. \end{cases}$$

Or, il saute aux yeux que l'on peut obtenir ces équations en dérivant m fois par rapport à x et n fois par rappport à y le système

$$(57)\qquad \begin{cases} c\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} - b\dfrac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y} + \Delta x\dfrac{\partial P}{\partial x} + \Delta P = 0, \\ a\dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} - b\dfrac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y} + \Delta y\dfrac{\partial P}{\partial y} + \Delta P = 0. \end{cases}$$

Le problème est ainsi ramené à l'intégration du système (57), qui ne dépend plus des indices m et n. De son intégrale générale

$$(58)\qquad P(x, y) = A_1 P_1 + A_2 P_2 + A_3 P_3 + A_4 P_4,$$

on tirera l'intégrale générale de (41), que nous cherchons,

$$(59)\qquad H(x, y) = (-1)^{m+n} e^{\frac{1}{2}\varphi(x,y)} \frac{\partial^{m+n} P}{\partial x^m \partial y^n}.$$

Une remarque élémentaire simplifie la méthode suivie par M. P. Humbert, dont les calculs donnent immédiatement P_1, P_2, P_3, mais restent assez laborieux pour aboutir à P_4.

Les équations (57) peuvent, en effet, s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{c}{\Delta}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{b}{\Delta}\frac{\partial P}{\partial y} + xP\right] = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{a}{\Delta}\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{b}{\Delta}\frac{\partial P}{\partial x} + yP\right] = 0$$

ou

$$(60)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial P}{\partial \xi} + xP\right] = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial P}{\partial \eta} + yP\right] = 0.$$

On doit donc avoir

$$(61)\qquad \frac{\partial P}{\partial \xi} + xP = \Phi(y), \qquad \frac{\partial P}{\partial \eta} + yP = \Psi(x).$$

Or, en égalant les deux valeurs de $\frac{\partial^2 P}{\partial \xi\,\partial \eta}$ tirées de ces équations, on obtient la relation

$$\Phi'(y)\frac{a}{\Delta} - x\frac{\partial P}{\partial \eta} + \frac{b}{\Delta}P = \Psi'(x)\frac{c}{\Delta} - y\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{b}{\Delta}P$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

ou

$$\frac{a}{\Delta}\Phi'(y) - x\Psi(x) = \frac{c}{\Delta}\Psi'(x) - y\Phi(y).$$

Les fonctions $\Phi(y)$ et $\Psi(x)$ doivent donc vérifier les équations

$$(62)\qquad \begin{cases} \frac{a}{\Delta}\Phi'(y) + y\Phi(y) = \lambda, \\ \frac{c}{\Delta}\Psi'(x) + x\Psi(x) = \lambda, \end{cases}$$

λ désignant une constante arbitraire. Or, en introduisant la fonction d'Hermite de deuxième espèce (67-CXVII)

$$h_0(x) = \int_0^x e^{\frac{x^2}{2}}\,dx,$$

les intégrales des équations (62) s'écrivent sous la forme

$$(62)\qquad \begin{cases} \Phi(y) = \left[\alpha + \lambda\sqrt{\frac{\Delta}{a}}\,h_0\left(y\sqrt{\frac{\Delta}{a}}\right)\right] e^{-\frac{\Delta}{2a}y^2}, \\ \Psi(x) = \left[\beta + \lambda\sqrt{\frac{\Delta}{c}}\,h_0\left(x\sqrt{\frac{\Delta}{c}}\right)\right] e^{-\frac{\Delta}{2c}x^2}. \end{cases}$$

La forme des équations (61) conduit naturellement à substituer à P une fonction auxiliaire Q, telle que

$$(63)\qquad P(x, y) = e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)}Q(x, y).$$

Par cette substitution, les équations (61) se transforment en

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} = \Phi(y)\,e^{\frac{1}{2}\varphi(x,y)}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial \eta} = \Psi(x)\,e^{\frac{1}{2}\varphi(x,y)}$$

ou, finalement,

$$(64)\qquad \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial \xi} = \left[\alpha + \lambda\sqrt{\frac{\Delta}{a}}\,h_0\left(y\sqrt{\frac{\Delta}{a}}\right)\right] e^{\frac{\xi^2}{2a}}, \\ \frac{\partial Q}{\partial \eta} = \left[\beta + \lambda\sqrt{\frac{\Delta}{c}}\,h_0\left(x\sqrt{\frac{\Delta}{c}}\right)\right] e^{\frac{\eta^2}{2c}}. \end{cases}$$

1° Prenons

$$\alpha = \beta = \lambda = 0,$$

d'où, une première intégrale

$$Q_1 = 1,$$

qui donne

$$P_1 = e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)}.$$

D'après la formule (59) il lui correspond, pour le système à intégrer (41), le polynome $H_{m,n}$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

2° Prenons $\alpha = \frac{1}{\sqrt{a}}$, $\beta = \lambda = 0$:

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{\frac{\xi^2}{2a}}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial \eta} = 0,$$

d'où une seconde intégrale :

$$Q_2 = h_0\left(\frac{\xi}{\sqrt{a}}\right)$$

qui donne

$$P_2 = e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)} h_0\left(\frac{\xi}{\sqrt{a}}\right),$$

à laquelle correspond, pour le système (41), l'intégrale

$$(65) \qquad H^{(2)}_{m,n} = (-1)^{m+n} e^{\frac{1}{2}\varphi(x,y)} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}\left[e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)} h_0\left(\frac{\xi}{\sqrt{a}}\right)\right].$$

3° Prenons $\beta = \frac{1}{\sqrt{c}}$, $\alpha = \lambda = 0$:

$$\frac{\partial Q}{\partial \eta} = \frac{1}{\sqrt{c}} e^{\frac{\eta^2}{2c}}; \qquad \frac{\partial Q}{\partial \xi} = 0,$$

d'où

$$Q_3 = h_0\left(\frac{\eta}{\sqrt{c}}\right),$$

qui donne pour le système (41)

$$(66) \qquad H^{(3)}_{m,n} = (-1)^{m+n} e^{\frac{1}{2}\varphi(x,y)} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}\left[e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)} h_0\left(\frac{\eta}{\sqrt{c}}\right)\right].$$

On remarquera l'analogie complète entre les intégrales (65) et (66) et la fonction d'Hermite de seconde espèce $h_n(x)$ sous la forme (72-CXVII).

Dans le cas particulier où $\varphi(x, y)$ est identique à son adjointe, ces deux solutions dégénèrent en

$$H^{(2)}_{m,n} = h_m(x) H_n(y), \qquad H^{(3)}_{m,n} = H_m(x) h_n(y).$$

4° Prenons $\alpha = \beta = 0$, $\lambda = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} = \frac{1}{\sqrt{a}} h_0\left(y\sqrt{\frac{\Delta}{a}}\right) e^{\frac{\xi^2}{2a}}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial \eta} = \frac{1}{\sqrt{c}} h_0\left(x\sqrt{\frac{\Delta}{c}}\right) e^{\frac{\eta^2}{2c}}$$

ou

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} = h_0\left(y\sqrt{\frac{\Delta}{a}}\right) \frac{\partial}{\partial \xi}\left[h_0\left(\frac{\xi}{\sqrt{a}}\right)\right], \qquad \frac{\partial Q}{\partial \eta} = h_0\left(x\sqrt{\frac{\Delta}{c}}\right) \frac{\partial}{\partial \eta}\left[h_0\left(\frac{\eta}{\sqrt{c}}\right)\right],$$

d'où la quatrième intégrale :

$$Q_4 = h_0\left(y\sqrt{\frac{\Delta}{a}}\right) h_0\left(\frac{\xi}{\sqrt{a}}\right) + h_0\left(x\sqrt{\frac{\Delta}{c}}\right) h_0\left(\frac{\eta}{\sqrt{c}}\right) - \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \cdot \int_0^{\xi}\int_0^{\eta} e^{\frac{1}{2}\psi(\xi,\eta)} d\xi\, d\eta,$$

qui fournit pour le système (41) l'intégrale

$$(67) \qquad H^{(4)}_{m,n} = (-1)^{m+n} e^{\frac{1}{2}\varphi(x,y)} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}\left[e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)} Q_4\right].$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Des considérations parallèles aux précédentes conduisent à la détermination de l'intégrale générale du système (44), dont on obtient quatre intégrales particulières :

1° Le polynome :

$$G_{m,n}(x, y) = (-1)^{m+n} e^{\frac{1}{2}\psi(\xi,\eta)} \frac{\partial^{m+n}}{\partial\xi^m \partial\eta^n}\left[e^{-\frac{1}{2}\psi(\xi,\eta)}\right];$$

2°

$$G^{(2)}_{m,n}(x, y) = (-1)^{m+n} e^{\frac{1}{2}\psi(\xi,\eta)} \frac{\partial^{m+n}}{\partial\xi^m \partial\eta^n}\left[e^{-\frac{1}{2}\psi(\xi,\eta)} h_0\left(x\sqrt{\frac{\Delta}{c}}\right)\right];$$

3°

$$G^{(3)}_{m,n}(x, y) = (-1)^{m+n} e^{\frac{1}{2}\psi(\xi,\eta)} \frac{\partial^{m+n}}{\partial\xi^m \partial\eta^n}\left[e^{-\frac{1}{2}\psi(\xi,\eta)} h_0\left(y\sqrt{\frac{\Delta}{a}}\right)\right];$$

4°

$$G^{(4)}_{m,n}(x, y) = (-1)^{m+n} e^{\frac{1}{2}\psi(\xi,\eta)} \frac{\partial^{m+n}}{\partial\xi^m \partial\eta^n}\left[e^{-\frac{1}{2}\psi(\xi,\eta)} Q'_4\right],$$

où

$$Q'_4 = h_0\left(x\sqrt{\frac{\Delta}{c}}\right) h_0\left(\frac{\eta}{\sqrt{c}}\right) + h_0\left(y\sqrt{\frac{\Delta}{a}}\right) h_0\left(\frac{\xi}{\sqrt{a}}\right) - \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\int_0^x\int_0^y e^{\frac{1}{2}\varphi(x,y)}\,dx\,dy.$$

CXXVII. — Développement d'une fonction $F(x, y)$ en série de polynomes $H_{m,n}$ et $G_{m,n}$.

La propriété d'orthogonalité, exprimée par la formule (15) :

$$(68)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)} H_{m,n} G_{p,q}\,dx\,dy = 0 \qquad (m \neq p,\ n \neq q), \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)} H_{m,n} G_{m,n}\,dx\,dy = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}(1, m)(1, n), \end{cases}$$

permet l'application de la méthode de Fourier au calcul des coefficients du développement d'une fonction donnée $F(x, y)$ en série de polynomes H ou G :

$$(69)\qquad F(x, y) = \sum A_{m,n} H_{m,n}(x, y),$$

$$(70)\qquad F(x, y) = \sum B_{m,n} G_{m,n}(x, y).$$

Par cette méthode, on obtient pour les coefficients les expressions

$$(71)\qquad \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}(1, m)(1, n) A_{m,n} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)} F(x, y)\, G_{m,n}\,dx\,dy,$$

$$(72)\qquad \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}(1, m)(1, n) B_{m,n} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)} F(x, y)\, H_{m,n}\,dx\,dy.$$

En se servant de l'expression (25) du polynome $H_{m,n}$ par une dérivée partielle on

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

peut transformer l'expression du coefficient $B_{m,n}$:

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}(1, m)(1, n)B_{m,n} = (-1)^{m+n}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n}\left[e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)}\right]dx\,dy,$$

d'où, par une suite d'intégrations par parties effectuées m fois par rapport à x et n fois par rapport à y,

$$(73)\qquad \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}(1, m)(1, n)B_{m,n} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)}\frac{\partial^{m+n}F}{\partial x^m\,\partial y^n}dx\,dy,$$

à condition que la fonction F soit telle que les dérivées partielles existent et que les termes tout intégrés soient nuls aux limites.

On en déduit que, $P(x, y)$ *désignant un polynome de degré inférieur à* $m+n$, *l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)}PH_{m,n}\,dx\,dy$$

est nulle.

Il en résulte encore que *le développement d'un polynome de degré donné* μ, *en série de polynomes* $G_{m,n}$, *ne contient que les polynomes dont le degré* $m+n$ *est inférieur ou au plus égal à* μ.

Cette propriété s'étend évidemment au développement d'un polynome en série de polynomes $H_{m,n}$, puisque les polynomes H et G de même degré s'expriment linéairement les uns en fonction des autres.

Comme exemples de développement de polynomes, donnons le développement de $(kx+k'y)^\mu$. selon les polynomes $G_{m,n}$ et celui de $(h\xi+h'\eta)^\mu$ selon les polynomes $H_{m,n}$; en combinant le développement de x^n selon les polynomes $H_n(x)$ (39-CXIII) avec les expressions (23) et (24) des groupes homogènes de polynomes $H_{m,n}$ et $G_{m,n}$, on a facilement :

$$(74)\qquad \frac{(h\xi+h'\eta)^\mu}{(1,\mu)} = \sum_{j=0}^{j\leq\frac{\mu}{2}}\frac{[\varphi(h,h')]^j}{2^j(1,j)}\left[\sum_{m+n=\mu-2j}\frac{h^m}{(1,m)}\frac{h'^n}{(1,n)}H_{m,n}(x,y)\right],$$

$$(75)\qquad \frac{(kx+k'y)^\mu}{(1,\mu)} = \sum_{j=0}^{j\leq\frac{\mu}{2}}\frac{[\psi(k,k')]^j}{2^j(1,j)}\left[\sum_{m+n=\mu-2j}\frac{k^n}{(1,m)}\frac{k'^n}{(1,n)}G_{m,n}(x,y)\right].$$

CXXVIII. — Les courbes algébriques $H_{m,n}(x, y) = 0$.

L'équation

$$(76)\qquad H_{m,n}(x,y) = 0$$

définit une courbe algébrique de degré $m+n$. De même que l'équation

$$H_n(x) = 0$$

a ses n racines réelles, on peut démontrer que l'équation (76) a $m+n$ racines réelles en x quel que soit y et $(m+n)$ racines réelles en y quel que soit x.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

La courbe algébrique définie par l'équation (76) *est donc coupée en* $(m+n)$ *points réels par toute parallèle aux axes de coordonnées.*

Voici comment Hermite démontre cette proposition.

Il commence par prouver très élégamment que *l'équation* (76) *a au moins m racines réelles en x quel que soit y et n racines réelles en y quel que soit x.*

Remarquons, en effet, que $P(x)$ et $Q(y)$ désignant des polynomes de degrés inférieurs respectivement à m et à n, on a

$$(77)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)} P(x)\, H_{m,n}\, dx = 0, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)} Q(y)\, H_{m,n}\, dy = 0. \end{cases}$$

Pour l'établir, il suffit de remplacer $H_{m,n}$ par sa valeur (25), ce qui ramène les intégrales à

$$(-1)^{m+n}\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n}\left[e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)}\right]dx,$$

$$(-1)^{m+n}\int_{-\infty}^{+\infty} Q(y)\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n}\left[e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)}\right]dy,$$

et d'intégrer m fois par parties dans la première, n fois dans la seconde.

Ceci étant, supposons que l'équation (76) ait seulement k racines réelles par rapport à x, k étant inférieur à m; on pourra écrire (y étant constant) :

$$H_{m,n}(x,y) = P_k(x)\,R(x),$$

P_k désignant le polynome de degré k, formé avec les k racines réelles.

Appliquons la première formule (77) en prenant $P(x) = P_k(x)$; on doit avoir :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)} P_k(x)\, H_{m,n}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)} [P_k(x)]^2\, R(x)\, dx = 0.$$

Pour que cette égalité soit possible, il faut que $R(x)$ s'annule au moins une fois entre $-\infty$ et $+\infty$, donc $H_{m,n}$ a, au moins, $k+1$ racines réelles; comme cette démonstration s'applique tant que $k \leqq m-1$, il est donc prouvé que l'équation (76) a au moins m racines réelles en x.

D'une manière plus précise, et sans d'ailleurs s'appuyer sur le résultat précédent, Hermite démontre que le nombre des racines réelles est exactement $m+n$ en partant de la formule

$$H_{m,n} = (-1)^{m+n} e^{\frac{1}{2}\varphi(x,y)} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n}\left[e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)}\right].$$

On peut d'abord l'écrire

$$H_{m,n} = -e^{\frac{1}{2}\varphi(x,y)} \frac{\partial}{\partial x}\left[(-1)^{m-1+n}\frac{\partial^{m-1+n}}{\partial x^{m-1}\,\partial y^n}\left(e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)}\right)\right],$$

d'où

$$H_{m,n} = -e^{\frac{1}{2}\varphi(x,y)} \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)} H_{m-1,n}\right].$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Soit k le nombre des racines en x de l'équation

$$\Pi_{m-1,n} = 0;$$

la fonction $e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)}\,\Pi_{m-1,n}$, s'annulant en outre pour $x = -\infty$ et $x = +\infty$, possède donc $k+2$ racines; sa dérivée par rapport à x s'annulera $k+1$ fois (au moins) entre $-\infty$ et $+\infty$.

Donc le polynome $\Pi_{m,n}$ *a (au moins) une racine réelle en* x *de plus que le polynome* $\Pi_{m-1,n}$.

Or, en vertu de la formule (22),

$$\Pi_{0,n}(x, y) = c^{\frac{n}{2}}\,\Pi_n\left(\frac{\eta}{\sqrt{c}}\right);$$

le polynome $\Pi_{0,n}$ admet par conséquent n racines réelles en $\frac{\eta}{\sqrt{c}}$, donc n racines réelles en x (la courbe se décompose en un faisceau de n droites parallèles).

D'après la proposition générale, le polynome $\Pi_{1,n}$ possède au moins une racine de plus; comme il est de degré $n+1$, il a donc exactement $n+1$ racines réelles en x.

De proche en proche, on démontre ainsi que $\Pi_{2,n}$, $\Pi_{3,n}$, ... ont $(n+2)$, $(n+3)$, ... racines réelles en x; par récurrence on voit que $\Pi_{m,n}$ a bien $(m+n)$ racines réelles en x quel que soit y.

Une démonstration identique conduit au même résultat pour les racines en y.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from
UNIVERSITY OF MINNESOTA

NOTE I.

SUR LES POLYNOMES $V_n^{(s)}(x)$.

Lorsque le nombre des variables s'abaisse à un, les deux systèmes de polynomes adjoints $V_{m_1,\ldots,m_n}^{(s)}$ et $U_{m_1,\ldots,m_n}^{(s)}$ sont confondus, les deux fonctions génératrices (48-LXXVI) et (15-LXXIX) étant alors identiques (*voir* p. 265):

$$(1-2ax+a^2)^{-\frac{s}{2}} \equiv [(ax-1)^2+a^2(1-x^2)]^{-\frac{s}{2}}.$$

Les polynomes à une variable $V_n^{(s)}(x)$, souvent désignés sous le nom de fonctions sphériques d'ordre supérieur, ont fait l'objet de très nombreux travaux : on en trouvera l'exposé dans le *Handbuch der Kugelfunctionen* de H.-E. Heine et une bibliographie dans l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (éd. française), t. II, vol. 5, fasc. 2. Le cas de $s=1$ (polynomes de Legendre) a été le plus fréquemment étudié. Beaucoup d'auteurs (L. Gegenbauer, notamment) ont étendu leur étude au cas où s n'est pas un entier (*voir* p. 248). Nous condensons ici les quelques formules, éparses dans cet Ouvrage, utiles pour se servir de ces polynomes.

1° Fonction génératrice

$$(1)\qquad (1-2ax+a^2)^{-\frac{s}{2}} = \Sigma a^n V_n^{(s)}(x).$$

Cette fonction génératrice est la valeur prise sur la sphère à 2 dimensions de l'espace à $s+2$ dimensions

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=1, \qquad z_4=0, \qquad \ldots, \qquad z_{s+2}=0$$

par le potentiel

$$[(z_1-a_1)^2+z_2^2+\ldots+z_{s+2}^2]^{-\frac{s}{2}}.$$

2° Expression générale des polynomes :

$$(2)\qquad V_n^{(s)}(x) = 2^n \frac{\left(\frac{s}{2}, n\right)}{(1, n)} \sum_{j=0}^{j\leq\frac{n}{2}} \frac{1}{2^{2j}} \frac{(-n, 2j)}{\left(1-\frac{s}{2}-n, j\right)(1, j)} x^{n-2j} \qquad \text{(50-LXXVI)}$$

$$(3)\qquad = \frac{(s, n)}{(1, n)} \sum_{j=0}^{j\leq\frac{n}{2}} \frac{(x^2-1)^j}{2^{2j}} \frac{(-n, 2j)}{\left(\frac{s+1}{2}, j\right)(1, j)} x^{n-2j} \qquad \text{(11-LXXVIII)}$$

ou sous forme de séries hypergéométriques (limitées) :

$$(2')\qquad V_n^{(s)}(x) = 2^n \frac{\left(\frac{s}{2}, n\right)}{(1, n)} x^n F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, 1-\frac{s}{2}-n, \frac{1}{x^2}\right)$$

$$(3')\qquad = \frac{(s, n)}{(1, n)} x^n F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{s+1}{2}, \frac{x^2-1}{x^2}\right).$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

En ordonnant selon les puissances ascendantes de x, on a deux expressions selon la parité de n :

$$(4)\qquad V_{2n}^{(s)}(x) = (-1)^n \frac{\left(\frac{s}{2}, n\right)}{(1, n)} F\left(-n, n+\frac{s}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right),$$

$$(4')\qquad V_{2n+1}^{(s)}(x) = (-1)^n \frac{\left(\frac{s}{2}, n+1\right)}{(1, n)} x F\left(-n, n+1+\frac{s}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right),$$

chaque polynome a par rapport à x même parité que son indice.

3° Expression trigonométrique de $V_n^{(s)}(\cos\gamma)$.

Lorsque x est réel et compris entre -1 et $+1$, on a souvent intérêt à poser $x = \cos\gamma$; on a alors [1]

$$(5)\qquad V_n^{(s)}(\cos\gamma) = \sum \frac{\left(\frac{s}{2}, p\right)\left(\frac{s}{2}, q\right)}{(1, p)(1, q)} \cos(p-q)\gamma,$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs entières (positives ou nulles) de p et q telles que

$$p + q = n.$$

Il est visible que ce polynome trigonométrique, à coefficients positifs, est maximum pour $\gamma = 2k\pi$:

$$|V_n^{(s)}(\cos\gamma)| < V_n^{(s)}(1) = \frac{(s, n)}{(1, n)}.$$

4° Expression de $V_n^{(s)}(x)$ par une dérivée; formule de Jacobi :

$$(6)\qquad V_n^{(s)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{(s, n)}{\left(\frac{s+1}{2}, n\right)} \frac{(1-x^2)^{\frac{1-s}{2}}}{(1, n)} \frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^{n+\frac{s-1}{2}}\right];$$

pour la vérifier, il suffit d'employer la formule de la page 274 qui donne la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $\varphi(x^2)$; on retombe alors sur (3).

5° Les polynomes $V_n^{(s)}(x)$ sont un cas particulier des polynomes de Jacobi (p. 10).

En effet, le rapprochement de la formule précédente et de l'expression du polynome de Jacobi $\mathcal{J}_n(\alpha, \gamma, x)$ donne

$$(7)\qquad V_n^{(s)}(x) = (-1)^n \frac{(s, n)}{(1, n)} \mathcal{J}_n\left(s, \frac{s+1}{2}, \frac{1+x}{2}\right),$$

ce qui conduit à un nouveau développement en série hypergéométrique (limitée)

$$V_n^{(s)}(x) = (-1)^n \frac{(s, n)}{(1, n)} F\left(-n, s+n, \frac{s+1}{2}, \frac{1+x}{2}\right).$$

6° Trois polynomes consécutifs sont liés par une équation de récurrence que l'on obtient simplement en dérivant la fonction génératrice par rapport au paramètre a :

$$(8)\qquad (n+2)V_{n+2}^{(s)} - (s+2n+2)xV_{n+1}^{(s)} + (s+n)V_n^{(s)} = 0.$$

---

[1] Pour $s = 2$, on a, en particulier, cette expression remarquable :

$$V_n^{(2)}(\cos\gamma) = \frac{\sin(n+1)\gamma}{\sin\gamma}.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

7° La dérivée d'un polynome V s'exprime par un autre polynome V, mais appartenant à une valeur différente de s :

$$\frac{d^k V_n^{(s)}}{dx^k} = 2^k \left(\frac{s}{2}, k\right) V_{n-k}^{(s+2k)} \qquad (k \leqq n). \tag{9}$$

8° Le polynome $V_n^{(s)}$ est une intégrale particulière de l'équation différentielle

$$(1-x^2)\frac{d^2V}{dx^2} - (s+1)x\frac{dV}{dx} + n(n+s)V = 0 \tag{10}$$

qui se ramène immédiatement à celle de la fonction hypergéométrique, en faisant

$$\alpha = -\frac{n}{2}, \qquad \beta = \frac{n+s}{2}, \qquad \gamma = \frac{1}{2}, \qquad \xi = x^2;$$

elle admet comme intégrale générale (que n soit entier ou non)

$$V = A\,F\left(-\frac{n}{2}, \frac{n+s}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right) + B\,x\,F\left(\frac{1-n}{2}, \frac{n+s+1}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right);$$

si n est entier, il y a toujours une des deux fonctions hypergéométriques qui se réduit à un polynome et l'on retombe sur (4) et (4').

9° Le polynome $V_n^{(s)}$ s'exprime par une intégrale définie

$$V_n^{(s)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(s, n)}{(1, n)} \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^{\pi} \left(x + \sqrt{x^2-1}\cos\omega\right)^n \sin^{s-1}\omega\, d\omega, \tag{11}$$

commode notamment pour avoir une expression asymptotique de $V_n^{(s)}$ pour les très grandes valeurs de n.

10° Le système des polynomes V est orthogonal dans l'intervalle $(-1, +1)$:

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\frac{s-1}{2}} V_m^{(s)} V_n^{(s)}\, dx = 0 \qquad (m \neq n),$$

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\frac{s-1}{2}} [V_n^{(s)}]^2\, dx = \frac{2\sqrt{\pi}}{2n+s} \frac{(s, n)}{(1, n)} \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

NOTE II.

SUR UNE APPLICATION DE LA FONCTION $F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y)$ A CERTAINS DÉVELOPPEMENTS DE LA MÉCANIQUE CÉLESTE.

Pour former, dans certains problèmes de Mécanique Céleste, le développement de la fonction perturbatrice, on est amené à résoudre la question suivante :

Soit

$$z = \mu \cos x + \nu \cos y,$$

x et y désignant deux variables indépendantes, μ et ν deux constantes liées par la relation

$$\mu + \nu = 1;$$

développer le polynome $V_n^{(s)}(z)$ en un polynome trigonométrique, procédant selon les cosinus des multiples de x et de y.

Nous poserons

$$V_n^{(s)}(z) = 4\,\Sigma' A_{i,j}^{s,n} \cos ix \cos jy, \tag{1}$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs positives ou nulles des entiers i et j pour lesquelles $n-i-j$ est un nombre positif pair; avec cette convention que, si l'un des indices i ou j est nul, on divise par 2 le terme général, et, s'ils sont nuls simultanément, on le divise par 4.

La détermination des coefficients $A_{i,j}^{s,n}$ a été effectuée pour la première fois par F. Tisserand (1), d'abord pour $s = 1$ et $s = 2$, puis pour s pair; il a démontré que ces coefficients s'exprimaient alors par des fonctions hypergéométriques d'une variable. Peu après, P. Appell (2) a établi que, quel que soit s, le coefficient $A_{i,j}^{s,n}$ se ramène toujours à la fonction hypergéométrique de deux variables $F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y)$. R. Radau (3) a donné une méthode qui permet de retrouver ce résultat par une voie différente. O. Callandreau (4) a formé une équation différentielle du troisième ordre vérifiée par $A_{i,j}^{s,n}$. Récemment, M. H. Andoyer (5) a fait connaître une méthode de calcul direct, qui redonne les formules de Tisserand relatives à $s = 1$ et $s = 2$.

Pour obtenir l'expression générale de $A_{i,j}^{s,n}$, partons du développement de la fonction génératrice en série trigonométrique :

$$[1 - 2a(\mu \cos x + \nu \cos y) + a^2]^{-\frac{s}{2}} = 4\,\Sigma' b_{i,j} \cos ix \cos jy;$$

e coefficient $b_{i,j}$ a pour expression

$$b_{i,j} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi [1 - 2a(\mu \cos x + \nu \cos y) + a^2]^{-\frac{s}{2}} \cos ix \cos jy \, dx\, dy,$$

(1) F. Tisserand, *Comptes rendus*, t. 97, 1883, p. 815 et 880.

(2) P. Appell, *Comptes rendus*, t. 97, 1883, p. 1036, et *Sur une formule de M. Tisserand et sur les fonctions hypergéométriques de deux variables* (*Journal de Mathématiques*, 3e série, t. X, 1884, p. 407-428).

(3) R. Radau, *Comptes rendus*, t. 97, 1883, p. 130 et 1275.

(4) O. Callandreau, *Comptes rendus*, t. 97 1883, p. 1187.

(5) H. Andoyer, *Comptes rendus*, t. 172, 1921, p. 1545.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

expression qui se laisse facilement transformer en celle-ci :

$$b_{i,j}=\frac{1}{2^{i+j-1}\pi^2}\frac{\left(\frac{s}{2}, i+j\right)}{\left(\frac{1}{2}, i\right)\left(\frac{1}{2}, j\right)}\mu^i\nu^j a^{i+j}\int_0^\pi\int_0^\pi[1-2a(\mu\cos x+\nu\cos y)+a^2]^{-\left(\frac{s}{2}+i+j\right)}\sin^{2i}x\sin^{2j}y\,dx\,dy;$$

en développant cette intégrale en série selon les puissances de a et en cherchant le coefficient de a^n, des calculs faciles conduisent à la formule annoncée :

$$(1)\quad A_{i,j}^{s,n}=(-1)^{\frac{n-i-j}{2}}\frac{\left(\frac{s}{2}, \frac{n+i+j}{2}\right)}{\left(1, \frac{n-i-j}{2}\right)(1, i)(1, j)}\mu^i\nu^j F_4\left(\frac{i+j-n}{2}, \frac{n+s+i+j}{2}, i+1, j+1, \mu^2, \nu^2\right);$$

la fonction hypergéométrique F_4 est un polynome par rapport à μ^2 et ν^2, puisque son premier élément est un entier négatif, $n-i-j$ étant un nombre positif pair (p. 14).

Si l'on considère μ et ν comme deux variables indépendantes, le coefficient $A_{i,j}^{s,n}$ vérifie un système de deux équations aux dérivées partielles, qui se tirent immédiatement de celles de F_4 (p. 51) :

$$\mu^2(1-\mu^2)\frac{\partial^2 A}{\partial\mu^2}-2\mu^3\nu\frac{\partial^2 A}{\partial\mu\,\partial\nu}-\mu^2\nu^2\frac{\partial^2 A}{\partial\nu^2}+[1-(s+2)\mu^2]\mu\frac{\partial A}{\partial\mu}-(s+2)\mu^2\nu\frac{\partial A}{\partial\nu}+[i^2+n(n+s)\mu^2]A=0,$$

$$\nu^2(1-\nu^2)\frac{\partial^2 A}{\partial\nu^2}-2\mu\nu^3\frac{\partial^2 A}{\partial\mu\,\partial\nu}-\mu^2\nu^2\frac{\partial^2 A}{\partial\mu^2}+[1-(s+2)\nu^2]\nu\frac{\partial A}{\partial\nu}-(s+2)\mu\nu^2\frac{\partial A}{\partial\mu}+[j^2+n(n+s)\nu^2]A=0;$$

mais dans les développements de la Mécanique Céleste, μ et ν sont en réalité liés par la relation

$$\mu+\nu=1,$$

et on les exprime habituellement en fonction d'une variable auxiliaire J :

$$\mu=\cos^2\frac{J}{2},\qquad \nu=\sin^2\frac{J}{2}.$$

D'après les idées exposées au paragraphe XXIX, la fonction d'une seule variable ν

$$z(\nu)=F_4\left[\frac{i+j-n}{2}, \frac{n+s+i+j}{2}, i+1, j+1, (1-\nu)^2, \nu^2\right]$$

doit vérifier une équation différentielle du quatrième ordre au plus. Considérons le système d'équations vérifiées par la fonction $z=F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y)$:

$$x(1-x)r-2xys-y^2t+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]p-(\alpha+\beta+1)yq-\alpha\beta z=0,$$
$$y(1-y)t-2xys-x^2r+[\gamma'-(\alpha+\beta+1)y]q-(\alpha+\beta+1)xp-\alpha\beta z=0,$$

et posons [1] :

$$\alpha=\frac{i+j-n}{2},\qquad \beta=\frac{n+s+i+j}{2},\qquad \gamma=i+1,\qquad \gamma'=j+1,$$
$$x=(1-\nu)^2,\qquad y=\nu^2.$$

On a :

$$(2)\qquad \frac{dz}{d\nu}=-2(1-\nu)p+2\nu q,$$

$$(2')\qquad \frac{d^2z}{d\nu^2}=4(1-\nu)^2r-8\nu(1-\nu)s+4\nu^2t+2p+2q.$$

---

[1] Cette methode a été développée par Paul Appell, *loc. cit.*

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Or, des équations de F_4 on tire les deux combinaisons suivantes :

$$(3)\qquad (1-v)^2 r - v^2 t = -\gamma p + \gamma' q,$$

$$(4)\qquad (1-v)^2 r - 2v(1-v)s + v^2 t = -\frac{1}{v}[\gamma - (\alpha+\beta+1)(1-v)]p - \frac{1}{1-v}[\gamma' - (\alpha+\beta+1)v]q + \frac{\alpha\beta}{v(1-v)}z.$$

En combinant les équations (2'), (3) et (4), on obtient facilement :

$$(5)\qquad v(1-v)\frac{d^2 z}{dv^2} + (A - Bv)\frac{dz}{dv} - 4\alpha\beta z = 2C[(1-v)p + vq],$$

$$A = \alpha+\beta+\frac{1}{2}-\gamma+\gamma', \qquad B = 2\alpha+2\beta+1, \qquad C = \alpha+\beta+\frac{3}{2}-\gamma-\gamma'.$$

Dans le cas qui nous occupe actuellement :

$$A = 2j + \frac{s+1}{2}, \qquad B = 2i+2j+s+1, \qquad C = \frac{s-1}{2}.$$

Le second membre de la relation (5) est identiquement nul pour $s = 1$: le polynome V, dont on cherche le développement par la formule (1), est alors un polynome de Legendre.

Dans ce cas, l'équation (5) *est simplement une équation hypergéométrique* (7-I) *et* $z(v)$ *s'exprime par un polynome hypergéométrique*

$$z(v) = k\,F(i+j-n,\ n+1+i+j,\ 2j+1,\ v);$$

c'est bien le résultat particulier donné par Tisserand.

Ce cas spécial écarté, dérivons (5) par rapport à v et remplaçons $\frac{dp}{dv}$ et $\frac{dq}{dv}$ par leurs valeurs :

$$(6)\qquad v(1-v)\frac{d^3 z}{dv^3} + [A+1-(B+2)v]\frac{d^2 z}{dv^2} - (B+4\alpha\beta)\frac{dz}{dv} = 4C\left[\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)p - \left(\gamma'-\frac{1}{2}\right)q\right].$$

En éliminant p et q entre les équations (2), (5) et (6), on voit que *la fonction* $z(v)$ *vérifie une équation linéaire du troisième ordre seulement;* on se trouve, par conséquent, dans le cas de réduction de la page 93 :

$$(7)\qquad v^2(1-v)^2\frac{d^3 z}{dv^3} + v(1-v)(L-Mv)\frac{d^2 z}{dv^2} + (N - Pv + Qv^2)\frac{dz}{dv} + 4\alpha\beta(R - Sv)z = 0,$$

$$L = \alpha+\beta+1-\gamma+2\gamma', \qquad M = 2\alpha+2\beta+2+\gamma+\gamma', \qquad N = (\alpha+\beta+1-\gamma)(2\gamma'-1),$$

$$P = 4\alpha\beta + 2\gamma'(2\alpha+2\beta+1), \qquad Q = 4\alpha\beta + (2\alpha+2\beta+1)(\gamma+\gamma'),$$

$$R = \frac{1}{2}-\gamma', \qquad S = 1-\gamma-\gamma';$$

on obtient facilement l'expression de ces sept constantes dans le cas actuel, en y remplaçant α, β, γ, γ' par leurs valeurs.

Ceci étant établi, remarquons que le carré d'une fonction hypergéométrique

$$y(v) = [F(a, b, c, v)]^2$$

vérifie l'équation du troisième ordre :

$$(8)\qquad v^2(1-v)^2\frac{d^3 y}{dv^3} + v(1-v)(l-mv)\frac{d^2 y}{dv^2} + (n - pv + qv^2)\frac{dy}{dv} + 2(r-sv)y = 0,;$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

les constantes ayant pour valeurs :

$$l = 3c, \qquad m = 3(a+b+1), \qquad n = c(2c-1), \qquad p = 4ab + 2c(2a+2b+1),$$
$$q = 4ab + (a+b+1)(2a+2b+1), \qquad r = ab(1-2c), \qquad s = -2ab(a+b).$$

Les équations (7) et (8) ont un aspect identique, néanmoins la première contenant quatre constantes : $\alpha, \beta, \gamma, \gamma'$, et la deuxième trois seulement : a, b, c, l'équation (7) ne peut se réduire à (8) que si $\alpha, \beta, \gamma, \gamma'$ sont liés par une relation.

Avec les valeurs actuelles des constantes $\alpha, \beta, \gamma, \gamma'$, l'équation (7) se ramène à l'équation (8) dans le cas particulier où $s = 2$; on a alors, en effet,

$$L = 3(j+1), \qquad M = 3(i+j+2), \qquad N = (j+1)(2j+1),$$
$$P = (i+j-n)(i+j+n+2) + 2(j+1)(2i+2j+3),$$
$$Q = (i+j-n)(i+j+n+2) + (i+j+2)(2i+2j+3),$$
$$R = -\left(j+\frac{1}{2}\right), \qquad S = -(i+j+1);$$

si dans l'équation (8) on prend

$$a = \frac{i+j-n}{2}, \qquad b = \frac{i+j+n+2}{2}, \qquad c = j+1,$$

on voit sans peine que les valeurs de $l, m, n, \ldots$ deviennent identiques à L, M, N, ...

Donc, pour $s = 2$, la fonction $z(v)$ s'exprime par le carré d'un polynome hypergéométrique

$$z(v) = k\left[F\left(\frac{i+j-n}{2}, \frac{i+j+n+2}{2}, j+1, v\right)\right]^2;$$

c'est le second cas particulier remarquable, signalé par Tisserand.

On peut enfin rechercher dans quel cas l'équation (7) se réduit à l'équation du troisième ordre (11-XLVI) vérifiée par une fonction de Clausen. Cette réduction a lieu chaque fois que $\gamma = \gamma'$, c'est-à-dire ici pour $i = j$ (ce résultat est également dû à Tisserand). En effet, supposant $\gamma = \gamma'$, faisons le changement de variable

$$\xi = 4v(1-v);$$

l'équation (7) se transforme en celle-ci :

$$\xi^2(1-\xi)\frac{d^3z}{d\xi^3} + \xi\left[\alpha+\beta+1+\gamma - \left(\alpha+\beta+\frac{5}{2}+\gamma\right)\xi\right]\frac{d^2z}{d\xi^2}$$
$$+ \left\{(2\gamma-1)(\alpha+\beta+1-\gamma) - \left[\alpha\beta + (\alpha+\beta+1)\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\right]\xi\right\}\frac{dz}{d\xi} - \alpha\beta\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)z = 0,$$

qui est identique à l'équation de la fonction de Clausen :

$$F\left(\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma-\frac{1}{2}, & \\ \alpha+\beta+1-\gamma, & 2\gamma-1, & & \end{matrix}\ \xi\right).$$

Donc, pour $i = j$, quel que soit s, la fonction $z(v)$ s'exprime par le polynome hypergéométrique de Clausen :

$$z(v) = F\left(\begin{matrix} \frac{2i-n}{2}, & \frac{2i+n+s}{2}, & \frac{2i-1}{2}, & \\ & i+\frac{s}{2}, & 2i+1, & \end{matrix}\ 4v(1-v)\right).$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

NOTE III.

SUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES HYPERGÉOMÉTRIQUES LES PLUS GÉNÉRALES A DEUX VARIABLES.

Dans un Mémoire [1], — où semble avoir été donnée pour la première fois la définition des fonctions hypergéométriques les plus générales à deux variables (XLVII), — J. Horn a déterminé la convergence des séries doubles hypergéométriques les plus générales :

$$F(x, y) = \Sigma a_{m,n} x^m y^n, \tag{1}$$

dont les coefficients vérifient les conditions

$$\frac{a_{m+1,n}}{a_{m,n}} = \frac{P(m, n)}{R(m, n)}, \qquad \frac{a_{m,n+1}}{a_{m,n}} = \frac{Q(m, n)}{S(m, n)}, \tag{2}$$

P, Q, R, S désignant quatre polynomes en m et n, respectivement de degré p, q, r, s, choisis arbitrairement pourvu qu'ils vérifient la condition de compatibilité (18-XLVII).

J. Horn commence par établir le lemme suivant, qui étend aux séries doubles un critère de convergence bien connu pour les séries simples. Considérons m et n comme les coordonnées d'un point d'un plan ; soient OM l'axe des m, ON celui des n; menons deux demi-droites OP et OQ, se succédant dans l'ordre : OM, OQ, OP, ON; soient $\mathfrak{P}$ l'angle $\widehat{OM, OP}$, $\mathfrak{Q}$ l'angle $\widehat{ON, OQ}$, $\mathfrak{S}$ l'angle $\widehat{OP, OQ}$.

Lemme. — 1° Si pour tous les points situés dans l'angle $\mathfrak{S}$, tels que m et n soient plus grands que des nombres positifs M et N, on a

$$\left|\frac{U_{m+1,n}}{U_{m,n}}\right| > 1 \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{U_{m,n+1}}{U_{m,n}}\right| > 1,$$

la série double

$$\Sigma |U_{m,n}|$$

est divergente.

2° Si pour tous les points tels que m et n soient plus grands que des nombres positifs M et N, on a dans l'angle $\mathfrak{P}$

$$\left|\frac{U_{m+1,n}}{U_{m,n}}\right| < \alpha < 1,$$

et dans l'angle $\mathfrak{Q}$

$$\left|\frac{U_{m,n+1}}{U_{m,n}}\right| < \beta < 1,$$

la série double

$$\Sigma |U_{m,n}|$$

est convergente.

---

[1] J. Horn, *Ueber die Convergenz der hypergeometrischen Reihen zweier und dreier Veränderlichen* (*Math. Ann.*, t. 34, 1889, p. 544-600). Dans ce Mémoire, ainsi que dans le suivant, il étudie également les systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions F : *Ueber ein System linearer partieller Differentialgleichungen* (*Acta mathematica*, t. 12, 1889, p. 113-175).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

L'application de cette règle à la série hypergéométrique (1) conduit J. Horn au résultat suivant. Posons

$$(3)\qquad \Phi(m, n) = \lim_{t=\infty} \frac{P(tm, tn)}{R(tm, tn)}, \qquad \Psi(m, n) = \lim_{t=\infty} \frac{Q(tm, tn)}{S(tm, tn)};$$

il est clair que $\Phi(m, n)$, par exemple, est infinie si $p > r$, nulle si $p < r$; c'est une fraction rationnelle en m et n, si $p = r$.

Théorème. — 1° *Si $p > r$ et $q > s$, la série* (1) *diverge pour toute valeur de x et y différente de $x = 0$ et $y = 0$;*

2° *Si $p < r$ et $q < s$, la série* (1) *converge pour toutes les valeurs de x et de y;*

3° *Si $p < r$ et $q = s$, la série* (1) *converge pour toute valeur de x, tant que $|y| < \frac{1}{|\Psi(0, 1)|}$;*

4° *Si $p = r$ et $q < s$, la série* (1) *converge pour toute valeur de y, tant que $|x| < \frac{1}{|\Phi(1, 0)|}$;*

5° *Si $p = r$ et $q = s$, la série* (1) *converge tant que*

$$|x| < \frac{1}{|\Phi(1, 0)|} \qquad \text{et} \qquad |y| < \frac{1}{|\Psi(0, 1)|},$$

et qu'en outre

$$|x| < \frac{1}{|\Phi(m, n)|} \qquad \text{ou} \qquad |y| < \frac{1}{|\Psi(m, n)|},$$

pour toutes les valeurs positives du rapport $m : n$.

J. Horn donne une forme géométrique élégante à ce théorème; la convergence de la série (1) ne dépend que des valeurs des modules $|x|$ et $|y|$; considérons $\xi = |x|$ et $\eta = |y|$ comme les coordonnées d'un point d'un quart de plan.

Soient ($\mathfrak{A}$) et ($\mathfrak{B}$) les deux parallèles aux axes

$$\xi = \frac{1}{|\Phi(1, 0)|} \qquad \text{et} \qquad \eta = \frac{1}{|\Psi(0, 1)|}$$

($\mathfrak{D}$) le rectangle déterminé par les axes $O\xi$, $O\eta$ et les droites ($\mathfrak{A}$) et ($\mathfrak{B}$);
et ($\mathfrak{C}$) l'arc de courbe d'équations paramétriques :

$$\xi = \frac{1}{|\Phi(m, n)|}, \qquad \eta = \frac{1}{|\Psi(m, n)|} \qquad (m > 0,\ n > 0);$$

1° Si $p > r$ et $q > s$, le domaine de convergence se réduit au point O.

2° Si $p < r$ et $q < s$, le domaine de convergence comprend tout le quart de plan.

3° Si $p < r$ et $q = s$, le domaine de convergence comprend toute la bande située entre l'axe $O\xi$ et la droite ($\mathfrak{B}$).

4° Si $p = r$ et $q < s$, le domaine de convergence comprend toute la bande située entre l'axe $O\eta$ et la droite ($\mathfrak{A}$).

5° Si $p = r$ et $q = s$, le domaine de convergence ne comprend que les points, intérieurs au rectangle ($\mathfrak{D}$) et situés au-dessous de la courbe ($\mathfrak{C}$).

Illustrons ceci en l'appliquant aux quatre fonctions complètes d'ordre 1, pour lesquelles on a respectivement :

$$p = r = q = s = 2.$$

	F_1	F_2	F_3	F_4
$\Phi(m, n)$	1	$\frac{m+n}{m}$	$\frac{m}{m+n}$	$\left(\frac{m+n}{m}\right)^2$
$\Psi(m, n)$	1	$\frac{m+n}{n}$	$\frac{n}{m+n}$	$\left(\frac{m+n}{n}\right)^2$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Pour ces quatre fonctions, les droites ($\mathcal{A}$) et ($\mathcal{B}$) ont pour équations :

$$\xi = 1, \qquad \eta = 1.$$

Le domaine de convergence ne comprend que des points intérieurs au carré ($\mathcal{D}$) :

$$0 \leqq \xi \leqq 1, \qquad 0 \leqq \eta \leqq 1.$$

Pour F_1, le domaine comprend tout le carré, la courbe ($\mathcal{C}$) se réduisant au point $\xi = 1$, $\eta = 1$.
Pour F_2, le domaine comprend la moitié du carré situé au-dessous de la diagonale :

$$\xi = \frac{m}{m+n}, \qquad \eta = \frac{n}{m+n}, \qquad \xi + \eta = 1.$$

Pour F_3, le domaine comprend tout le carré, la courbe ($\mathcal{C}$) (hyperbole équilatère) étant entièrement extérieure au carré :

$$\xi = \frac{m+n}{m}, \qquad \eta = \frac{m+n}{n}, \qquad \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\eta} = 1.$$

Pour F_4, le domaine comprend la portion du carré située au-dessous de la courbe :

$$\xi = \left(\frac{m}{m+n}\right)^2, \qquad \eta = \left(\frac{n}{m+n}\right)^2, \qquad \sqrt{\xi} + \sqrt{\eta} = 1.$$

Tous ces résultats sont conformes à ceux du paragraphe III.

D'une manière plus générale, considérons une fonction hypergéométrique d'ordre ω, définie par la formule (29-XLVIII), pour laquelle

$$p = q = \mu + \nu = \omega + 1 - \theta; \qquad r = s = \rho + \sigma + 1 = \omega + 1.$$

Sauf pour $\theta = 0$, on a

$$p < r \quad \text{et} \quad q < s.$$

Donc : *Une série hypergéométrique d'ordre ω et de classe θ positive converge pour toutes les valeurs de x et de y.*

Examinons ce qui se passe pour les fonctions complètes (classe $\theta = 0$); on a

$$p = q = r = s = \omega + 1,$$
$$\Phi(m, n) = (m+n)^{\mu-\rho} m^{\nu-\sigma-1}, \qquad \Psi(m, n) = (m+n)^{\mu-\rho} n^{\nu-\sigma-1}.$$

Les droites ($\mathcal{A}$) et ($\mathcal{B}$) ont encore pour équations $\xi = 1$ et $\eta = 1$; le domaine de convergence ne comprend que des points intérieurs au carré :

$$0 \leqq \xi \leqq 1, \qquad 0 \leqq \eta \leqq 1.$$

Si l'on observe que

$$\nu - \sigma - 1 = (\omega + 1 - \mu) - (\omega - \rho) - 1 = \rho - \mu,$$

on voit qu'il y a trois cas possibles :

1° $\qquad \mu - \rho = 0, \qquad$ d'où $\qquad \Phi(m, n) = 1, \qquad \Psi(m, n) = 1,$

le domaine comprend tous les points intérieurs au carré;

2° $\qquad \mu - \rho = -k < 0, \qquad$ d'où $\qquad \Phi(m, n) = \left(\frac{m}{m+n}\right)^k, \qquad \Psi(m, n) = \left(\frac{n}{m+n}\right)^k,$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

le domaine comprend encore tous les points intérieurs au carré, la courbe

$$\xi = \left(\frac{m+n}{m}\right)^k, \qquad \eta = \left(\frac{m+n}{m}\right)^k, \qquad \frac{1}{\xi^{\frac{1}{k}}} + \frac{1}{\eta^{\frac{1}{k}}} = 1$$

étant tout entière extérieure au carré;

3° $\mu - \rho = k > 0$, d'où $\Phi(m, n) = \left(\frac{m+n}{m}\right)^k$, $\Psi(m, n) = \left(\frac{m+n}{n}\right)^k$,

le domaine comprend les points intérieurs au carré situés au-dessous de la courbe

$$\xi = \left(\frac{m}{m+n}\right)^k, \qquad \eta = \left(\frac{n}{m+n}\right)^k, \qquad \xi^{\frac{1}{k}} + \eta^{\frac{1}{k}} = 1.$$

Par exemple, en se reportant au tableau (p. 152) des dix fonctions complètes d'ordre 2, on voit que :

les fonctions des types 3 et 7 appartiennent au cas 1;
les fonctions des types 6, 9 et 10 appartiennent au cas 2;
les fonctions des types 1, 2, 4, 5, 8 appartiennent au cas 3.

Pour les fonctions des types 3, 6, 7, 9, 10, le domaine de convergence est par conséquent le carré tout entier; pour les fonctions des types 4 et 8, la courbe limite ($\mathfrak{C}$) est la droite

$$\xi + \eta = 1;$$

pour les fonctions des types 1 et 5, c'est la courbe

$$\sqrt{\xi} + \sqrt{\eta} = 1;$$

pour la fonction du type 2, la courbe

$$\sqrt[3]{\xi} + \sqrt[3]{\eta} = 1.$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

NOTE IV.

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES PAR DES FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES GÉNÉRALES.

La définition, donnée au paragraphe XLVII, de la fonction hypergéométrique la plus générale à deux variables, s'étend au cas de n variables :

La série entière n-uple

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \Sigma a_{m_1, \ldots, m_n} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n} \tag{1}$$

définit un élément d'une fonction hypergéométrique générale à n variables, si les n rapports

$$\frac{a_{m_1+1, \ldots, m_n}}{a_{m_1, \ldots, m_n}}, \quad \ldots, \quad \frac{a_{m_1, \ldots, m_n+1}}{a_{m_1, \ldots, m_n}}$$

sont des fonctions rationnelles des indices $m_1, \ldots, m_n$.

Cette définition se rencontre pour la première fois, semble-t-il, chez J. Horn [1], qui a déterminé les conditions de convergence de la série (1) (notamment dans le cas de $n = 3$) et indiqué qu'elle vérifiait un système de n équations linéaires aux dérivées partielles à coefficients rationnels en $x_1, \ldots, x_n$. Les fonctions étudiées postérieurement par G. Lauricella (XXXVII) rentrent comme cas très particuliers dans cette classe générale; par exemple, pour la fonction F_A, on a :

$$\frac{a_{m_1+1, \ldots, m_n}}{a_{m_1, \ldots, m_n}} = \frac{(\alpha + m_1 + \ldots + m_n)(\beta_1 + m_1)}{(\gamma_1 + m_1)(m_1 + 1)}, \quad \ldots, \quad \frac{a_{m_1, \ldots, m_n+1}}{a_{m_1, \ldots, m_n}} = \frac{(\alpha + m_1 + \ldots + m_n)(\beta_n + m_n)}{(\gamma_n + m_n)(m_n + 1)}.$$

L'étude de ces fonctions se fait comme au paragraphe XLVII ($n = 2$), sans introduire d'idée essentiellement nouvelle; la seule difficulté résulte de la complexité croissante de l'écriture.

Une proposition, découverte récemment, donne un grand intérêt à cette classe de fonctions :

Les racines d'une équation algébrique peuvent toujours s'exprimer par des fonctions hypergéométriques générales des coefficients de cette équation.

Le premier résultat dans cette voie paraît dû à M. A. Capelli [2] (1907); ses formules furent postérieurement (1920) complétées par M. G. Belardinelli [3], qui a apporté une contribution intéressante. D'un autre côté, M. Hj. Mellin [4] (1915), — auteur de recherches très étendues sur les fonctions hypergéo-

---

(1) J. Horn, *voir* Note III.

(2) A. Capelli, *Sulla risoluzione generale delle equazioni per mezzo di sviluppi in serie* (*Rend. Acc. Sc. Fisiche e Matem. Napoli*, 3e série, t. 13, 1907, p. 192, 289, 342).

(3) G. Belardinelli, *Sulla risoluzione delle equazione algebriche mediante sviluppi in serie* (*Ann. di matem. pura appl.*, 3e série, t. 19, 1920, p. 251-270); *Sulla risoluzione delle equazioni algebriche mediante le funzioni ipergeometriche* (*Rend. Acc. dei Lincei*, 5e série, t. 30, 1921, p. 208); *L'equazione differenziale risolvente dell' equazione trinomia* (*Rend. Circolo matematico Palermo*, t. 46, 1922, p. 463).

(4) Hj. Mellin, *Zur theorie der trinomischen Gleichungen* (*Ann. Acad. Scientiarum Fennicæ*, série A, t. 7, 1915, n° 7); *Ein allgemeiner Satz über algebraische Gleichungen* (*Ann. Acad. Scientiarum Fennicæ*, série A, t. 7, 1915, n° 8). — *Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction* gamma (*Comptes rendus*, t. 172, 1921, p. 658).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

métriques générales et leur représentation par des intégrales définies, — a explicitement démontré cette proposition et a formé le système d'équations linéaires aux dérivées partielles que vérifie une puissance arbitraire d'une racine, considérée comme fonction des coefficients. Indépendamment des auteurs précédents, M. R. Birkeland (1) a donné, par une voie élémentaire, l'expression explicite des racines par des fonctions hypergéométriques des coefficients et étudié la convergence des séries.

Nous résumerons plus particulièrement l'analyse de M. Birkeland; considérons d'abord l'*équation trinome* de degré $n+1$

$$z^{n+1} - z + a = 0, \tag{2}$$

pour laquelle les formules générales se simplifient; elle s'identifie avec l'expression

$$u = x + a\,u^{\frac{n+1}{n}}, \tag{3}$$

en faisant

$$u = z^{-n}, \qquad x = 1. \tag{4}$$

L'équation (3) est de la forme

$$u = x + a\,\varphi(u)$$

u désignant la racine qui prend la valeur x pour $a = 0$, la série de Lagrange (*voir* LXXXIII) fournit le développement, convergent tant que $|a|$ est assez petit :

$$F(u) = F(x) + \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{a^{m+1}}{(1, m+1)} \frac{d^m}{dx^m}[\varphi(x)^{m+1} F'(x)]. \tag{5}$$

En appliquant cette formule à l'équation (3) avec $F(u) = u^{-\frac{1}{n}}$, on obtient

$$u^{-\frac{1}{n}} = x^{-\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\left(\frac{m}{n}+1, m\right)}{(1, m+1)} x^{\frac{m}{n}} a^{m+1}.$$

Or, tout entier m se met d'une seule manière sous la forme $m = pn + q$, p et q étant des entiers et q ne prenant que les valeurs $0, 1, \ldots, n-1$; on peut donc décomposer la série en une somme de n séries :

$$u^{-\frac{1}{n}} = x^{-\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{q=n-1} x^{\frac{q}{n}} a^{q+1} \left[\sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\left(\frac{q}{n}+p+1, pn+q\right)}{(1, pn+q+1)} x^p a^{pn} \right]$$

$$= x^{-\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{q=n-1} \frac{\left(\frac{q}{n}+1, q\right)}{(1, q+1)} x^{\frac{q}{n}} a^{q+1} \left[\sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\left(\frac{q}{n}+q+1, pn+p\right)}{\left(\frac{q}{n}+1, p\right)(q+2, pn)} a^{pn} \right].$$

Soit ε_j une racine $n^{\text{ième}}$ primitive de l'unité; lorsque $x = 1$, on a

$$x^{-\frac{1}{n}} = \varepsilon_j^{-1} \qquad \text{et} \qquad x^{\frac{q}{n}} = \varepsilon_j^{q};$$

(1) R. Birkeland, *Résolution de l'équation algébrique trinome par les fonctions hypergéométriques supérieures* (*Comptes rendus*, t. 171, 1920, p. 778); *Résolution de l'équation générale du cinquième degré* (*Ibid.*, p. 1017); *Résolution de l'equation algébrique générale par des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables* (*Ibid.*, p. 1370, et t. 172, 1921, p. 309); *Sur la convergence des développements qui expriment les racines de l'équation algébrique générale par une somme de fonctions hypergéométriques de plusieurs variables* (*Ibid.*, p. 1155).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

il est clair, d'après (4), que le développement précédent représente alors une racine $z_j = u^{-\frac{1}{n}}$ de l'équation trinome

$$z_j = \varepsilon_j^{-1} - \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{q=n-1} \frac{\left(\frac{q}{n}+1, q\right)}{(1, q+1)} \varepsilon_j^q a^{q+1} \left[\sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\left(\frac{q}{n}+q+1, pn+p\right)}{\left(\frac{q}{n}+1, p\right)(q+2, pn)} a^{pn} \right],$$

que nous écrirons sous la forme suivante :

$$\varepsilon_j z_j = F_0(a^n) + \varepsilon_j A_1 a F_1(a^n) + \ldots + \varepsilon_j^{n-1} A_{n-1} a^{n-1} F_{n-1}(a^n), \tag{6}$$

en posant :

$$F_0(\xi) = 1 - \frac{\left(\frac{n-1}{n}+1, n-1\right)}{(1, n)} \frac{\xi}{n} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\left(\frac{n-1}{n}+n, pn+p\right)}{\left(\frac{n-1}{n}+1, p\right)(n+1, pn)} \xi^p,$$

$$F_r(\xi) = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\left(\frac{r-1}{n}+r, pn+p\right)}{\left(\frac{r-1}{n}+1, p\right)(r+1, pn)} \xi^p, \qquad A_r = -\frac{1}{n} \frac{\left(\frac{r-1}{n}+1, r-1\right)}{(1, r)}$$

$$(r = 1, 2, \ldots, n-1).$$

On reconnaît aisément que *les n fonctions* $F_0(\xi)$, $F_1(\xi)$, ..., $F_{n-1}(\xi)$ *sont des fonctions hypergéométriques complètes d'ordre* $n-1$ (p. 140).

En effet, en appliquant au coefficient de ξ^p la formule élémentaire

$$(\lambda, mp) = m^{mp} \left(\frac{\lambda}{m}, p\right) \left(\frac{\lambda+1}{m}, p\right) \cdots \left(\frac{\lambda+m-1}{m}, p\right),$$

on obtient immédiatement

$$F_r(\xi) = F\left(\begin{matrix} \alpha_1, & \ldots, & \alpha_n, \\ \beta_1, & \ldots, & \beta_{n-1}, \end{matrix} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \xi\right) \qquad (r = 0, 1, \ldots, n-1),$$

les n éléments supérieurs $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ étant les n nombres rationnels

$$\frac{r-1}{n} + \frac{1}{n+1}, \quad \frac{r-1}{n} + \frac{2}{n+1}, \quad \ldots, \quad \frac{r-1}{n} + \frac{n}{n+1},$$

les $n-1$ éléments inférieurs $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ étant extraits de la suite de n nombres rationnels

$$\frac{r+1}{n}, \quad \frac{r+2}{n}, \quad \ldots, \quad \frac{r+n}{n},$$

en y supprimant le nombre 1, qui y figure toujours.

En faisant $j = 1, 2, \ldots, n$, *la formule* (6) *fournit l'expression de n racines distinctes de l'équation trinome par des fonctions hypergéométriques.*

La relation

$$z_{n+1} = -(z_1 + \ldots + z_n)$$

donne la $(n+1)^{\text{ième}}$ *racine sous la forme*

$$z_{n+1} = -n A_1 a F_1(a^n). \tag{7}$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Les séries, qui représentent les diverses fonctions hypergéométriques, ne sont convergentes que si

$$\left|\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}a^n\right| < 1, \qquad |a| < \frac{n}{(n+1)^{\frac{n+1}{n}}}.$$

Mais en se servant des formules de transformation des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur, on peut exprimer les racines par des fonctions hypergéométriques représentables par des séries qui convergent au contraire lorsque

$$|a| > \frac{n}{(n+1)^{\frac{n+1}{n}}}.$$

Pour donner une application, considérons l'équation du cinquième degré

$$z^5 - z + a = 0;$$

introduisons les quatre fonctions hypergéométriques complètes d'ordre 3 :

$$F_0(\xi) = F\left(\begin{matrix} -\frac{1}{20}, & \frac{3}{20}, & \frac{7}{20}, & \frac{11}{20}, & \\ \frac{1}{4}, & \frac{2}{4}, & \frac{3}{4}, & & \end{matrix}\ \frac{5^5}{4^4}\xi\right), \qquad F_1(\xi) = F\left(\begin{matrix} \frac{1}{5}, & \frac{2}{5}, & \frac{3}{5}, & \frac{4}{5}, & \\ \frac{2}{4}, & \frac{3}{4}, & \frac{5}{4}, & & \end{matrix}\ \frac{5^5}{4^4}\xi\right),$$

$$F_2(\xi) = F\left(\begin{matrix} \frac{9}{20}, & \frac{13}{20}, & \frac{17}{20}, & \frac{21}{20}, & \\ \frac{3}{4}, & \frac{5}{4}, & \frac{6}{4}, & & \end{matrix}\ \frac{5^5}{4^4}\xi\right), \qquad F_3(\xi) = F\left(\begin{matrix} \frac{7}{10}, & \frac{9}{10}, & \frac{11}{10}, & \frac{13}{10}, & \\ \frac{5}{4}, & \frac{6}{4}, & \frac{7}{4}, & & \end{matrix}\ \frac{5^5}{4^4}\xi\right).$$

Les cinq racines sont données par :

$$\begin{aligned}
i z_1 &= F_0(a^4) - \frac{i}{4} a F_1(a^4) + \frac{5}{32} a^2 F_2(a^4) + \frac{5i}{32} a^3 F_3(a^4),\\
-\ z_2 &= F_0(a^4) + \frac{1}{4} a F_1(a^4) - \frac{5}{32} a^2 F_2(a^4) + \frac{5}{32} a^3 F_3(a^4),\\
-i z_3 &= F_0(a^4) + \frac{i}{4} a F_1(a^4) + \frac{5}{32} a^2 F_2(a^4) - \frac{5}{32} i a^3 F_3(a^4),\\
z_4 &= F_0(a^4) - \frac{1}{4} a F_1(a^4) - \frac{5}{32} a^2 F_2(a^4) - \frac{5}{32} a^3 F_3(a^4),\\
z_5 &= a F_1(a^4).
\end{aligned}$$

Les quatre séries représentant les fonctions hypergéométriques sont convergentes tant que

$$|a| < \frac{4}{5^{\frac{5}{4}}} = 0{,}53500\ldots.$$

Les points critiques des racines correspondent aux valeurs de a pour lesquelles l'argument des fonctions hypergéométriques prend la valeur 1 :

$$\frac{5^5}{4^4}a^4 = 1, \qquad a_1 = 4i5^{-\frac{5}{4}}, \qquad a_2 = 4.5^{-\frac{5}{4}}, \qquad a_3 = -4i5^{-\frac{5}{4}}, \qquad a_4 = -4.5^{-\frac{5}{4}}$$

(la quantité $5^{-\frac{5}{4}}$ étant prise avec son sens arithmétique).

Or, on sait comment varie une fonction hypergéométrique quand l'argument décrit un circuit fermé autour du point $x = 1$; par conséquent, il est possible de déterminer comment se permutent les cinq racines z_j lorsque a décrit un circuit fermé autour d'un des quatre points critiques.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

En utilisant les formules de transformation des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur, M. Birkeland a exprimé les cinq racines au moyen des fonctions :

$$F\left(\begin{matrix} -\frac{1}{20}, & \frac{7}{10}, & \frac{9}{20}, & \frac{1}{5}, & \\ \frac{4}{5}, & \frac{3}{5}, & \frac{2}{5}, & & \end{matrix} \; \frac{4^4}{5^5}\frac{1}{\xi}\right), \qquad F\left(\begin{matrix} \frac{3}{20}, & \frac{9}{10}, & \frac{13}{20}, & \frac{2}{5}, & \\ \frac{6}{5}, & \frac{4}{5}, & \frac{3}{5}, & & \end{matrix} \; \frac{4^4}{5^5}\frac{1}{\xi}\right);$$

$$F\left(\begin{matrix} \frac{7}{20}, & \frac{11}{20}, & \frac{17}{20}, & \frac{3}{5}, & \\ \frac{7}{5}, & \frac{6}{5}, & \frac{4}{5}, & & \end{matrix} \; \frac{4^4}{5^5}\frac{1}{\xi}\right), \qquad F\left(\begin{matrix} \frac{11}{20}, & \frac{13}{20}, & \frac{21}{20}, & \frac{4}{5}, & \\ \frac{8}{5}, & \frac{7}{5}, & \frac{6}{5}, & & \end{matrix} \; \frac{4^4}{5^5}\frac{1}{\xi}\right);$$

sous cette forme, les séries que représentent les racines convergent tant que

$$|a| > \frac{4}{5^{\frac{5}{4}}}.$$

Une fonction hypergéométrique d'ordre $n-1$ satisfaisant à une équation différentielle linéaire d'ordre n, on peut former l'équation différentielle vérifiée par les racines de l'équation trinome considérées comme fonctions de a. M. Belardinelli a ainsi donné explicitement l'équation différentielle vérifiée par une puissance quelconque d'une racine de l'équation

$$z^p + a z^q - 1 = 0 \qquad (p > q),$$

qui se résout par une voie analogue à la précédente.

La solution de l'équation trinome facilitera l'exposé du cas général; considérons l'équation

$$z^{n+1} - z + (a_1 + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n) = 0; \tag{8}$$

elle s'identifie avec l'équation

$$u = x + \left(a_1 u^{\frac{n-1}{n}} + a_2 u^{\frac{n-1}{n}} + \ldots + a_n u^{\frac{1}{n}}\right), \tag{9}$$

en faisant

$$u = z^{-n}, \qquad x = 1.$$

L'équation (9) est de la forme

$$u = x + [a_1 \varphi_1(u) + \ldots + a_n \varphi_n(u)];$$

u désignant la racine qui prend la valeur x pour $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, la série de Lagrange (5) fournit immédiatement le développement, convergent tant que $|a_1|, \ldots, |a_n|$ sont assez petits :

$$F(u) = F(x) + \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n}}{(1, m_1) \ldots (1, m_n)} \frac{d^m}{dx^m} [\varphi_1(x)^{m_1} \ldots \varphi_n(x)^{m_n} F'(x)]$$

$$(m_1 + \ldots + m_n = m + 1).$$

En appliquant ce développement à l'équation (9), avec $F(u) = u^{-\frac{1}{n}}$, on obtient :

$$u^{-\frac{1}{n}} = x^{-\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\left(\frac{\mu}{n} + 1, m\right)}{(1, m_1) \ldots (1, m_n)} x^{\frac{\mu}{n}} a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n}$$

$$m_1 + \ldots + m_n = m + 1, \qquad \mu = m - (2m_2 + 3m_3 + \ldots + nm_n)$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Chacun des entiers $m_1, \ldots, m_n$ se met d'une seule manière sous la forme

$$m_1 = p_1 n + q_1, \qquad \ldots, \qquad m_n = p_n n + q_n,$$

les entiers $q_1, \ldots, q_n$ ne prenant que les valeurs $0, 1, \ldots, n-1$. Dans la sommation, la plus petite valeur que peut prendre $m_1 + \ldots + m_n$ étant 1, la combinaison

$$p_1 = \ldots = p_n = q_1 = \ldots = q_n = 0 \tag{10}$$

est à exclure; posons

$$p = p_1 + \ldots + p_n, \qquad q = q_1 + \ldots + q_n - 1,$$
$$\mathrm{P} = p - (2p_2 + \ldots + np_n), \qquad \mathrm{Q} = q - (2q_2 + \ldots + nq_n)$$

d'où

$$m = pn + q, \qquad \mu = \mathrm{P}n + \mathrm{Q}.$$

Le développement se met sous la forme de la somme de n^n séries :

$$u^{-\frac{1}{n}} = x^{-\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} \sum_{(q)} x^{\frac{\mathrm{Q}}{n}} a_1^{q_1} \ldots a_n^{q_n} \left[\sum_{(p)} \frac{\left(\frac{\mathrm{Q}}{n} + \mathrm{P} + 1, pn + q\right)}{(1, p_1 n + q_1) \ldots (1, p_n n + q_n)} x^{\mathrm{P}} a_1^{p_1 n} \ldots a_n^{p_n n} \right];$$

la première sommation s'effectue en donnant à chacun des entiers $q_1, \ldots, q_n$ les valeurs $0, 1, \ldots, n-1$; dans la deuxième sommation, il faut donner à $p_1, \ldots, p_n$ toutes les valeurs entières de 0 à $+\infty$; la combinaison (10) reste exclue.

Si l'on fait $x = 1$, en désignant comme plus haut par ε_j une racine $n^{\text{ième}}$ primitive de l'unité, le développement précédent représente, d'après (9), une racine de l'équation proposée (8) : $z_j = u^{-\frac{1}{n}}$:

$$z_j = \varepsilon_j^{-1} - \frac{1}{n} \sum_{(q)} \varepsilon_j^{\mathrm{Q}} a_1^{q_1} \ldots a_n^{q_n} \left[\sum_{(p)} \frac{\left(\frac{\mathrm{Q}}{n} + \mathrm{P} + 1, pn + q\right)}{(1, p_1 n + q_1) \ldots (1, p_n n + q_n)} a_1^{p_1 n} \ldots a_n^{p_n n} \right],$$

que nous écrirons sous la forme suivante :

$$\varepsilon_j z_j = 1 - \frac{1}{n} \sum_{(q)} \varepsilon_j^{\mathrm{Q}+1} a_1^{q_1} \ldots a_n^{q_n} \mathrm{F}_{q_1, \ldots, q_n}(a_1^n, \ldots, a_n^n). \tag{11}$$

En faisant $j = 1, 2, \ldots, n$, on obtient ainsi n racines distinctes $z_1, \ldots, z_n$ de l'équation algébrique proposée; la $(n+1)^{\text{ième}}$ est donnée par la formule

$$z_{n+1} = -a_n - (z_1 + \ldots + z_n).$$

Chacune des n^n séries

$$\mathrm{F}_{q_1, \ldots, q_n}(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{(p)} \frac{\left(\frac{\mathrm{Q}}{n} + \mathrm{P} + 1, pn + q\right)}{(1, p_1 n + q_1) \ldots (1, p_n n + q_n)} \xi_1^{p_1} \ldots \xi_n^{p_n} \tag{12}$$

représente une fonction hypergéométrique des n variables $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Il suffit, pour le prouver, de constater que les rapports des n coefficients $a_{p_1+1, \ldots, p_n}, \ldots, a_{p_1, \ldots, p_n+1}$ au coefficient $a_{p_1, \ldots, p_n}$ sont des fonctions rationnelles de $p_1, \ldots, p_n$.

Considérons d'abord une des expressions qui figurent au dénominateur, par exemple $(1, p_1 n + q_1)$; si $p_2, p_3, \ldots, p_n$ augmentent d'une unité, elle demeure invariable; si p_1 augmente d'une unité, elle se transforme en $(1, p_1 n + q_1 + n)$.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Le rapport

$$\frac{(1, p_1 n + q_1 + n)}{(1, p_1 n + q_1)} = (p_1 n + q_1 + 1)(p_1 n + q_1 + 2)\ldots(p_1 n + q_1 + n)$$

est un polynome de degré n par rapport à p_1.

Considérons ensuite le numérateur

$$N = \left(\frac{Q}{n} + P + 1, pn + q\right).$$

1° Si p_1 augmente d'une unité, N se transforme en $\left(\frac{Q}{n} + P + 2, pn + q + n\right)$; le rapport de la nouvelle valeur à l'ancienne est la fraction rationnelle en $p_1, \ldots, p_n$:

$$\frac{\left(\frac{Q}{n} + P + pn + q + 1\right)\ldots\left(\frac{Q}{n} + P + pn + q + n + 1\right)}{\frac{Q}{n} + P + 1};$$

2° Si p_2 augmente d'une unité, N se transforme en $\left(\frac{Q}{n} + P, pn + q + n\right)$; le rapport est ici le polynome en $p_1, \ldots, p_n$:

$$\left(\frac{Q}{n} + P\right)\left(\frac{Q}{n} + P + pn + q + 1\right)\ldots\left(\frac{Q}{n} + P + pn + q + n - 1\right);$$

3° Ainsi de suite pour $p_3, \ldots$; enfin, si p_n augmente d'une unité, N se transforme en

$$\left(\frac{Q}{n} + P + 2 - n, pn + q + n\right);$$

le rapport est encore le polynome en $p_1, \ldots, p_n$:

$$\left(\frac{Q}{n} + P + 2 - n\right)\ldots\left(\frac{Q}{n} + P\right)\left(\frac{Q}{n} + P + pn + q + 1\right).$$

D'après ces remarques, il est bien évident que le rapport de deux coefficients consécutifs est une fonction rationnelle de $p_1, \ldots, p_n$.

Le domaine de convergence des séries hypergéométriques de n variables (12) pourrait se déterminer rigoureusement par la méthode générale de J. Horn; mais, les calculs étant compliqués, M. Birkeland a obtenu directement une condition suffisante pour la convergence du développement (11)

$$|a_1| + \ldots + |a_n| < e^{-2}.$$

La méthode suivie par M. Hj. Mellin pour obtenir une formule équivalente à (11) est basée sur la représentation des fonctions hypergéométriques générales par des intégrales n-uples portant sur des quotients de fonctions gamma, dont les expressions données page 11 pour la fonction de Gauss, page 40, pour les fonctions F_1, F_2, F_3, F_4 sont des cas très particuliers.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

NOTE V.

SUR CERTAINS POLYNOMES ORTHOGONAUX ET SUR LES QUADRATURES MÉCANIQUES DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

On connaît le rôle joué par les polynomes orthogonaux (en particulier par les polynomes de Legendre) dans la méthode de quadrature mécanique des fonctions d'une variable due à Gauss; nous allons donner quelques rapides indications sur les possibilités d'extension aux fonctions de plusieurs variables, en particulier de deux variables.

Tout d'abord F. Didon [1] a établi que :

Étant donnée une fonction $K(x, y)$, *définie dans un domaine* D *du plan des* xy, *intégrable et gardant un signe constant dans* D, *il existe* $(p+1)$ *polynomes de degré* p, *linéairement indépendants, vérifiant les conditions*

$$\iint_D K(x, y) x^j y^k P(x, y)\, dx\, dy = 0 \tag{1}$$

(j, k entiers positifs ou nuls, tels que $j + k < p$).

Il suffit de remarquer pour cela que les conditions (1) forment un système de $\frac{p(p+1)}{2}$ équations linéaires entre les $\frac{(p+1)(p+2)}{2}$ coefficients du polynome $P(x, y)$; les $(p+1)$ coefficients des termes de degré p restent arbitraires dans ce polynome; les autres coefficients se déterminent en fonction de ceux-là par les équations linéaires, dont le déterminant n'est pas nul, à cause de la condition de signe imposée à $K(x, y)$.

Soit $\mathcal{V}_{m,n}(x, y)$ le polynome de degré $p = m + n$, vérifiant les conditions (1), dont tous les coefficients des termes de degré p sont nuls, sauf celui du terme $x^m y^n$ égal à l'unité; tout polynome, vérifiant les conditions (1) peut alors se mettre sous la forme :

$$P(x, y) = \alpha_{p,0}\mathcal{V}_{p,0} + \alpha_{p-1,1}\mathcal{V}_{p-1,1} + \ldots + \alpha_{0,p}\mathcal{V}_{0,p}.$$

Les polynomes $\mathcal{V}_{m,n}(x, y)$ *forment une famille de polynomes orthogonaux*, car il est clair que l'on a, en vertu de (1),

$$\iint_D K(x, y) Q(x, y) \mathcal{V}_{m,n}(x, y)\, dx\, dy = 0,$$

$Q(x, y)$ désignant un polynome arbitraire de degré inférieur à $m + n$; donc, en particulier,

$$\iint_D K(x, y) \mathcal{V}_{m,n}(x, y) \mathcal{V}_{p,q}(x, y)\, dx\, dy = 0 \qquad (m + n \neq p + q). \tag{2}$$

En choisissant convenablement le domaine D et la fonction $K(x, y)$ on retrouve, comme cas particuliers, les diverses familles de polynomes orthogonaux étudiées dans cet Ouvrage :

---

[1] F. Didon, *Développements sur certaines séries de polynomes à un nombre quelconque de variables* (*Ann. scient. Éc. Normale*, t. 7, 1870, p. 247).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

1° $K(x, y) = e^{-\frac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2)}$, D étant le plan tout entier :

$$\mathcal{V}_{m,n}(x, y) = G_{m,n}(x, y) \qquad (\text{p. } 367);$$

2° $K(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^{\frac{s-1}{2}}$, D étant l'intérieur du cercle $1 - x^2 - y^2 \geqq 0$:

$$\mathcal{V}_{m,n}(x, y) = \frac{(1, m)(1, n)}{2^{m+n}\left(\frac{s+1}{2}, m+n\right)} V^{(s)}_{m,n}(x, y) \qquad (\text{p. } 249);$$

3° $K(x, y) = x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}$, D étant l'intérieur du triangle $0 \leqq x$, $0 \leqq y$, $1 - x - y \geqq 0$,

$$\mathcal{V}_{m,n}(x, y) = \frac{(-1)^{m+n}(\gamma, m)(\gamma', n)}{(\gamma + \gamma' + m + n, m + n)} E_{m,n}(\gamma, \gamma', x, y) \qquad (\text{p. } 104);$$

En outre, F. Didon a montré qu'au système de polynomes $\mathcal{V}_{m,n}$ on pouvait adjoindre un système de polynomes $\mathcal{U}_{m,n}$, tel que

$$\int\int_D K(x, y)\mathcal{V}_{m,n}(x,y)\mathcal{U}_{p,q}(x, y)\,dx\,dy = 0,$$

sauf pour $m = p$, $n = q$. On peut aussi substituer aux polynomes $\mathcal{V}_{m,n}$ des polynomes $\mathfrak{W}_{m,n}$

$$\mathfrak{W}_{m,n} = \sum_{p+q=m+n} \alpha_{p,q}\mathcal{V}_{p,q},$$

tels que

$$\int\int_D K(x, y)\,\mathfrak{W}_{m,n}(x, y)\mathfrak{W}_{p,q}(x, y)\,dx\,dy = 0 \qquad (m \neq p,\ n \neq q),$$

$$\int\int_D K(x, y)[\mathfrak{W}_{m,n}(x, y)]^2\,dx\,dy = 1.$$

Le système de polynomes $\mathfrak{W}_{m,n}$ est identique à son adjoint.

Par exemple pour $K(x, y) = 1$, D étant le domaine intérieur au cercle $1 - x^2 - y^2 \geqq 0$, les polynomes $\mathcal{V}_{m,n}$ se confondent, à un facteur près, avec les polynomes d'Hermite $V_{m,n}$ et leurs adjoints $\mathcal{U}_{m,n}$ avec les polynomes d'Hermite $U_{m,n}$ (p. 316); Didon a donné l'expression suivante

$$\mathfrak{W}_{m,n} = k_{m,n}\frac{1}{(1-y^2)^{m+\frac{1}{2}}}\frac{d^n}{dy^n}\left[(1-y^2)^{m+n+\frac{1}{2}}\right]\frac{d^m}{dx^m}[(1-x^2-y^2)^m],$$

pour les polynomes identiques à leurs adjoints.

Ceci posé, résumons le Mémoire où P. Appell (1) a étendu aux intégrales doubles la méthode de quadrature mécanique de Gauss; ses résultats ont reçu des compléments intéressants de H. Bourget (2); l'extension au cas de n variables a été faite par A. Angelescu (3).

Soit $f(x, y)$ une fonction définie dans un domaine D, où elle est supposés intégrable; on se propose de calculer l'intégrale

$$\int\int_D f(x, y)\,dx\,dy,$$

(1) P. Appell, *Sur une classe de polynomes à deux variables et le calcul approché des intégrales doubles* (*Ann. Fac. des Sciences Toulouse*, t. 4, 1890, H).

(2) H. Bourget, *Sur une extension de la méthode de quadrature de Gauss* (*Comptes rendus*, t. 126, 1898, p. 634).

(3) A. Angelescu, *Thèse*.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

ou plus généralement l'intégrale

$$(3) \qquad I = \int\int_D K(x, y) f(x, y)\, dx\, dy,$$

$K(x, y)$ étant une fonction choisie une fois pour toutes, intégrable et gardant un signe constant dans D.

Le principe de la méthode consiste à prendre, comme valeur approchée de I, *l'intégrale*

$$(4) \qquad J = \int\int_D K(x, y) P_p(x, y)\, dx\, dy,$$

$P_p(x, y)$ *étant le polynome de degré* p, *qui prend les mêmes valeurs que* $f(x, y)$ *en* $n = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$ *points* $(x_1, y_1) \ldots (x_n, y_n)$, *intérieurs au domaine* D *et non situés sur une même courbe d'ordre* p.

Le polynome $P_p(x, y)$ peut évidemment se mettre sous la forme

$$P_p(x, y) = Q_1(x, y) f(x_1, y_1) + \ldots + Q_n(x, y) f(x_n, y_n),$$

les polynomes $Q_1, \ldots, Q_n$ étant indépendants de la fonction $f(x, y)$ considérée; on peut écrire par conséquent

$$J = p_1 f(x_1, y_1) + \ldots + p_n f(x_n, y_n);$$

les n coefficients

$$p_k = \int\int_D K(x, y) Q_k(x, y)\, dx\, dy$$

ne dépendent pas de la fonction $f(x, y)$, mais uniquement de la répartition des points $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ dans le domaine D.

Supposons la fonction $f(x, y)$ représentable par une série uniformément convergente dans D

$$f(x, y) = \sum_{r=s=0}^{r=s=\infty} a_{r,s} x^r y^s;$$

et posons

$$K_{r,s} = \int\int_D K(x, y) x^r y^s\, dx\, dy;$$

l'écart entre I et sa valeur approchée J est alors représenté par le développement

$$I - J = \sum_{r=s=0}^{r=s=\infty} a_{r,s} [K_{r,s} - (p_1 x_1^r y_1^s + \ldots + p_n x_n^r y_n^s)],$$

les quantités entre crochets étant toutes évidemment indépendantes de $f(x, y)$.

Les n *premières de ces quantités sont nulles;* en effet, si $f(x, y)$ est un polynome de degré p

$$a_{r,s} = 0 \qquad \text{pour} \qquad r + s > p;$$

d'autre part, on a alors

$$f(x, y) \equiv P_p(x, y),$$

donc

$$I - J = 0,$$

quels que soient les n coefficients $a_{r,s}$ pour lesquels $r + s \leqq p$; cette condition entraîne bien les n équations

$$p_1 x_1^r y_1^s + \ldots + p_n x_n^r y_n^s = K_{r,s} \qquad (r + s \leqq p).$$

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

On a donc toujours, quelle que soit la distribution des points $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$,

$$I - J = \sum_{r+s=p}^{r=s=\infty} a_{r,s}[K_{r,s} - (p_1 x_1^r y_1^s + \ldots + p_n x_n^r y_n^s)].$$

Il est naturel de chercher à augmenter l'approximation, en disposant des $2n$ indéterminées $(x_1, y_1)\ldots(x_n, y_n)$ de manière à annuler, quelle que soit la fonction $f(x, y)$, les $2n$ premiers termes de ce développement, ce qui conduit à poser les $2n$ équations

$$p_1 x_1^r y_1^s + \ldots + p_n x_n^r y_n^s = K_{r,s} \qquad (r = p+1,\ s = 0;\quad r = p,\ s = 1,\ \ldots).$$

Pour que ce calcul ait un sens, il faut que ces $2n$ équations donnent pour $(x_1, y_1)\ldots(x_n, y_n)$ des points réels, distincts, non situés sur une même courbe d'ordre p.

Ce problème d'Algèbre une fois élucidé, se pose la question beaucoup plus délicate de reconnaitre si, en opérant ainsi, on a effectivement rendu minima la valeur absolue de l'écart $I - J$; bien qu'il soit très probable que ce soit le cas général, aucune recherche d'ensemble ne permet encore, à notre connaissance, de répondre à cette question (dans le cas d'une variable, au contraire, les recherches ont déjà abouti à des résultats intéressants).

Pour donner un exemple des circonstances qui peuvent se présenter, considérons le cas de $p = 4$. On dispose de 15 points à l'intérieur de D; la méthode précédente conduit à annuler les 45 premiers termes du développement de l'écart $I - J$, en établissant entre les 45 quantités

$$p_1, \ldots, p_{15}, (x_1, y_1), \ldots, (x_{15}, y_{15})$$

les 45 équations

$$p_1 x_1^r y_1^s + \ldots + p_{15} x_{15}^r y_{15}^s = K_{r,s} \qquad (r + s \leqq 8). \tag{5}$$

Les 15 points (x_i, y_i) ne devant pas être sur une même courbe du 4e degré, cherchons la forme générale de l'équation

$$\varphi(x, y) = 0,$$

d'une courbe du 5e degré passant par ces points; il résulte immédiatement des équations (5) que le polynome $\varphi(x, y)$ doit vérifier les 10 conditions

$$\iint_D K(x, y) x^j y^k \varphi(x, y)\, dx\, dy = 0 \qquad (0 \leqq j + k \leqq 3);$$

comme le polynome $\varphi(x, y)$ contient 21 coefficients, il en reste encore 11 arbitraires une fois satisfaites ces conditions; on peut donc le mettre sous la forme

$$\varphi(x, y) = \sum_{m+n=4}^{m+n=5} \lambda_{m,n} \mathcal{V}_{m,n}(x, y),$$

les polynomes $\mathcal{V}_{m,n}(x, y)$ étant ceux qui ont été définis au début de la Note.

Les 11 coefficients $\lambda_{m,n}$ doivent d'ailleurs être assujettis à des conditions, puisque l'équation d'une courbe du 5e degré passant par 15 points ne contient plus que 6 coefficients d'une manière linéaire et homogène.

Ce simple exemple suffit pour montrer comment cette méthode de quadrature mécanique des intégrales doubles conduit à envisager les polynomes orthogonaux $\mathcal{V}_{m,n}(x, y)$: les points qui donnent la meilleure approximation doivent être choisis sur la courbe $\varphi(x, y) = 0$. Dans le cas des intégrales simples on sait que ces points sont les racines du polynome orthogonal correspondant (par exemple, du polynome de Legendre, si $K(x) = 1$). Pour un exposé détaillé des diverses circonstances possibles, nous ne pouvons que renvoyer aux Mémoires indiqués.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

NOTE VI.

SUR DIVERSES GÉNÉRALISATIONS DES FONCTIONS HYPERSPHÉRIQUES : FONCTIONS HYPERCYLINDRIQUES, HYPERCONIQUES, HYPERTOROÏDALES.

Le procédé habituel (rappelé p. 202 et 211) pour former les *fonctions sphériques* dans l'espace à trois dimensions, consiste à écrire l'équation de Laplace en coordonnées polaires (r, θ, φ) ou en coordonnées zonales (r, x, φ) et à chercher des solutions de cette équation de la forme

$$\begin{aligned} F &= r^{\mu} \sin^k \theta \, Z_{\mu}^{(k)}(\cos\theta) \, e^{\pm k i \varphi} \\ &= r^{\mu}(1 - x^2)^{\frac{k}{2}} Z_{\mu}^{(k)}(x) \, e^{\pm k i \varphi}, \end{aligned}$$

μ et k étant des entiers positifs ou nuls $(k \leqq \mu)$; il est possible de trouver de telles solutions à condition de prendre pour $Z_{\mu}^{(k)}(x)$ un polynome en x de degré $\mu - k$, convenablement choisi. Les fonctions sphériques s'introduisent ainsi en cherchant des solutions de l'équation de Laplace, en coordonnées zonales, de la forme

$$F = f_1(r) f_2(x) f_3(\varphi).$$

Une extension toute naturelle de ce procédé s'offre immédiatement : on écrira l'équation de Laplace dans un système de coordonnées curvilignes (u, v, w) et l'on cherchera si elle admet des solutions de la forme

$$F = f_1(u) f_2(v) f_3(w);$$

dans l'affirmative, on désigne les fonctions f_1, f_2, f_3 sous le nom de *facteurs de Laplace*.

Nous avons donné (p. 340) un exemple de cette méthode, qui conduit à la définition des *fonctions du cylindre parabolique :* les exemples les plus connus conduisent aux *fonctions cylindriques* (ou du cylindre circulaire) de Bessel, aux *fonctions du cylindre elliptique* de Mathieu, aux *fonctions toroïdales* de Heine, aux *fonctions coniques* de Mehler [1].

De même dans l'espace à $n+2$ dimensions les *fonctions hypersphériques* s'introduisent en cherchant des solutions de l'équation de Laplace en coordonnées zonales $(r, x_1, \ldots, x_n, \varphi)$ de la forme (p. 213)

$$\begin{aligned} F &= r^{\mu} X_n^{\frac{k}{2}} Z_{\mu}^{(k)}(x_1, \ldots, x_n) \, e^{\pm k i \varphi} \\ &= f_1(r) f_2(x_1, \ldots, x_n) f_3(\varphi). \end{aligned}$$

On est donc amené à essayer si l'extension, qui a réussi dans l'espace ordinaire, conduit encore à des résultats pour l'espace à un nombre quelconque de dimensions, c'est-à-dire si l'équation de Laplace en coordonnées curvilignes (6'-LII) admet des solutions formées de *produits de facteurs de Laplace*.

Dans une série d'intéressantes recherches, M. Pierre Humbert a effectivement formé, pour plusieurs systèmes de coordonnées curvilignes, des solutions de l'équation de Laplace, décomposées en produits de facteurs, qui constituent des généralisations des fonctions hypersphériques; nous allons résumer ses principaux résultats.

---

[1] Voir *Encyclopédie des Sciences mathématiques* (éd. française), t. II, vol. 5, fasc. 2, p. 190, 191, 192, 198-209.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

I. — Fonctions hypercylindriques ou du cylindre hypersphérique.

Si dans l'espace ordinaire on emploie les coordonnées cylindriques

$$z_1 = r\cos\varphi, \qquad z_2 = r\sin\varphi, \qquad z_3 = t,$$

l'équation de Laplace, qui s'écrit dans ce système

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0,$$

admet des solutions de la forme

$$F = e^{\lambda t} J_k(\lambda r)\, e^{\pm k i \varphi},$$

J_k désignant une fonction de Bessel (1).

Considérons de même, dans l'espace à quatre dimensions, le système de coordonnees

$$z_1 = rx, \qquad z_2 = r\sqrt{1-x^2}\cos\varphi, \qquad z_3 = r\sqrt{1-x^2}\sin\varphi, \qquad z_4 = t;$$

les surfaces $r =$ const. sont des hypercylindres, parallèles à l'axe des z_4, ayant pour base dans l'hyperplan $z_4 = 0$ la sphère

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = r^2;$$

ce système généralise donc les coordonnées cylindriques. L'équation de Laplace se forme aisément :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1-x^2}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{2x}{r^2}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{r^2}\frac{1}{1-x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0.$$

M. P. Humbert (2) cherche des solutions de la forme

$$F = e^{\lambda t}\Phi(r, x)\, e^{\pm k i \varphi};$$

la fonction Φ doit évidemment vérifier l'équation

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1-x^2}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{2x}{r^2}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \left[\lambda^2 - \frac{k^2}{1-x^2}\right]\Phi = ,$$

ce qui lui permet de l'exprimer, au moyen de la fonction hypergéométrique confluente (p. 126),

$$\Xi_2(\alpha;\ \beta;\ \gamma,\ x,\ y).$$

Il a étendu cette analyse à l'espace à un nombre quelconque de dimensions (3).

Nous allons montrer (4) que, dans le système de coordonnées hypercylindriques le plus général, on peut toujours former des solutions de l'équation de Laplace sans introduire d'autres éléments que les fonctions de Bessel et les fonctions hypersphériques.

Considérons, dans l'espace à $n+3$ dimensions, le système de coordonnées curvilignes

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} z_1 = rx_1, \qquad z_2 = rx_2, \qquad \ldots, \qquad z_n = rx_n, \\ z_{n+1} = r\sqrt{X_n}\cos\varphi, \qquad z_{n+2} = r\sqrt{X_n}\sin\varphi, \qquad z_{n+3} = t \\ \qquad (X_n = 1 - x_1^2 - \ldots - x_n^2 \geqq 0,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi); \end{array}\right.$$

(1) *Encyclopédie des Sciences mathématiques, loc. cit.*, p. 209.

(2) P. Humbert, *Sur les fonctions hypercylindriques* (*Comptes rendus*, t. 171, 1920, p. 490).

(3) P. Humbert, *Les fonctions hypercylindriques dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions* (*Ibid.*, p. 537).

(4) J. Kampé de Fériet, *Sur les fonctions hypercylindriques* (*Comptes rendus*, t. 172, 1921, p. 1464).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

les surfaces $r =$ const. sont des hypercylindres parallèles à l'axe des z_{n+3}, ayant pour base, dans l'hyperplan $z_{n+3} = 0$, l'hypersphère

$$z_1^2 + \ldots + z_{n+2}^2 = r^2;$$

on peut considérer $(r, x_1, \ldots, x_n, \varphi)$ comme les coordonnées zonales (p. 211) d'un point de l'hyperplan $z_{n+3} = 0$; donc en désignant par ds_1^2 l'élément d'arc en coordonnées zonales (25-LXII), on obtient l'élément d'arc dans le système actuel sous la forme

$$ds^2 = ds_1^2 + dt^2.$$

Dans le système de *coordonnées hypercylindriques* (1), l'équation de Laplace s'écrit encore, d'après (28-LXII),

$$(2) \qquad \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n+1} \frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{X_n} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial F}{\partial x_j} - x_j\left(x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial F}{\partial x_n}\right)\right] + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0.$$

Cherchons si cette équation admet des solutions de la forme

$$F = e^{\lambda t} f(r) P(x_1, \ldots, x_n) e^{\pm k i \varphi};$$

λ étant une constante arbitraire, k un entier positif ou nul; soit μ un entier supérieur ou égal à k; l'équation (2) est évidemment satisfaite si $P(x_1, \ldots, x_n)$ et $f(r)$ vérifient respectivement les équations

$$(3) \qquad \left[\mu(\mu + n) - \frac{k^2}{X_n}\right] P + \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial P}{\partial x_j} - x_j\left(x_1 \frac{\partial P}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial P}{\partial x_n}\right)\right] = 0,$$

$$(4) \qquad \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{n+1}{r} \frac{df}{dr} + \left[\lambda^2 - \frac{\mu(\mu + n)}{r^2}\right] f = 0.$$

Or, l'équation (3) est identique à l'équation (49-LXV), caractéristique des fonctions hypersphériques de degré μ et d'ordre k; on peut donc prendre pour P une des fonctions hypersphériques formées aux paragraphes XCIV et suivants, par exemple celles qui se déduisent des polynomes d'Hermite par la formule (17-XCVI)

$$P^{(\mu,k)}(x_1, \ldots, x_n) = X_n^{\frac{k}{2}} \frac{\partial^k V_{m_1, \ldots, m_n}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$$

$$(m_1 + \ldots + m_n = \mu;\ k_1 + \ldots + k_n = k;\ 0 \leqq k \leqq \mu).$$

On voit facilement d'autre part que l'équation (4) est vérifiée par la fonction de Bessel

$$f(r) = r^{-\frac{n}{2}} J_{\mu + \frac{n}{2}}(\lambda r).$$

Nous obtenons donc cette solution de l'équation de Laplace en coordonnées hypercylindriques :

$$(5) \qquad F^{(\mu,k)} = e^{\lambda t} r^{-\frac{n}{2}} J_{\mu + \frac{n}{2}}(\lambda r) P^{(\mu,k)}(x_1, \ldots, x_n) e^{\pm k i \varphi};$$

les entiers μ et k étant donnés, il y a $2\dfrac{(n, \mu - k)}{(1, \mu - k)}$ solutions de ce type linéairement indépendantes; pour $k = 0$, ce nombre tombe à $\dfrac{(n, \mu)}{(1, \mu)}$ et, la fonction hypersphérique devenant zonale, on a simplement

$$F^{(\mu,0)} = e^{\lambda t} r^{-\frac{n}{2}} J_{\mu + \frac{n}{2}}(\lambda r) V_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n) e^{\pm k i \varphi}.$$

Soit (c) l'hypercylindre, parallèle à l'axe des z_{n+3}, correspondant à $r = 1$; les fonctions $F^{(\mu,k)}$ sont har-

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

moniques dans le domaine intérieur à (c); elles s'introduisent naturellement en cherchant à développer, dans ce domaine en série de fonctions harmoniques, une fonction harmonique arbitraire, définie par ses valeurs sur (c).

Si dans (5) on fait $n = 0$, on retrouve la formule classique pour l'espace ordinaire, rappelée au début; chaque fois que le nombre $(n+3)$ des dimensions de l'espace considéré est impair, les fonctions de Bessel contenues dans les solutions $F^{(\mu,k)}$ ont leur indice entier; au contraire, chaque fois que le nombre des dimensions est pair, leur indice est un multiple impair de $\frac{1}{2}$; on sait que, dans ce cas, les fonctions de Bessel s'expriment par des fonctions élémentaires.

II. — Fonctions de l'hypercylindre parabolique.

Considérons [1], dans l'espace à quatre dimensions, le système de coordonnées curvilignes

$$(6)\qquad z_1 = uv\cos\varphi,\qquad z_2 = uv\sin\varphi,\qquad z_3 = \frac{u^2 - v^2}{2},\qquad z_4 = t;$$

les surfaces $\varphi = \text{const.}$ et $t = \text{const.}$ sont des hyperplans; les surfaces $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ sont des hypercylindres parallèles à l'axe des z_4, ayant pour base dans l'hyperplan $z_4 = 0$, des paraboloïdes de révolution; M. P. Humbert propose de les appeler des hypercylindres paraboliques [2].

On a dans ce système

$$ds^2 = (u^2 + v^2)(du^2 + dv^2) + u^2 v^2 d\varphi^2 + dt^2,$$

ce qui conduit à l'équation de Laplace :

$$(7)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \frac{1}{u}\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{v}\frac{\partial F}{\partial v} + \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + (u^2 + v^2)\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0.$$

Cherchons des solutions de la forme

$$F = e^{\lambda t}\,\Phi(u, v)\,e^{\pm k i \varphi}.$$

La fonction Φ doit vérifier l'équation

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + \frac{1}{u}\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{1}{v}\frac{\partial \Phi}{\partial v} + \left[\lambda^2(u^2 + v^2) - k^2\left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2}\right)\right]\Phi = 0,$$

qui est évidemment satisfaite si elle vérifie le système :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \left(\lambda i u + \frac{1}{u}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \lambda i v\frac{\partial \Phi}{\partial v} + \left[\lambda^2 v^2 - \frac{k^2}{u^2}\right]\Phi = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + \left(\lambda i v + \frac{1}{v}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial v} - \lambda i u\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \left[\lambda^2 u^2 - \frac{k^2}{v^2}\right]\Phi = 0.$$

Or, en partant des équations (31-XLV) vérifiées par la fonction $W_{k,\mu,\nu}(x, y)$, on voit facilement que ce système est satisfait si l'on prend

$$(8)\qquad \Phi(u, v) = \frac{1}{uv}\,e^{-\frac{\lambda i}{4}(u^2+v^2)}\,W_{0,\frac{k}{2},\frac{k}{2}}\left(\lambda i\frac{u^2}{2}, \lambda i\frac{v^2}{2}\right),$$

telle est, d'après M. P. Humbert, la fonction de l'hypercylindre parabolique dans l'espace à quatre dimensions.

---

[1] Pierre Humbert, *Sur les fonctions de l'hypercylindre parabolique* (*Comptes rendus*, t. 170, 1920, p. 564); *Sur une nouvelle application de la fonction* $W_{k,\mu,\nu}$ (*Ibid.*, p. 832).

[2] Comparer avec le système défini pour l'espace ordinaire, p. 340.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

III. — Fonctions de l'hypercylindre elliptique ou hyperbolique.

Considérons, en restant encore dans l'espace à quatre dimensions, le système

$$z_1 = a \sin u \sin v \cos \varphi, \qquad z_2 = a \sin u \sin v \sin \varphi, \qquad z_3 = ai \cos u \cos v, \qquad z_4 = t;$$

les surfaces $u =$ const. et $v =$ const. sont des hypercylindres, parallèles à l'axe des z_4, ayant pour base dans l'hyperplan $z_4 = 0$ les hyperboloïdes de révolution

$$\frac{z_1^2 + z_2^2}{a^2 \sin^2 u} - \frac{z_3^2}{a^2 \cos^2 u} = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{z_1^2 + z_2^2}{a^2 \sin^2 v} - \frac{z_3^2}{a^2 \cos^2 v} = 1.$$

Dans ce système, on a

$$ds^2 = a^2(\cos^2 u - \cos^2 v)(du^2 - dv^2) + a^2 \sin^2 u \sin^2 v \, d\varphi^2 + dt^2,$$

ce qui conduit à l'équation de Laplace :

$$\frac{1}{\sin u} \frac{\partial}{\partial u}\left[\sin u \frac{\partial F}{\partial u}\right] - \frac{1}{\sin v} \frac{\partial}{\partial v}\left[\sin v \frac{\partial F}{\partial v}\right] + \left(\frac{1}{\sin^2 u} - \frac{1}{\sin^2 v}\right) \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + a^2(\cos^2 u - \cos^2 v) \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0.$$

En cherchant des solutions de la forme

$$F = e^{\lambda t} \sin^\mu u \sin^\mu v \, M(u, v) \, e^{\pm ki\varphi},$$

on voit que la fonction $M(u, v)$ doit vérifier l'équation

$$\frac{\partial^2 M}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 M}{\partial v^2} + (2\mu + 1) \cot u \frac{\partial M}{\partial u} - (2\mu + 1) \cot v \frac{\partial M}{\partial v} + h^2 a^2 (\cos^2 u - \cos^2 v) M = 0,$$

qui est évidemment satisfaite, si elle vérifie le système

$$(10) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 M}{\partial u^2} - \cot u \cot v \dfrac{\partial^2 M}{\partial u \, \partial v} + A \cot u \dfrac{\partial M}{\partial u} + B \cot v \dfrac{\partial M}{\partial v} + (C + k^2 \cos^2 u) M = 0, \\ \dfrac{\partial^2 M}{\partial v^2} - \cot u \cot v \dfrac{\partial^2 M}{\partial x \, \partial v} + A' \cot v \dfrac{\partial M}{\partial v} + B' \cot u \dfrac{\partial M}{\partial u} + (C' + k^2 \cos^2 v) M = 0, \end{cases}$$

les constantes ayant des valeurs convenables. M. P. Humbert (1) considère les fonctions $M(u, v)$ comme les généralisations des fonctions du cylindre elliptique de Mathieu; la propriété fondamentale de ces dernières fonctions se trouve généralisée de la manière suivante :

A toute solution $M(u, v)$ périodique et paire du système (10), on peut associer une solution périodique $N(s, t)$ du système

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 N}{\partial s^2} - \cot s \cot t \dfrac{\partial^2 N}{\partial s \, \partial t} + (3 - A) \cot s \dfrac{\partial N}{\partial s} + (1 - B) \cot t \dfrac{\partial N}{\partial t} + (C + A + B - 2 + k^2 \cos^2 s) N = 0, \\ \dfrac{\partial^2 N}{\partial t^2} - \cot s \cot t \dfrac{\partial^2 N}{\partial s \, \partial t} + (3 - A') \cot t \dfrac{\partial N}{\partial t} + (1 - B') \cot s \dfrac{\partial N}{\partial s} + (C' + A' + B' - 2 + k^2 \cos^2 t) N = 0, \end{cases}$$

(1) Pierre Humbert, *Sur le produit de Laplace relatif à certains hypercylindres* (*Comptes rendus*, t. 174, 1922, p. 91); *On Mathieu functions of higher order* (*Proceedings of Edinburgh Mathematical Society*, vol. XL, sess. 1921-1922).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

telle que

$$M(u, v) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(\cos u \cos s + \cos v \cos t)} \sin s \sin t \, N(s, t)\, ds\, dt.$$

On peut enfin remarquer que, pour

$$A = -n, \qquad B = m+1, \qquad A' = -m, \qquad B' = n+1,$$
$$C = (m+1)(m+n+1), \qquad C' = (n+1)(m+n+1), \qquad k = 0,$$

le système (10) est vérifié par le polynome d'Hermite $U^{(2)}_{m,n}(\cos u, \cos v)$ et le système (11) par $V^{2}_{m,n}(\cos s, \cos t)$.

IV. — Fonctions de l'hyperparaboloïde de révolution.

Considérons [1], dans l'espace à quatre dimensions, le système de coordonnées curvilignes

$$z_1 = uvx, \qquad z_2 = uv\sqrt{1-x^2}\cos\varphi, \qquad z_3 = uv\sqrt{1-x^2}\sin\varphi, \qquad z_4 = \frac{u^2-v^2}{2};$$

les surfaces $u =$ const. et $v =$ const. ont pour équations

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = u^2(2z_4 + u^2), \qquad z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = v^2(2z_4 + v^2);$$

on peut les appeler des hyperparaboloïdes de révolution autour de l'axe des z_4.

Dans ce système,

$$ds^2 = (u^2+v^2)(du^2+dv^2) + \frac{u^2v^2}{1-x^2}dx^2 + u^2v^2(1-x^2)\,d\varphi^2,$$

d'où l'équation de Laplace :

$$\frac{v^2}{u^2+v^2}\frac{\partial}{\partial u}\left(u^2\frac{\partial F}{\partial u}\right) + \frac{u^2}{u^2+v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(v^2\frac{\partial F}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\partial F}{\partial x}\right] + \frac{1}{1-x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = 0.$$

En cherchant des solutions de la forme

$$F = P(x)\,\Psi(u, v)\,e^{\pm ki\varphi},$$

on voit que l'équation de Laplace est satisfaite si

$$\left[\mu(\mu+1) - \frac{k^2}{1-x^2}\right]P + \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right] = 0,$$
$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial v^2} + \frac{2}{u}\frac{\partial\Psi}{\partial u} + \frac{2}{v}\frac{\partial\Psi}{\partial v} - \mu(\mu+1)\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}\right)\Psi = 0;$$

la première équation est satisfaite si l'on prend pour $P(x)$ une fonction sphérique $P^{(\mu,k)}(x)$ de degré μ et d'ordre k (p. 304); il est aisé de montrer que la deuxième est satisfaite si l'on prend

$$\Psi(u, v) = u^{-\frac{3}{2}} v^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{v^2-u^2}{4}} W_{h, \frac{\mu}{2}+\frac{1}{4}, \frac{\mu}{2}+\frac{1}{4}}\left(\frac{u^2}{2}, -\frac{v^2}{2}\right),$$

quelle que soit d'ailleurs la valeur de la constante h.

---

[1] Pierre Humbert, *Fonctions de l'hyperparaboloïde de révolution et fonctions hypersphériques* (*Comptes rendus*, t. 170, 1920, p. 1782).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

V. — Fonctions hypertoroïdales.

Considérons [1] le système de coordonnées curvilignes dans l'espace à quatre dimensions :

$$z_1 = \frac{\sqrt{1-u^2}}{v-u}\cos\varphi, \qquad z_2 = \frac{\sqrt{1-u^2}}{v-u}\sin\varphi, \qquad z_3 = \frac{\sqrt{v^2-1}}{v-u}\cos\psi, \qquad z_4 = \frac{\sqrt{v^2-1}}{v-u}\sin\psi;$$

les surfaces $v = \text{const.}$ ont pour équation

$$(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + 1)^2 = \frac{4v^2}{v^2-1}(z_3^2 + z_4^2);$$

M. P. Humbert appelle cette surface du quatrième degré un *hypertore;* en effet, son intersection par l'hyperplan

$$z_3 = \rho\cos\alpha, \qquad z_4 = \rho\sin\alpha \qquad (\alpha = \text{const.})$$

se décompose en deux sphères :

$$z_1^2 + z_2^2 + \left[\rho \pm \frac{v}{\sqrt{v^2-1}}\right]^2 = \frac{1}{v^2-1},$$

symétriques par rapport à l'origine, de rayon $\frac{1}{\sqrt{v^2-1}}$.

On a pour l'élément d'arc

$$ds^2 = \frac{1}{(v-u)^2}\left[\frac{du^2}{1-u^2} + \frac{dv^2}{v^2-1} + (1-u^2)\,d\varphi^2 + (1-v^2)\,d\psi^2\right],$$

d'où l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1-u^2}{(v-u)^2}\frac{\partial F}{\partial u}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{v^2-1}{(v-u)^2}\frac{\partial F}{\partial v}\right] + \frac{1}{(1-u^2)(v-u)^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{(v^2-1)(v-u)^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\psi^2} = 0.$$

Si l'on cherche des solutions de la forme

$$F = (v-u)(1-u^2)^{\frac{p}{2}}(v^2-1)^{\frac{q}{2}}\,\Theta(u, v)\,e^{\pm pi\varphi}\,e^{\pm qi\psi},$$

on voit que $\Theta(u, v)$ doit vérifier l'équation

$$(12)\quad (1-u^2)\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2} - (1-v^2)\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2} - (2p+2)u\frac{\partial\Theta}{\partial u} + (2q+2)v\frac{\partial\Theta}{\partial v} + [q(q+1) - p(p+1)]\Theta = 0.$$

Or on peut remarquer que, si l'on retranche l'une de l'autre les deux équations (17-CI) du polynome d'Hermite $V_{m,n}(u, v)$, on obtient une équation

$$(1-u^2)\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} - (1-v^2)\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} - (2n+3)u\frac{\partial V}{\partial u} + (2m+3)v\frac{\partial V}{\partial v} + (m-n)(m+n+2)V = 0,$$

---

[1] Pierre Humbert, *L'équation de Laplace en coordonnées hypertoroïdales* (*Comptes rendus*, t. 171, 1920, p. 1116); *Sur les fonctions hypertoroïdales et leur lien avec les fonctions hypersphériques* (*Ibid.*, p. 1366); *Les polynomes d'Hermite-Didon et les fonctions de Laplace dans l'hyperespace* (*Ibid.*, t. 172, 1921, p. 901).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

à laquelle l'équation (12) se ramène immédiatement en faisant

$$m = q - \frac{1}{2}, \qquad n = p - \frac{1}{2}.$$

Les polynomes $V_{m,n}$ ne sont définis que pour m et n entiers positifs ou nuls; mais on peut continuer à désigner par le même symbole $V_{m,n}$, quelles que soient les valeurs de m et n, la solution du système d'équations (17-CI), représentée par la fonction hypergéométrique (11-CI); le développement de cette fonction ne se limite plus, bien entendu, à un polynome.

M. P. Humbert appelle fonction hypertoroïdale la fonction $V_{m,n}$, *où les indices m et n sont des multiples impairs de* $\frac{1}{2}$; ces fonctions généralisent ainsi les fonctions toroïdales [1] V_n, où n est un multiple impair de $\frac{1}{2}$.

VI. — Fonctions hyperconiques.

Soit, dans l'espace à quatre dimensions, le système des coordonnées zonales (p. 211)

$$z_1 = rx, \qquad z_2 = ry, \qquad z_3 = r\sqrt{1-x^2-y^2}\cos\varphi, \qquad z_4 = r\sqrt{1-x^2-y^2}\sin\varphi;$$

les surfaces $x =$ const. et $y =$ const. sont des hypercônes

$$z_1^2 = x^2(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2), \qquad z_1^2 = y^2(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2).$$

L'équation de Laplace est donnée dans ce système par (28-LXII); M. P. Humbert [2] cherche des solutions de cette équation de la forme

$$F = \frac{1}{r} e^{\pm iq \log r} V(x, y) e^{\pm ki\varphi};$$

dans le cas particulier $k = 0$ (les autres s'y ramènent facilement), on obtient pour la fonction V l'équation

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} + (1-y^2)\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - 3x\frac{\partial V}{\partial x} - 3y\frac{\partial V}{\partial y} - (4q^2+1)V = 0.$$

Si l'on rapproche cette équation de l'équation (19-CI) obtenue en faisant la somme des deux équations (17-CI) vérifiées par le polynome d'Hermite $V_{m,n}(x, y)$, on voit immédiatement qu'elles s'identifient en prenant

$$m = -\frac{1}{2} + i\mu, \qquad n = -\frac{1}{2} + i\nu,$$

μ et ν désignant deux entiers positifs tels que $\mu + \nu = q$.

M. P. Humbert nomme *hyperconiques* les fonctions à indices complexes $V_{-\frac{1}{2}+i\mu,\,-\frac{1}{2}+i\nu}(x, y)$, qui constituent la généralisation des fonctions coniques [3] de Mehler $V_{-\frac{1}{2}+i\nu}(x)$.

---

(1) *Encyclopédie des Sciences mathematiques* (*loc. cit.*), p. 191.

(2) P. Humbert, *Les fonctions* $V_{m,n}$ *d'Hermite à indices imaginaires* (*Comptes rendus*, t. 179, 1924, p. 1300)

(3) *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, (*loc. cit.*), p. 192.

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

BIBLIOGRAPHIE.

Nous avons établi, dans cette Bibliographie, une liste, aussi complète que nous l'avons pu, des travaux se rapportant aux sujets traités dans cet Ouvrage; en ce qui concerne la fonction de Gauss et les fonctions hypergéométriques d'une variable, nous n'avons mentionné que les travaux les plus utiles à connaître pour aborder la théorie des fonctions de plusieurs variables; on trouvera une Bibliographie beaucoup plus complète sur les fonctions hypergéométriques d'une variable dans deux fascicules en préparation du *Mémorial des Sciences mathématiques*. Nous avons employé les abréviations suivantes pour désigner les périodiques dont voici les titres :

A. A. P. P. . . *Annães scientificos da Academia polytechnica do Porto*, publicados sobra direcção de F. Gomes Teixeira, Coïmbre; gr in-8.

A. A. S. F. . . . *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ*, Helsingfors.

A. F. S. T. . . . *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse* pour les sciences mathématiques et physiques, Toulouse; in-4°.

A. M. . . . . . *Acta mathematica*, journal rédigé par G. Mittag-Leffler, Stockholm; in-4°.

A. M. P. . . . . . *Archiv der Mathematik und Physik*, gegründet 1841 durch J. A. Grünert, herausgegeben von E. Lampe, Leipzig; gr. in-8.

A. S. É. N. . . . *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, publiées sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique, Paris; in-4°.

A. S. S. B. . . . *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, Louvain; gr. in-8.

A. S. S. F. . . . *Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, Helsingfors; in-4°.

B. A. M. S. . . . *Bulletin of the American mathematical Society*, Lancaster; in-8.

B. A. S. P. . . . *Bulletin de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg* (Isvestie Imperatorskoie Akademie Nauk), Saint-Pétersbourg: in-4°

B. M. . . . . . *Bulletin des Sciences mathématiques*, fondé en 1870 par Gaston Darboux, publié par Gaston Darboux, Émile Picard et Jules Tannery, Paris; gr. in-8.

B. S. C. . . . . . *Buletinul Societatii de Stiinte din Cluj* (Bulletin de la Société des Sciences de Cluj, Roumanie). Cluj, in-8.

B. S. M. F. . . . *Bulletin de la Société mathématique de France*, publié par les Secrétaires, Paris; gr. in-8.

B. S. S. R. . . . *Bulletin de la Section scientifique de l'Académie roumaine*, Bucarest.

C. R. . . . . . *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, par les Secrétaires perpétuels, Paris; in-4°.

D. V. S. M. . . . *Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab*, Mathematisk-fysiske Meddelelser, Copenhague; in-8.

G. M. . . . . . *Giornale di matematiche*, ad uso degli studenti delle Universita italiane, del Battaglini, Naples; in-4°.

J. É. P. . . . . . *Journal de l'École Polytechnique*, Paris; in-4°.

J. M. . . . . . *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, fondé en 1836 et publié jusqu'en 1874 par Joseph Liouville, Paris; in-4°

J. R. A. M. . . . *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, begründet von A. L. Crelle, Berlin; in-4°.

M. A. . . . . . *Mathematische Annalen*, begründet 1868 durch A. Clebsch und C. Neumann, Leipzig; in-8

M. A. S. B. . . . *Memorie dell' Academia delle Scienze dell'Istituto di Bologna*, Bologne; in-4°

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

M. S. I. S.... *Memorie della Societa italiana delle Scienze* (detta dei XL), Rome; in-4°.
N. A. M..... *Nouvelles Annales de Mathématiques*, journal des candidats aux écoles spéciales, à la licence et à l'agrégation, Paris; in-8.
O. D. V. S.... *Oversigt over det kgl. Danske Videnskabernes Selskabs forhandlinger*, Copenhague; in-8.
P. E. M. S... *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, Edimbourg; in-12.
P. L. M. S.... *Proceedings of the London Mathematical Society*, Londres; in-8.
P. R. S. E.... *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, Edimbourg; in-8.
P. T. R. L.... *Philosophical Transactions of the London Royal Society*, Londres; in-4°.
Q. J. M..... *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, Londres; in-8.
R. A. L..... *Rendiconti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei*, Rome; in-8.
R. A. S. N.... *Rendiconti della Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli*, Naples; gr. in-8.
R. C. M. P... *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, fondatore G. B. Guccia, Palerme; in-8.
S. A. W. II... *Sitzungsberichte der k. k. Akademie zu Wien* (Abtheilung II-*a*), Vienne; in-4°.
T. C. P. S.... *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Cambridge; in-4°.
Z. M. P..... *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, herausgegeben von O. Schlömilch und M. Cantor, Leipzig; gr. in-8.

ABRAMESCU (N.). — Sulle serie di polinomi di una variabile complessa (*R. A. L.*, 5e série, t. 31, 1922, p. 89).
— Sulle serie di polinomi di Darboux e di Poincaré (*R. A. L.*, 5e série, t. 31, 1922, p. 152).
— Résumé des principales propriétés des polynomes orthogonaux (*N. A. M.*, 5e série, t. 2, 1924).

AKIMOF (M.). — Transcendantes de Fourier-Bessel à plusieurs variables (*C. R.*, t. 163, 1916, p. 26; t. 165, 1917, p. 23 et 1100).
— Sur l'expression approchée des transcendantes de Fourier-Bessel à plusieurs variables qui se rencontrent dans le problème de Kepler (*C. R.*, t. 179, 1924, p. 435).

ANDOYER (H.). — Démonstration directe d'un théorème de Tisserand relatif au développement de la fonction perturbatrice (*C. R.*, t. 172, 1921, p. 1545).

ANGELESCU (A.). — Sur une généralisation des polynomes d'Hermite (*C. R.*, t. 158, 1914, p. 1770).
— Sur des polynomes généralisant les polynomes de Legendre et d'Hermite et sur le calcul approché des intégrales multiples (*Thèse*, Paris, 1916, n° 1579).
— Sur les quadratures mécaniques (*B. S. R.*, t. 6, 1920, p. 81).
— Sur les polynomes orthogonaux en rapport avec d'autres polynomes (*B. S. C.*, t. 1, 1921, p. 44).
— Sur une intégrale double (*B. S. C.*, t. 1, 1921, p. 178).

APPELL (P.). — Évaluation d'une intégrale définie (*C. R.*, t. 87, 1878, p. 874).
— Sur la série hypergéométrique et les polynomes de Jacobi (*C. R.*, t. 89, 1879, p. 31).
— Sur une classe de polynomes (*A. S. É. N.*, 2e série, t. 9, 1880, p. 119).
Sur les séries hypergéométriques de deux variables et sur des équations différentielles linéaires aux dérivées partielles (*C. R.*, t. 90, 1880, p. 296 et 731).
— Sur la série $F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y)$ (*C. R.*, t. 90, 1880, p. 977).
— Sur quelques formules relatives aux fonctions hypergéométriques de deux variables (*C. R.*, t. 91, 1880, p. 364).
— Sur des polynomes de deux variables analogues aux polynomes de Jacobi (*A. M. P.*, t. 66, 1881, p. 238).
— Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables (*J. M.*, 3e série, t. 8, 1882, p. 173).
— Sur une équation linéaire aux dérivées partielles (*B. M.*, 2e série, t. 6, 1882, p. 314).
— Sur certaines formules de Hansen et de Tisserand (*C. R.*, t. 97, 1883, p. 1036).
— Sur une formule de Tisserand et sur les séries hypergéométriques de deux variables (*J. M.*, 3e série, t. 10, 1884, p. 407).
— Sur une classe de polynomes à deux variables et le calcul approché des intégrales doubles (*A. F. S. T.*, t. 4, 1890, H).
— Les polynomes d'Hermite rattachés aux polynomes de Legendre (*A. A. P. P.*, t. 5, 1910, p. 65).
— Quelques propriétés des polynomes $U_{m,n}$ d'Hermite et des polynomes X_n de Legendre (*A. A. P. P.*, t. 5., 1910, p. 209).
— Les polynomes $V_{m,n}$ d'Hermite et leurs analogues rattachés aux fonctions sphériques dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions (*C. R.*, t. 156, 1913, p. 1423).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

— Les polynomes $U_{m,n}$ d'Hermite et leurs analogues rattachés aux fonctions sphériques dans l'hyperespace (*C. R.*, t. 156, 1913, p. 1582).
— Les polynomes $V_{m,n}$ d'Hermite et leurs analogues rattachés aux potentiels à q variables (*R. C. M. P.*, t. 36, 1913, p. 203).
— Sur la convergence des séries procédant suivant les polynomes d'Hermite ou les polynomes analogues plus généraux (en collaboration avec J. Kampé de Fériet) (*C. R.* t. 158, 1914, p. 381).
— Généralisations diverses des fonctions sphériques (en collaboration avec A. Lambert) [*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (édition française), t. 2, vol. 5, fasc. 2, p. 231].
— Sur l'inversion approchée de certaines intégrales réelles et sur l'extension de l'équation de Kepler et des fonctions de Bessel (*C. R.*, t. 160, 1915, p. 419).
— Sur une intégrale définie dont l'élément est une exponentielle du 4e degré (*A. A. P. P.*, t. 12, 1917, p. 12).
— Sur l'intégration des équations différentielles simultanées que vérifie le polynome $U_{m,n}$ d'Hermite (*C. R.*, t. 166, 1918, p. 309).
— Sur les équations linéaires simultanées aux dérivées partielles et sur des cas de réduction des fonctions hypergéométriques de deux variables (*C. R.*, t. 166, 1918, p. 408).
— Sur une équation différentielle ordinaire liée à certains systèmes d'équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles (*C. R.*, t. 166, 1918, p. 469).
— Addition à la Note précédente (*C. R.*, t. 166, 1918, p. 1555).
— Sur une équation aux dérivées partielles de la théorie des fonctions hypergéométriques (*C. R.*, t. 171, 1920, p. 557).
— Sur un système de trois équations linéaires aux dérivées partielles (*R. C. M. P.*, t. 47, 1923, p. 15).
— Sur une équation différentielle linéaire aux dérivées partielles qui se rattache à la théorie des fonctions hypergéométriques de deux variables (*R. C. M. P.*, t. 48, 1924, p. 311).
— Sur les fonctions hypergéométriques de plusieurs variables, les polynomes d'Hermite et autres fonctions sphériques dans l'hyperespace (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. 3, 1925).

Barnes (E. W.). — On functions defined by simple types of hypergeometric series (*T. C. P. S.*, t. 20, 1907, p. 253).
— A new developpement of the theory of the hypergeometric functions (*P. L. M. S.*, 2e série, t. 6, 1908, p. 141).
— A transformation of generalised hypergeometric series (*Q. J. M.*, t. 41, 1910, p. 136).
Belardinelli (G.). — Sulla risoluzione delle equazioni algebriche mediante le funzioni ipergeometriche (*R. A. L.*, 5e série, t. 30, 1921, p. 208).
— Sulla risoluzione delle equazioni algebriche mediante sviluppi in serie (*A. M. P. A.*, t. 29, 3e série, 1920, p. 251).
— Sulla risoluzione delle equazioni algebriche mediante le funzioni ipergeometriche (*R. A. L.*, 5e série, t. 30, 1921, p. 208).
— L'equazione differenziale risolvente dell' equazione trinomia (*R. C. M. P.*, t. 46, 1922, p. 463).
— Sur la résolution des équations algébriques (*C. R.*, t. 179, 1924, p. 432).
Beltrami (E.). — Sulla teorica generale dei parametri differenziali (*M. A. S. B.*, 2e série, t. 8).
Birkeland (R.). — Résolution de l'équation algébrique trinome par des fonctions hypergéométriques supérieures (*C. R.*, t. 171, 1920, p. 778).
— Résolution de l'équation générale du 5e degré (*C. R.*, t. 171, 1920, p. 1047).
— Résolution de l'équation algébrique générale par des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables (*C. R.*, t. 171, 1920, p. 1370, et t. 172, 1921, p. 309).
— Sur la convergence des développements qui expriment les racines de l'équation algébrique générale par une somme de fonctions hypergéométriques de plusieurs variables (*C. R.*, t. 172, 1921, p. 1155).
Bourget (H.). — Sur une extension de la méthode de quadrature de Gauss (*C. R.*, t. 126, 1898, p. 634).

Callandreau (O.). — Sur une intégrale définie (*C. R.*, t. 89, 1879, p. 90).
— Sur une formule de M. Tisserand (*C. R.*, t. 97, 1883, p. 1187).
Capelli (A.). — Sulla risoluzione generale delle equazioni per mezzo di sviluppi in serie (*R. A. S. N.*, 3e série, t. 13, 1907, p. 192, 289, 342).
Cayley (A.). — Sur les fonctions de Laplace (*J. M.*, t. 13, 1848, p. 275).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

— A Memoir on Prepotentials (*P. T. R. L.*, t. 165, 2e Partie, 1875, p. 675).
— [*Mathematical Papers*, Cambridge, t. 1, p. 397, et t. 9, p. 318.]
Charlier (C. V. L.). — *Gründzüge der mathematischen Statistik* (Lund, 1920).
Christoffel (E. B.). — Ueber der Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades (*J. R. A. M.*, t. 70, 1869, p. 46).
Clausen (Th.). — Ueber die Fälle, wenn die Reihe $y = 1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x + \ldots$ ein quadrat von der Form $z = 1 + \frac{\alpha'.\beta'.\gamma'}{1.\delta'.\varepsilon'}x + \ldots$ hat (*J. R. A. M.*, t. 3, 1828, p. 89).

Darboux (G.). — Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en série (*J. M.*, 3e série, t. 4, 1878, p. 5 et 377).
— *Théorie des Surfaces*, t. II, p. 81 (Équation d'Euler et de Poisson).
Didon (F.). — Étude de certaines fonctions analogues aux fonctions X_n de Legendre (*A. S. É. N.*, t. 5, 1868, p. 229).
— Sur deux systèmes d'équations aux dérivées partielles (*A. S. É. N.*, t. 6, 1869, p. 7).
— Sur une intégrale double (*A. S. É. N.*, t. 7, 1870, p. 89).
— Développements sur certaines séries de polynomes à un nombre quelconque de variables (*A. S. É. N.*, t. 7, 1870, p. 247).
— Sur un mode d'approximation des fonctions de plusieurs variables (*C. R.*, t. 70, 1870, p. 749).

Euler (L.). — *Institutiones Calculi Integralis*, vol. 2, sect. 1, Chap. X, 1769.
— Specimen transformationis singularis Serierum (*Nova Acta Academiæ Petropolitanæ*, t. 12, 1778, p. 58)

Galbrun (H.). — Sur un développement d'une fonction à variable réelle en série de polynomes (*B. S. M. F.*, t. 41, 1913, p. 24).
Garnier (R.). — Sur les équations différentielles à points critiques fixes et les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur (*C. R.*, t. 132, 1911, p. 755).
— Sur des équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale générale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes (*Thèse*, Paris, 1911, n° 1429).
Gauss (C. F.). — 1° Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x + \ldots$.
— 2° Determinario seriei nostræ per æquationem differentialem secundi ordinis. (*Commentationes societatis regiæ scientiarum Gottingensis recentiores* 1811.)
— [*Werke*, t. 3, p. 123 et 207.]
Gegenbauer (L.). — Ueber einige bestimmte Integrale (*S. A. W.* II, t. 170, 1874, p. 6 et 433).
— Ueber die Function $C_n^\mu(x)$ (*S. A. W.* II, t. 75, 1877, p. 891).
— Ueber die Functionen $C_n^\gamma(x)$ (*S. A. W.* II, t. 97, 1888, p. 259).
— Das Additionstheorem der Functionen $C_n^\gamma(x)$ (*S. A. W.* II, t. 102, 1893, p. 942).
— Generalizzazione di alcuni teoremi intorno alle funzioni sferiche contenuti in una nota del prof. Paci (*R. C. M. P.*, t. 13, 1899, p. 92).
Gibb (D.). — On Integral Relations connected with the confluent hypergeometric Function (*P. E. M. S.*, t. 34, Part. 2, 1915-1916).
Goursat (E.). — Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéométrique (*A. S. É. N.*, 2e série, t. 10, 1881, p. 3).
— Sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur (*A. S. É. N.*, t. 12, 1883, p. 261 et 395).
— Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables (*C. R.*, t. 95, 1882, p. 717).
— Extension du problème de Riemann à des fonctions hypergéométriques de deux variables (*C. R.*, t. 95, 1882, p. 903 et 1044).
Green (G.). — On the Determination if the Exterior and Interior Attractions of Ellipsoïds of variable Densities (*T. C. P. S.*, t. 5, 1834, p. 395).
— [*Mathematical Papers*, p. 187.]

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

HALPHEN (G.). — Sur certaines séries pour le développement des fonctions d'une variable (*C. R.*, t. 93, 1881, p. 781).
— Sur quelques séries pour le développement des fonctions à une seule variable (*C. R.*, t. 93, 1881, p. 833, et *B. M.*, 2e série, t. 5, 1881, p. 462).
— [*Œuvres*, t. 2, p. 485, 488, 492.]
HEINE (E.). — Verwandlung von Reihen in Kettenbrüche (*J. R. A. M.*, t. 32, 1846, p. 205)
— Ueber die Zähler und Nenner die Näherungswerthe von Kettenbrüche (*J. R. A. M.*, t. 57, 1860, p. 231).
— Die Lameschen Functionen verschiedener Ordnung (*J. R. A. M.*, t. 60, 1862, p. 253).
— Ueber einige bestimmte Integrale (*J. R. A. M.*, t. 61, 1863, p. 356).
— Die speciellen Lameschen Functionen erster Art von beliebiger Ordnung (*J. R. A. M.*, t. 62, 1863, p. 110).
— *Handbuch der Kugelfunctionen, Theorie und Anwendung*, 2 vol. (Berlin, 1898).
HERMITE (Ch.). — Sur un nouveau développement en série de fonctions (*C. R.*, t. 58, 1864, p. 93 et 266).
— Extrait d'une lettre de M. Hermite à M. Borchardt (*J. R. A. M.*, t. 64, 1865, p. 294).
— Sur deux intégrales doubles (*A. S. É. N.*, t. 2, 1865, p. 49).
— Sur quelques développements en série de fonctions de plusieurs variables (*C. R.*, t. 60, 1865, p. 370, 432, 461 et 512).
— [*Œuvres*, t. II, p. 293, 301, 309, 313, 319.]
HILBERT (D.). — *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (Leipzig, 1912).
HILL (M. J. M.). — On functions of more than two variables analogous to Tesseral Harmonics (*T. C. P. S.*, t. 13, 1883, p. 273).
HOBSON (E. W.). — On a theorem in Differentiation and its application to Spherical Harmonics (*P. L. M. S.*, t. 24, 1892, p. 55).
— On Bessels Functions and Relations connecting them with Hyperspherical and Spherical Harmonics (*P. L. M. S.*, t. 25, 1893, p. 49).
HORN (J.). — Ueber die Convergenz der hypergeometrischen Reihen zweier und dreier Veränderlichen (*M. A.*, t. 34, 1889, p. 544).
— Ueber ein System linearer partieller Differentialgleichungen (*A. M.*, t. 12, 1889, p. 113).
HUMBERT (P.). — Sur les équations aux dérivées partielles vérifiées par les polynomes d'Hermite, déduits d'une exponentielle (*C. R.*, t. 167, 1918, p. 522).
— A Reduction-formula for the Functions of the Second Kind connected with the Polynomials of Applied Mathematics (*P. R. S. E.*, t. 38, Part. I, 1917-1918, p. 61).
— Sur deux polynomes associés aux polynomes de Legendre (*B. S. M. F.*, t. 46, 1918, p. 120).
— Sur les équations de Didon (*N. A. M.*, 4e série, t. 19, 1919).
— The Confluent hypergeometric Functions of Two Variables (*P. R. S. E.*, t. 41, Part. I, 1920-1921, p. 73).
— Sur les fonctions de l'hypercylindre parabolique (*C. R.*, t. 170, 1920, p. 564).
— Sur une nouvelle application de la fonction $W_{k,\mu,\nu}$ (*C. R.*, t. 170, 1920, p. 832).
— Fonctions de l'hyperparaboloïde de révolution et fonctions hypersphériques (*C. R.*, t. 170, 1920, p. 1482).
— La fonction $W_{k,\mu_1,\ldots,\mu_n}(x_1, \ldots, x_n)$ (*C. R.*, t. 171, 1920, p. 428).
— Sur les fonctions hypercylindriques (*C. R.*, t. 171, 1920, p. 490).
— Les fonctions hypercylindriques dans l'espace à $n+2$ dimensions (*C. R.*, t. 171, 1920, p. 537).
— L'équation de Laplace en coordonnées hypertoroïdales (*C. R.*, t. 171, 1920, p. 1116).
— Sur les fonctions hypertoroïdales et leur lien avec les fonctions hypersphériques (*C. R.*, t. 171, 1920, p. 1366).
— Les polynomes Υ d'Hermite-Didon et les fonctions de Laplace dans l'hyperespace (*C. R.*, t. 172, 1921, p. 901).
— Sur les polynomes hypergéométriques (*C. R.*, t. 172, 1921, p. 1282).
— Monographie des polynomes de Kummer (*N. A. M.*, 4e série, t. 22, 1922).
— On Mathieu Functions of higher order (*P. E. M. S.*, t. 40, 1921-1922).
— Formule de multiplication pour la fonction de Kummer (*C. R.*, t. 173, 1921, p. 217).
— Sur une propriété des fonctions hypercylindriques (*Comptes rendus du Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences*, Montpellier, 1922).
— Sur le produit de Laplace relatif à certains hypercylindres (*C. R.*, t. 174, 1922, p. 91).
— Sur certains polynomes orthogonaux (*C. R.*, t. 176, 1923, p. 1282).
— Sur les confluences de la série de Clausen (*C. R.*, t. 177, 1923, p. 1092).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

— Sur les séries hypergéométriques (*A. S. S. B.*, t. 43, 1923, 4, p. 75).
— Les fonctions $V_{m,n}$ d'Hermite à indices imaginaires (*C. R.*, t. 179, 1924, p. 1300).
— Sur les fonctions hypersphériques zonales (*C. R.*, t. 180, 1925, p. 723).
— Sur les polynomes de Sonine à une et deux variables (*J. É. P.*, 2e série, t. 24, 1925, p. 59).
— Sur des suites de polynomes (*J. M.*, 9e série, t. 4, 1925, p. 355).
— Remarques sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur (58e *Congrès des Sociétés savantes*, Paris, 1925).

Jacobi (C. G. J.). — Ueber die Entwickelung des Ausdrücks :

$$\{a^2 - 2aa'[\cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi\cos(\Im - \Im')] + a'^2\}^{-\frac{1}{2}} \quad (J. R. A. M., t. 26, 1843, p. 81).$$

— Ueber eine particuläre Lösung der partiellen Differentialgleichung : $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ (*J. R. A. M.*, t. 36, 1848, p. 117).
— Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe (*J. R. A. M.*, t. 56, 1859, p. 149).
— [*Werke*, t. 6, p. 148, et 184.]
Jekhowski (B.). — Sur les fonctions de Bessel à plusieurs variables (*C. R.*, t. 162, 1916, p. 318; t. 164, 1917, p. 719; *B. M.*, t. 41, 1917, p. 58).

Kampé de Fériet (J.). — Sur les polynomes ultrasphériques (*C. R.*, t. 157, 1913, p. 912).
— Sur le développement d'une fonction en série de polynomes ultrasphériques (*C. R.*, t. 157, 1913, p. 1392).
— Sur la convergence des séries procédant suivant les polynomes d'Hermite ou les polynomes analogues plus généraux (en collaboration avec P. Appell) (*C. R.*, t. 158, 1914, p. 381).
— Sur les fonctions hypersphériques (*Thèse*, Paris, 1915, n° 1564).
— Sur la généralisation des séries de Lagrange et de Laplace (*C. R.*, t. 160, 1915, p. 591).
— Sur une équation intégrale de deuxième espèce admettant les fonctions hypersphériques comme solutions fondamentales (*C. R.*, t. 162, 1916, p. 747).
— Sur la formation d'équations intégrales admettant les fonctions hypersphériques comme solutions fondamentales (*C. R.*, t. 164, 1917, p. 856).
— Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles vérifiées par les polynomes hypersphériques (*C. R.*, t. 167, 1918, p. 519).
— Sur une application des dérivées généralisées à la formation et à l'intégration de certaines équations différentielles linéaires (*C. R.*, t. 170, 1920, p. 569)
— Sur l'emploi des dérivées généralisées pour la formation et l'intégration de certaines équations différentielles linéaires (*C. R.*, t. 170, 1920, p. 1045).
— Sur les fonctions hypersphériques et sur l'expression de la fonction hypergéométrique par une dérivée généralisée (*A. M.*, t. 43, 1922, p. 197).
— Sur les fonctions hypercylindriques (*C. R.*, t. 172, 1921, p. 1464).
— Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions hypergéométriques les plus générales (*C. R.*, t. 172, 1921, p. 1634).
— Sur certains systèmes associés d'équations aux différences finies et d'équations aux dérivées partielles (*C. R.*, t. 173, 1921, p. 285).
— Les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur à deux variables (*C. R.*, t. 173, 1921, p. 401).
— Quelques propriétés des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur à deux variables (*C. R.*, t. 173, 1921, p. 489).
— Sur l'intégrale générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur (*C. R.*, t. 173, 1921, p. 900).
— Sur une formule d'addition des polynomes d'Hermite (*D. V. S. M.*, t. 5, n° 2, 1923).
— Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur (*C. R.*, t. 177, 1923, p. 546).
— Sur une classe particulière de fonctions hypergéométriques d'une variable (*C. R.*, t. 178, 1924, p. 1949).
— Une propriété générale des fonctions hypergéométriques d'une variable (58e *Congrès des Sociétés savantes*, Paris, 1925).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

— Sur les fonctions définies par des séries dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de l'indice (*Comptes rendus du Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences*, Grenoble, 1925).
— Les fonctions hypergéométriques d'une variable (*Leçons professées à l'Université de Cracovie*, cours lithographié, Kraków, 1926).
— *La fonction hypergéométrique d'une variable*, fascicule du *Mémorial des Sciences mathématiques* (sous presse).
Kelvin (Lord). — Extrait de deux lettres adressées à M. Liouville (*J. M.*, t. 12, 1847, p. 256).
Klein (F.). — *Ueber die hypergeometrische Function* (Vorlesungen, Göttingen, 1894).
Kummer (E. E.). — Ueber die hypergeometrische Reihe $1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x + \ldots$ (*J. R. A. M.*, t. 15, 1836, p. 39 et 127).
— De integralibus quibusdam definitis et seriebus infinitis (*J. R. A. M.*, t. 17, 1837, p. 228).

Laguerre (E.-N.). — Sur l'intégrale $\int_0^z z^n e^{-\frac{z^2}{2}+z.x} dz$ (*B. S. M. F.*, t. 7, 1878, p. 12).
— [*Œuvres*, t. I, p. 415.]
Lambert (A.). — Généralisations diverses des fonctions sphériques (en collaboration avec P. Appell) [*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (édition française), t. 2, vol. 5, fasc. 2, p. 231].
Laplace (P.-S.). — *Mécanique céleste*, t. 2.
Lauricella (G.). — Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili (*R. C. M. P.*, t. 7, 1893, p. 111).
Le Vavasseur (R.). — Sur le système d'équations aux dérivées partielles simultanées auxquelles satisfait la série hypergéométrique à deux variables $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$ (*Thèse*, Paris, 1893, n° 793).
Liouville (R.). — Sur les solutions communes à plusieurs équations linéaires aux dérivées partielles (*C. R.*, t. 101, 1885, p. 1134).
— Sur quelques équations différentielles non linéaires (*C. R.*, t. 103, 1886, p. 457).
— Sur certaines équations différentielles du premier ordre (*C. R.*, t. 103, 1886, p. 476).
— Sur une classe d'équations différentielles non linéaires (*C. R.*, t. 103, 1886, p. 520).
— Sur quelques équations différentielles non linéaires (*J. É. P.*, t. 57, 1887, p. 189).

Markof (A.). — Sur les racines de l'équation $e^{x^2}\frac{d^m}{dx^m}(e^{-x^2}) = 0$ (*B. A. S. P.*, 5e série, t. 9, 1898, p. 435).
Mehler (F. G.). — Ueber die Entwicklung einer Funktion von beliebig vielen Variabeln nach Laplaceschen Funktionen höherer Ordnung (*J. R. A. M.*, t. 66, 1865, p. 161).
Mellin (Hj.). — Ueber einen Zusammenhang zwischen gewissen linearen Differential und Differenzengleichungen (*A. M.*, t. 9, 1887, p. 137).
— Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen erster Ordnung (*A. M.*, t. 15, 1891, p. 317).
— Om definita integraler hvilka för obegrändsat växande värden af vissa heltaliga parametrar harfva til gränser Hypergeometriska funktioner af sarokilda ordningar (*A. S. S. F.*, t. 20, n° 7, 1895).
— Ueber die fundamentale Wichtigkeit des Satzes von Cauchy für die Theorien der Gamma und der hypergeometrischen Funktionen (*A. S. S. F.*, t. 21, n° 1, 1896).
— Ueber gewisse durch bestimmte Integrale vermittelte Beziehungen zwischen linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten (*A. S. S. F.*, t. 21, n° 6, 1896).
— Zur Theorie zweier allgemeiner Klassen Bestimmter Integrale (*A. S. S. F.*, t. 22, n° 2, 1897).
— Ueber hypergeometrischen Reihen höherer Ordnungen (*A. S. S. F.*, t. 23, n° 7, 1897).
— Ueber die Integration partieller linearer Differentialgleichungen durch vielfache Integrale (*A. M.*, t. 22, 1899, p. 19).
— Ueber die Integration simultaner linearer Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale (*A. M.*, t. 22, 1899, p. 41).
— Ueber den Zusammenhang zwischen den linearen Differential und Differenzengleichungen (*A. M.*, t. 25, 1902, p. 139).
— Grundzüge einer einheitlichen Theorie der Gamma- und hypergeometrischen Funktionen (*A. A. S. F.*, t. 1, 1909, n° 3).
— Abriss einer einheitlichen Theorie der Gamma- und hypergeometrischen Funktionen (*M. A.*, t. 68, 1910, p. 305).
— Zur Theorie der trinomischen Gleichungen (*A. A. S. F.*, t. 7, n° 7, 1915).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

— Ein allgemeiner Satz über algebraische Gleichungen (*A. A. S. F.*, t. 7, nº 8, 1915).
— Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma (*C. R.*, t. 172, 1921, p. 658).
Milne (A.). — On the Equation of the Parabolic Cylinder Functions (*P. E. M. S.*, t. 32, 1913-1914).
— On the Roots of the Confluent Hypergeometric Functions (*P. E. M. S.*, t. 33, 1914-1915).
Myller-Lebedeff (Mme W.). — Die Theorie der Integralgleichungen in Anwendung auf einige Reihenentwickelungen (*M. A.*, t. 64, 1907, p. 388).
— Sur l'équation hypergéométrique (*C. R.*, t. 149, 1909, p. 561).
— Orthogonale hypergeometrische Funktionen (*M. A.*, t. 70, 1910, p. 87).

Nielsen (N.). — *Théorie des fonctions métasphériques* (Paris, 1911).
— Recherches sur le développement d'une fonction analytique en série de fonctions hypergéométriques (*A. S. É. N.*, 3e série, t. 30, 1913, p. 12).
— Recherches sur les polynomes d'Hermite (*D. V. S. M.*, t. 1, nº 6, 1918).
Neumann (C.). — Abriss einer Theorie der Kugelfunctionen und Ultrakugelfunctionen (*Z. M. P.*, t. 12, 1867, p. 97).
Neil M' Artur. — Note on the Polynomials which satisfy the Differential Equation $xy'' + (\gamma - x)\, y' - \alpha y = 0$ (*P. E. M. S.*, t. 38, 1919-1920).
Nörlund (N. E.). — Sur une classe de fonctions hypergéométriques (*O. D. V. S.*, 1913, p. 135).
— *Vorlesungen über Differenzenrechnung* (Berlin, 1924).

Pérès (J.). — Sur les fonctions de Fourier-Bessel à plusieurs variables (*C. R.*, t. 161, 1915, p. 168).
Picard (E.). — Sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques (*C. R.*, t. 90, 1880, p. 1119 et 1267; *A. S. É. N.*, 2e série, t. 10, 1881, p. 305).
— Sur une courbe particulière du troisième genre et sur certaines fonctions uniformes de deux variables indépendantes (*C. R.*, t. 93, 1881, p. 835).
— Sur certaines fonctions uniformes de deux variables indépendantes et sur un groupe de substitutions linéaires (*C. R.*, t. 94, 1882, p. 579).
— Sur un groupe de substitutions linéaires (*C. R.*, t. 94, 1882, p. 837).
— Sur une classe de fonctions uniformes de deux variables indépendantes (*C. R.*, t. 95, 1882, p. 594).
— Sur des fonctions de deux variables indépendantes analogues aux fonctions modulaires (*A. M.*, t. 2, 1883, p. 114).
— Sur les fonctions hyperfüchsiennes provenant des séries hypergéométriques de deux variables (*A. S. É. N.*, 3e série, t. 2, 1885, p. 381, et *B. S. M. F.*, t. 15, 1886, p. 148).
— Sur les groupes de certaines équations différentielles linéaires (*B. M.*, 2e série, t. 9, 1885, p. 202).
Pincherle (S.). — Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate (*R. A. L.*, t. 4, 1888, p. 694 et 792).
— Una nuova estensione delle funzioni sferiche (*M. A. S. B.*, 5e série, t. 1, 1891, p. 337).
— Delle funzioni ipergeometriche et di varie questioni ad esse attinenti (*G. M.*, t. 32, 1894, p. 209).
— Sull' inversione degli integrali definiti (*M. S. I. S.*, 3e série, t. 15, 1908, p. 3).
Pochhammer (L.). — Ueber hypergeometrischen Funktionen höheren Ordnungen (*J. R. A. M.*, t. 71, 1870, p. 216).
— Notiz über die Herleitung der hypergeometrischen Differentialgleichungen (*J. R. A. M.*, t. 73, 1871, p. 85).
— Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf (*M. A.*, t. 35, 1890, p. 470).
— Zur Theorie der Euler'schen Integrale (*M. A.*, t. 35, 1890, p. 495).
— Ueber eine Classe von Integral mit geschlossener Integrationscurve (*M. A.*, t. 37, 1890, p. 500).

Radau (R.). — Remarques sur une formule de M. Tisserand (*C. R.*, t. 97, 1883, p. 1130).
Riemann (B.). — *Œuvres*, traduction Laugel, Paris, 1898.
Riquier (C.). — Extension à l'hyperespace de la méthode de M. Carl Neumann (*Thèse*, Paris, 1886).
Rodrigues (O.). — Sur l'attraction des sphéroïdes (*Thèse*, Paris, 1815).

Stieltjes (T. J.). — *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*, t. 1, p. 107 (Paris, 1905).

Tisserand (F.). — Note sur une formule de Hansen (*C. R.*, t. 97, 1883, p. 815 et 880).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

— *Mécanisme céleste*, t. 1 (Paris, 1889).
Tissot (A.) Sur un déterminant d'intégrales définies (*J. M.*, t. 17, 1852, p. 17.).
Tramm (W.). — Geometrische Diskussion des Hermite'schen Polynoms (*Inaugural Dissertation*, Zurich, 1908).

Watson (G. N.). — The Expansions of products of hypergeometric Functions (*Q. J. M.*, t. 39, 1907, p. 27).
— A Series for the Square of the hypergeometric Function (*Q. J. M.*, t. 40, 1908, p. 46).
— The Continuations of Functions defined by generalised hypergeometric Series (*T. C. P. S.*, t. 21, 1910, p. 281).
— The Product of two hypergeometric Functions (*P. L. M. S.*, t. 20, 1921, p. 189).
Weber (H.). — Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + K^2 u = 0$ (*M. A.*, t. 1, 1869, p. 1).
Whitaker (E. T.). — An Expression of certain known Functions as generalized hypergeometric Functions (*B. A. M. S.*, 2e série, t. 10, 1903, p. 125).
— On the Functions associated with the Parabolic Cylinder in Harmonic Analysis (*P. L. M. S.*, t. 35, 1903, p. 417).
— On the continued Fractions wich represent the Functions of Hermite and other Functions defined by differential Equations (*P. E. M. S.*, t. 32, 1913-1914).
— *Modern Analysis* (en collaboration avec G. N. Watson), 3e édition (Cambridge, 1920).
Willigens (Ch.). — Sur les polynomes $U_{m,n}$ (*N. A. M.*, t. 11, 1911, p. 97).
Wirtinger (W.). — Ueber die Anzahl der linear unabhängigen hypergeometrischen Integrale n^{ter} Stufe (*S. A. W.* II, t. 114, 1905, p. 1571).

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from
UNIVERSITY OF MINNESOTA

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

Les fonctions hypergéométriques de plusieurs variables.

CHAPITRE I.

LES QUATRE FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES DE DEUX VARIABLES.

		Pages.
I	La fonction hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ de Gauss.....	1
II	Définition des quatre séries hypergéométriques de deux variables.....	13
III	Domaine de convergence des séries doubles.....	15
IV	Dérivées partielles des fonctions hypergéométriques. Fonctions contiguës.....	19
V.....	Formules de réduction et de transformation des quatre fonctions hypergéométriques...	22

CHAPITRE II.

REPRÉSENTATION DES FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES PAR DES INTÉGRALES DÉFINIES.

VI	Expression des fonctions F_1, F_2, F_3 par des intégrales définies.....	28
VII	Formules de transformation des fonctions hypergéométriques.....	30
VIII.....	Propriétés des fonctions hypergéométriques déduites de leurs expressions par des intégrales définies.....	33
IX	Développement de la fonction $F_3\left(\alpha, \alpha', 1, 1, \gamma, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$.....	36
X	Représentation des quatre fonctions hypergéométriques par des intégrales prises le long de contours complexes.....	39

CHAPITRE III.

LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DES QUATRE FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES.

XI	Les quatre systèmes d'équations aux dérivées partielles.....	44
XII.....	Théorèmes généraux sur les systèmes de deux équations aux dérivées partielles simultanées du second ordre.....	44
XIII	Intégrale générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions F_2, F_3, F_4.	49
XIV.....	Intégration du système de la fonction F_1.....	53
XV.....	Tableau des soixante intégrales des équations de la fonction F_1.....	55
XVI.....	Relations entre quatre intégrales des équations de la fonction F_1.....	65
XVII.....	Relations entre les intégrales des équations de F_1 et de F_8.....	68

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Pages.

XVIII ..... Équations adjointes des équations de F_1, F_2, F_3, F_4 69
XIX ..... Équations différentielles des fonctions F_1, F_2, F_3, F_4 considérées comme fonctions d'une seule variable 71

CHAPITRE IV.

EXTENSION AUX FONCTIONS DE DEUX VARIABLES DU PROBLÈME DE RIEMANN.

XX ..... Historique 76
XXI ..... Conditions imposées *a priori* 77
XXII ..... Formation des équations aux dérivées partielles du second ordre que vérifie la fonction z. 78
XXIII ..... Utilisation des recherches de Pochhammer 83
XXIV ..... Résultats du calcul 85
XXV ..... Les trois solutions linéairement indépendantes 85
XXVI ..... Recherches de M. Goursat. Extension du problème de Riemann aux fonctions F_2 et F_3 ... 86
XXVII ..... Recherches de M. E. Picard. Groupe des équations de F_1. Fonctions hyperfüchsiennes déduites de F_1 87

CHAPITRE V.

LES DEUX MODES DE RÉDUCTION DES FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES DE DEUX VARIABLES.

XXVIII .... Considérations générales 90
XXIX ..... Réductions de première espèce. Premier cas de réduction 91
XXX ..... Réductions de première espèce. Autres cas de réduction 94
XXXI ..... Réduction de première espèce. Derniers cas de réduction 95
XXXII .... Réductions de seconde espèce 96

CHAPITRE VI.

LES POLYNOMES HYPERGÉOMÉTRIQUES A DEUX VARIABLES GÉNÉRALISANT LES POLYNOMES DE JACOBI.

XXXIII ... Polynomes hypergéométriques déduits de la fonction $F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y)$ 99
XXXIV ... Deux systèmes adjoints de polynomes hypergéométriques déduits de F_2 104
XXXV ..... Propriétés de l'équation aux dérivées partielles obtenue en faisant la somme des deux équations de la fonction F_2 105
XXXVI ... Propriété d'orthogonalité des deux systèmes de polynomes $F_{m,n}$ et $E_{m,n}$ 110

CHAPITRE VII.

LES FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES DE n VARIABLES DE M. LAURICELLA.

XXXVII .. Définition des fonctions hypergéométriques de M. Lauricella 114
XXXVIII .. Expression des fonctions hypergéométriques par des intégrales définies 115
XXXIX ... Systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions F_A, F_B, F_C, F_D 117

CHAPITRE VIII.

LES DÉGÉNÉRESCENCES DES QUATRE FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES DE DEUX VARIABLES.

XL ..... Les dégénérescences de la fonction hypergéométrique de Gauss 121
XLI ..... Les dégénérescences des fonctions hypergéométriques de deux variables 124

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

Pages.
XLII ..... Propriétés élémentaires des fonctions hypergéométriques confluentes 126
XLIII ..... Systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions hypergéométriques confluentes. 128
XLIV ..... La fonction $W_{k,\mu}(x)$ de M. Whittaker 129
XLV ..... Les fonctions $W_{k,\mu,\nu}(x, y)$ et $W_{k,\mu_1,\ldots,\mu_n}(x_1, \ldots, x_n)$ 132

CHAPITRE IX.

LES FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES D'ORDRE SUPÉRIEUR A DEUX VARIABLES.

XLVI ..... Les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur à une variable 136
XLVII ..... Les fonctions hypergéométriques les plus générales à deux variables 143
XLVIII ..... Les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur à deux variables 149
XLIX ..... Les systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur 155
L ..... Intégration des systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur 156

DEUXIÈME PARTIE.

Les fonctions hypersphériques et les polynomes d'Hermite.

CHAPITRE I.

L'ÉQUATION DE LAPLACE ET LES FONCTIONS HARMONIQUES.

LI ..... Le paramètre différentiel $\Delta^2 F$ de Laplace et les paramètres $\Delta^{2j} F$ 177
LII ..... Expression des paramètres différentiels $\Delta_1 F$ et $\Delta^2 F$ dans un système de coordonnées curvilignes quelconque 178
LIII ..... L'équation de Laplace 183
LIV ..... Les formules de Green 189
LV ..... Fonctions harmoniques. Problème de Dirichlet 192
LVI ..... Fonction de Green. Solution du problème de Dirichlet pour l'hypersphère 196
LVII ..... Les polynomes harmoniques 200

CHAPITRE II.

LES FONCTIONS HYPERSPHÉRIQUES Y_μ.

LVIII ..... Définition des coordonnées polaires dans l'hyperespace 202
LIX ..... Définition des fonctions hypersphériques Y_μ 204
LX ..... Développement d'une fonction harmonique en série de fonctions Y_μ 206
LXI ..... Propriété d'orthogonalité des fonctions Y_μ 208
LXII ..... Définition des coordonnées zonales dans l'hyperespace 210
LXIII ..... Les fonctions hypersphériques en coordonnées zonales 213
LXIV ..... Expression générale d'une fonction hypersphérique $Y_\mu^{(k)}$, de degré μ et d'ordre k 214
LXV ..... Équations aux dérivées partielles des fonctions $Y_\mu^{(k)}$ et des polynomes $Z_\mu^{(k)}$ 218
LXVI ..... Équation intégrale admettant les fonctions hypersphériques comme solutions fondamentales. 219

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

CHAPITRE III.

LES POLYNOMES $V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n)$ ET $V^{s}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n)$.

		Pages.
LXVII	Les fonctions hypersphériques zonales et les polynomes d'Hermite	224
LXVIII....	La fonction génératrice des polynomes $V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n)$	226
LXIX	Expression générale des polynomes $V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n)$	229
LXX	Expression des polynomes $V_{m_1,\ldots,m_n}$ par des fonctions hypergéométriques de n variables	234
LXXI	Expression du groupe homogène des polynomes $V_{m_1,\ldots,m_n}$ d'un degré μ donné	235
LXXII.....	Système de Didon des n équations aux dérivées partielles des polynomes $V_{m_1,\ldots,m_n}$	237
LXXIII ...	Réduction des équations de Didon aux équations de la fonction hypergéométrique F_A	241
LXXIV....	Propriétés d'orthogonalité du système des polynomes $V_{m_1,\ldots,m_n}$	243
LXXV.....	Définition des polynomes $V^{s}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n)$	246
LXXVI....	Propriétés des polynomes $V^{s}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n)$	249

CHAPITRE IV.

LES POLYNOMES $U^{s}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n)$.

LXXVII. ..	Nécessité, pour pouvoir développer une fonction arbitraire, d'adjoindre aux polynomes $V^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$ une autre famille de polynomes	257
LXXVIII ..	Formation des polynomes $U^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$	260
LXXIX ...	Fonction génératrice des polynomes $U^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$	263
LXXX	Expression du groupe homogène des polynomes $U^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$ d'un degré μ donné. Maximum de $U^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$ dans le domaine $X_n \geq 0$	265
LXXXI ...	Expression des polynomes $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}$ par les fonctions hypergéométriques	268
LXXXII...	Expression des polynomes $U^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$ par des intégrales définies	270
LXXXIII..	Expression des polynomes $U^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$ par des dérivées partielles de $X_n = 1 - x_1^2 - \ldots - x_n^2$.	271
LXXXIV ..	Système d'équations aux dérivées partielles vérifiées par les polynomes $U^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$	276
LXXXV ...	Réduction des équations de la fonction $R^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$ à celles de la fonction hypergéométrique F_A.	278
LXXXVI ..	Relations entre les systèmes d'équations aux dérivées partielles de la fonction $R^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$ et du polynome $V^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$	279

CHAPITRE V.

DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION ARBITRAIRE EN SÉRIE DE POLYNOMES $V^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$ ET $U^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$.

LXXXVII..	Calcul des coefficients du développement d'une fonction en série de polynomes $V^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$.	282
LXXXVIII.	Exemples de développement en série de polynomes $V^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$	285
LXXXIX...	Calcul des coefficients du développement d'une fonction en série de polynomes $U^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$.	288
XC	Relation entre le développement d'une fonction en série de polynomes $U^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$ et la solution du problème de Dirichlet pour le domaine intérieur à une hypersphère	289
XCI	Exemple de développement en série de polynomes $U^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$	291
XCII	Détermination du polynome de degré p qui approche le plus d'une fonction donnée $F(x_1, \ldots, x_n)$ dans le domaine $X_n \geq 0$	293
XCIII.....	Convergence des développements d'une fonction en série de polynomes $V^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$ et $U^{s}_{m_1,\ldots,m_n}$ dans le domaine $X_n \geq 0$	296

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

CHAPITRE VI.

LES FONCTIONS HYPERSPHÉRIQUES D'ORDRE QUELCONQUE.

Pages.

XCIV ..... Résultats acquis pour les fonctions hypersphériques zonales 298
XCV ..... Expression des fonctions hypersphériques d'ordre k au moyen des polynomes $U^s_{m_1,\ldots,m_n}$. 299
XCVI ..... Expression des fonctions hypersphériques d'ordre k au moyen des polynomes $V^s_{m_1,\ldots,m_n}$. 302
XCVII..... Propriété d'orthogonalité des deux systèmes $P^{(n,k)}_{h_1,\ldots,h_n}$ et $Q^{(n,k)}_{h_1,\ldots,h_n}$. Développement d'une fonction arbitraire en série de fonctions hypersphériques 306
XCVIII.... Développement en série de la solution du problème de Dirichlet pour les domaines intérieur et extérieur à l'hypersphère S 309
XCIX..... Développement du polynome $V''_{\mu}\left[x_1 x'_1 + \ldots + x_n x'_n + \sqrt{X_n}\sqrt{X'_n}\cos(\varphi - \varphi')\right]$ 311
C ..... Développement de $\left[a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + i A_n \sqrt{X_n}\cos\varphi\right]^{\mu}$ 313

CHAPITRE VII.

ÉTUDE SPÉCIALE DES POLYNOMES A DEUX VARIABLES $U_{m,n}(x, y)$ ET $V_{m,n}(x, y)$.

CI..... Rappel de quelques formules 316
CII..... Détermination de l'intégrale générale du système d'équations aux dérivées partielles du polynome $U_{m,n}(x, y)$ 321
CIII ..... Détermination de l'intégrale générale du système d'équations aux dérivées partielles vérifiées par le polynome $V_{m,n}(x, y)$ 326
CIV ..... Les courbes algébriques $U_{m,n}(x, y) = 0$ 328

TROISIÈME PARTIE.

Les polynomes d'Hermite dérivés d'une exponentielle.

CHAPITRE I.

LES POLYNOMES D'HERMITE DÉRIVÉS DE L'EXPONENTIELLE $e^{\frac{x^2}{2}}$.

CV ..... Le potentiel dans un espace à un nombre infiniment grand de dimensions. Limite des polynomes $V^s_n(x)$ quand s augmente indéfiniment 331
CVI ..... Expression générale des polynomes $H_n(x)$ 333
CVII..... Formules de récurrence entre polynomes consécutifs. Racines de $H_n(x)$ 335
CVIII ..... Équation différentielle des polynomes $H_n(x)$ 338
CIX ..... Fonctions $D_n(x)$ du cylindre parabolique. Polynomes vérifiant l'équation de la chaleur dans une barre 339
CX..... Expression du polynome $H_n(x)$ par une intégrale définie. Relations intégrales entre les polynomes $H_n(x)$ et les fonctions hypersphériques $V^s_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n)$ 342
CXI ..... Formule d'addition 344
CXII ..... Propriété d'orthogonalité des polynomes $H_n(x)$ 346
CXIII ..... Développement d'une fonction en série de polynomes $H_n(x)$ par la méthode de Fourier... 348
CXIV..... Développement d'une fonction en série de polynomes $H_n(x)$ au point de vue de la théorie des équations intégrales 351
CXV..... Les séries de polynomes $H_n(x)$ où les coefficients sont donnés *a priori* 353
CXVI..... Une propriété de minimum des polynomes d'Hermite 355
CXVII..... Les fonctions d'Hermite de seconde espèce 357

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA

CHAPITRE II.

LES POLYNOMES D'HERMITE A PLUSIEURS VARIABLES DÉRIVÉS D'UNE EXPONENTIELLE.

		Pages.
CXVIII....	Définition des deux systèmes de polynomes adjoints	363
CXIX.....	Propriété d'orthogonalité des deux systèmes de polynomes adjoints	367
CXX	Expression générale des polynomes $H_{m,n}(x, y)$ et $G_{m,n}(x, y)$	369
CXXI.....	Expression des polynomes $H_{m,n}$ et $G_{m,n}$ par les dérivées partielles d'une exponentielle	372
CXXII	Formules de récurrence entre polynomes $H_{m,n}$ et $G_{m,n}$ consécutifs	374
CXXIII ...	Expression des polynomes $H_{m,n}$ et $G_{m,n}$ par des intégrales définies	376
CXXIV.....	Système d'équations aux dérivées partielles des polynomes $H_{m,n}$ et $G_{m,n}$	377
CXXV.....	L'équation de la chaleur généralisée. Les fonctions $D_{m,n}$ et $E_{m,n}$	379
CXXVI.....	Intégrales générales des systèmes d'équations aux dérivées partielles des polynomes $H_{m,n}$ et $G_{m,n}$	380
CXXVII ...	Développement d'une fonction $F(x, y)$ en série de polynomes $H_{m,n}$ et $G_{m,n}$	384
CXXVIII ..	Les courbes algébriques $H_{m,n}(x, y) = 0$	385
NOTE I	Sur les polynomes $V_n^s(x)$	389
NOTE II....	Sur une application de la fonction $F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y)$ à certains développements de la Mécanique Céleste	392
NOTE III...	Sur la convergence des séries hypergéométriques les plus générales à deux variables	396
NOTE IV...	Sur la résolution des équations algébriques par des fonctions hypergéométriques générales.	400
NOTE V ...	Sur certains polynomes orthogonaux et sur les quadratures mécaniques des fonctions de plusieurs variables	407
NOTE VI...	Sur diverses généralisations des fonctions hypersphériques : fonctions hypercylindriques, hyperconiques, hypertoroïdales	411
BIBLIOGRAPHIE		[illegible]
TABLE ANALYTIQUE DES MATIÈRES		429

FIN.

End

Generated at University of California, Berkeley on 2025-03-18 05:22 GMT / https://hdl.handle.net/2027/umn.31951000508403g
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from UNIVERSITY OF MINNESOTA